第12回 COE 研究員連続講演会

Ⅰ）Segal-Bargmann 空間の巡回ベクトルについて

Ⅱ）2重単位開円板上の逆シフト不変部分空間上のクロス交換子について

COE 研究員
泉池　耕平

Ⅰ）2007.4.16（月），Ⅱ）5.7（月）

Series #121. June, 2007

Publication of this series is partly supported by Grant-in-Aid for formation of COE.
‘Mathematics of Nonlinear Structures via Singularities’（Hokkaido University）
URL:http://coe.math.sci.hokudai.ac.jp

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#98 M. Takeda, T. Mikami (Eds.), Probability and PDE, 48 pages. 2005.

#99 M. Van Manen, The 6th COE Lecture Series“From the cut-locus via medial axis to the Voronoi diagram and back ” 42 pages. 2005.

#100 K. Hayami, T. Nara, D. Furihata, T. Matsuo, T. Sakurai and T. Sakajo (Eds.), 応用数理サマーセミナー「逆問題」, 196 pages. 2005.

#101 B. Forbes, The 7th COE Lecture Series トーリックミラー対称性、56 pages. 2005.

#102 H. Kubo, T. Ozawa and K. Yamauchi, SAPPORO GUEST HOUSE SYMPOSIUM ON MATHEMATICS 20 “Nonlinear Wave Equations”, 68 pages. 2005.

#103 A. Miyachi and K. Tachizawa, Proceedings of the Harmonic Analysis and its Applications at Sapporo, 107 pages. 2005.

#104 S. Izumiya (Ed), Y. Numata, J. Ishimoto, I. Sasaki, Y. Nagase and M. Yamamoto, 第 2 回数学総合若手研究集会 - The 2nd COE Conference for Young Researchers -, 274 pages. 2006.

#105 T. Yamamoto, O. Hatori, M. Hayashi and T. Nakazi (Eds.), 第 14 回関数空間セミナー, 112 pages. 2006.

#106 Y. Daido, 学位論文 Doctoral thesis “RECONSTRUCTION OF INCLUSIONS FOR THE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HEAT EQUATION USING PROBE METHOD”, 68 pages. 2006.

#107 T. Yamamoto, 学位論文 Doctoral thesis “Singular fibers of two colored differentiable maps and cobordism invariants”, 333 pages. 2006.

#108 S. Izumiya, Singularity theory of smooth mappings and its applications: a survey for non-specialists, 41 pages. 2006.

#109 J. Cheng, B. Y. C. Hon, J. Y. Lee, G. Nakamura and M. Yamamoto, Inverse Problems in Applied Sciences - towards breakthrough - Organizing Committee, 96 pages. 2006.

#110 K. Matsumoto, 超幾何関数早春学校, 87 pages. 2006.

#111 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, The 31th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 91 pages. 2006.

#112 H. Okamoto, D. Sheen, Z. Shi, T. Ozawa, T. Sakajo and Y. Chen, Book of Abstracts of the First China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics & The Second East Asia SIAM Symposium, 78 pages. 2006.

#113 N. Ishimura, T. Ishiwata, T. Sakajo, T. Sakurai, M. Nagayama, T. Nara, K. Hayami, D. Furihata and T. Matsuo, 応用数理サマーセミナー「確率微分方程式」, 116 pages. 2006.

#114 T. Abe, 第 8 回 COE 研究員連続講演会『超平面配置と対数的ベクトル場の幾何』, 23 pages. 2006.

#115 H. Kubo and T. Ozawa, Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 22 “Nonlinear Wave Equations”, 67 pages. 2006.

#116 S. Okabe, 第 9 回 COE 研究員連続講演会『ある束縛条件下における平面弾性閉曲線のダイナミクス』, 31 pages. 2006.

#117 A. Suzuki, T. Ito, N. Sato, K. Shibuya, D. Hirose, Y. Maekawa and K. Matsumoto, 第 3 回数学総合若手研究集会 –他分野との学際的交流を目指して, 264 pages. 2007.

#118 T. Yamamoto, Y. Sato, N. Kataoka and H. Takagi, Proceedings of the conference on New Aspects of High-dimensional Nonlinear Dynamics, 73 pages. 2007.

#119 T. Yamamoto and T. Nakazi, 第 15 回関数空間セミナー報告集, 82 pages. 2007.

#120 K. Hirata, 第 10 回 COE 研究員連続講演会『正値調和関数に対する Martin 積分表現と非線形楕円型方程式の正値解の存在』, 25 pages. 2007.

21世紀COEプログラム：
特異性から見た非線形構造の数学

第12回 COE研究員連続講演会

Ⅰ）Segal-Bargmann空間の巡回ベクトルについて

Ⅱ）2重単位開円板上の逆シフト不変部分空間上のクロス交換子について

COE研究員
泉池　耕平

Ⅰ）2007.4.16（月），Ⅱ）5.7（月）

北海道大学理学部4号館409室

Segal-Bargmann 空間の巡回ベクトルについて

泉池　耕平

1　Introduction

不変部分空間の研究は、1949 年に Beurling が Hardy 空間の座標関数 z の乗算作用素に対する不変部分空間を特徴付けたことから始まった。以後、多くの不変部分空間に関する研究が行われ大きく発展してきた。また、この結果から Hardy 空間の cyclic 関数の特徴付けも得られている。ここでは、この不変部分空間及び cyclic 関数を Segal-Bargmann 空間について考えていく。

まず、不変部分空間及び cyclic 関数を定義する。複素平面 $\mathbb{C}$ のある領域 Ω 上の正則関数からなる Banach 空間を X とする。

定義 1. X の閉部分空間 M が不変であるとは、

$$zM = \{zf(z) : f(z) \in M\} \subset M$$

であるときにいう。ここで、z は座標関数である。

定義 2. 関数 $F(z) \in X$ が cyclic であるとは、$F(z)\mathcal{C} \subset X$、かつ $F(z)\mathcal{C}$ が X で稠密であるときにいう。ここで、$\mathcal{C}$ は z の多項式全体である。

Segal-Bargmann 空間について述べていく前に、既に幾つかの結果が知られている解析関数空間について紹介していく。

Hardy 空間

Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ は、

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \lim_{r \nearrow 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right\}^{1/2} < \infty$$

を満たす単位開円板 $\mathbb{D}$ 上の正則関数全体からなる空間である。Beurling によって得られた特徴付けは次の結果である：

定理 3 (Beurling の定理). M が $H^2(\mathbb{D})$ の不変部分空間であることは、$M = q(z)H^2(\mathbb{D})$（$q(z)$ は内部関数）であることと同値である。

また、関数 $f(z) \in H^2(\mathbb{D})$ が cyclic であることは $f(z)$ が $H^2(\mathbb{D})$ の外部関数であることと同値である。

現在、Hardy 空間以外に不変部分空間と cyclic 関数の特徴付けが得られている空間は存在しない。しかし、これをもとに他の解析関数空間においても不変部分空間及び cyclic 関数の研究が行われてきた。次に、その 1 つである Bergman 空間の cyclic 関数に関する結果を紹介していく。

Bergman 空間

Bergman 空間 $L_a^2(\mathbb{D})$ は

$$\|f\|_{L_a^2(\mathbb{D})} = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) \right\}^{1/2} < \infty$$

を満たす $\mathbb{D}$ 上の正則関数全体からなる空間である。ここで、$dA(z)$ は $\mathbb{D}$ 上の Lebesgue 測度である。

定義 4. $f(z), g(z) \in L_a^2(\mathbb{D})$ とする。任意の多項式 $P(z)$ に対して

$$\|Pg\|_{L_a^2(\mathbb{D})} \leq \|Pf\|_{L_a^2(\mathbb{D})}$$

であるとき、$g \prec f$ と表記する。

関数 $F(z) \in L_a^2(\mathbb{D})$ が $L_a^2(\mathbb{D})$-外部関数であるとは、$g \prec F$ である任意の $g \in L_a^2(\mathbb{D})$ に対して $|g(0)| \leq |F(0)|$ であるときにいう。

Hardy 空間の外部関数は Hardy 空間のノルムで同じ性質を持つことから、この性質を持つ関数を $L_a^2(\mathbb{D})$-外部関数と呼ぶ。この空間の cyclic 関数について次のような結果が知られている：

定理 5 ([ARS],[Ko]). 次は同値である：

(i) 関数 $f(z)$ が $L_a^2(\mathbb{D})$ の cyclic 関数である；

(ii) $f(z)$ が $L_a^2(\mathbb{D})$-外部関数である。

しかし、$L_a^2(\mathbb{D})$-外部関数の具体的な形が分かっていないため、これによって特徴付けが得られたことにはならない。$H^1 \subset L_a^2(\mathbb{D})$ であるので、$H^1(\mathbb{D})$ の外部関数は Bergman 空間の元である。この関数については、次のようなことが知られている：

定理 6 ([BS]). 関数 $f(z)$ を $H^1(\mathbb{D})$ の外部関数とする。そのとき、$f(z)$ は $L_a^2(\mathbb{D})$ の cyclic 関数である。

内部関数については、Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ では全て cyclic 関数ではないが Bergman 空間では cyclic である関数が存在する。

定理 7 ([Ro],[Sh]). $S(z)$ を内部関数とする。そのとき、次は同値である：

(i) $S(z)$ は $L_a^2(\mathbb{D})$ の cyclic 関数である、

(ii) $S(z)$ は、単位円周 $\mathbb{T}$ 上の任意の Carleson 集合 K に対して 0 となる正有限特異測度 μ によって作られる特異内部関数である。つまり、

$$S(z) = c \cdot \exp\left(-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta)\right),\ |c| = 1$$

である。

H^1 に含まれない $L_a^2(\mathbb{D})$ の元については、どの関数が cyclic であるかはよく分かっていない。

2 Segal-Bargmann 空間

Segal-Bargmann 空間 $L_a^2(\mathbb{C})$ は

$$\|f\|_{L_a^2(\mathbb{C})} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\frac{|z|^2}{2}} dA(z)\right\}^{1/2} < \infty$$

を満たす整関数全体からなる空間である。この空間は多項式環 $\mathcal{C}$ が稠密な Hilbert 空間である。しかし Hardy 空間や Bergman 空間とは異なり、次の性質を持った空間である；

命題 8 ([GZ]). $M \neq \{0\}$ を $L_a^2(\mathbb{C})$ の閉部分空間とし、$f(z) \in Hol(\mathbb{C})$ とする。そのとき、$f(z)M \subset M$ ならば、$f(z)$ は定数である。

この命題は、$L_a^2(\mathbb{C})$ には不変部分空間が存在しないことを示している。そのため、似た性質を持つ準不変部分空間を定義する。

定義 9. M を $L_a^2(\mathbb{C})$ の閉部分空間とする。そのとき、M が準不変部分空間であるとは、$zM \cap L_a^2(\mathbb{C}) \subset L_a^2(\mathbb{C})$ であるときにいう。

多項式によって生成された準不変部分空間は、次のように構造が明らかになっている；

命題 10 ([CG]). 任意の多項式 $p(z)$ に対して、

$$\overline{p(z)\mathcal{C}} = \{p(z)f(z) \in L_a^2(\mathbb{C}) : f(z) \in Hol(\mathbb{C})\}$$

である。

しかし、一般の関数によって生成される場合については明らかになっていない。

cyclic 関数については、次のような完全な特徴付けを得ることができた：

定理 11 ([Izu]). 次は同値である：

(i) 関数 $f(z) \in L_a^2(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 上に零点を持たない；

(ii) $f(z) = \exp(az^2 + bz + c)$, ここで、$a, b, c \in \mathbb{C}$, $|a| < \frac{1}{4}$；

(iii) $f(z)$ は $L_a^2(\mathbb{C})$ の cyclic 関数である。

この結果から分かるように、この空間では零点を持たない関数全てが cyclic 関数である。しかし、Hardy 空間や Bergman 空間などではこのような性質は持たない（両方の空間で cyclic ではない特異内部関数が存在する)。実際、この 2 つの空間以外でもこの性質を持つ空間は知られておらず、Brown-Shields によって次の問題が提起されている：

問題 12 ([BS]). Ω を $\mathbb{C}$ のある領域とし、X を次の 3 つの条件を満たす Ω 上で正則な関数からなる Banach 空間とする；

(i) 多項式環 $\mathcal{C}$ が X で稠密である、

(ii) $zX \subset X$ である、

(iii) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、評価汎関数 $E_\lambda : f \to f(\lambda)$, $f \in X$、が有界である。

このような X で、Ω 上に零点を持たない関数全てが cyclic 関数となる空間は存在するか？

整関数からなる Banach 空間では、この問題の仮定を満たす空間は存在しないことが知られている [GZ]。しかしこれまでにこの性質を持つ空間の存在は知られておらず、この空間はこの性質を持つ最初の例である。

また、定理 11 より次の結果が得られる；

系 13. 関数 $f(z) \in L_a^2(\mathbb{C})$ を零点が有限個の関数とする。そのとき、f と同じ零点を持つ多項式を $p(z)$ とすると

$$\overline{p(z)\mathcal{C}} = \overline{f(z)\mathcal{C}}$$

である。

これによって、零点が有限個の関数によって生成される場合については明らかになった。しかし、零点が無限個の関数によって生成される場合については分かっていない。

定理 11 の証明

証明を行うためには、次の補題が必要である。

補題 14 ([CGH]). 任意の $f \in L_a^2(\mathbb{C})$ に対して

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{\langle f, K_\lambda \rangle_{L_a^2(\mathbb{C})}}{\|K_\lambda\|_{L_a^2(\mathbb{C})}} = 0$$

である。

この補題を用いれば、(i)⇒(ii) は簡単にわかる。また、(iii)⇒(i) については明らかであるので、(ii)⇒(iii) を示せば十分である。a, b, c を $|a| < \frac{1}{4}$ を満たす複素数とし、$h(z) = az^2 + bz + c$ とおく。多項式環 $\mathcal{C}$ は $L_a^2(\mathbb{C})$ で稠密だから、$\mathcal{C} \subset \overline{e^h\mathcal{C}}$ を示せばよい。N を

$$(1 + \frac{1}{N})|a| < \frac{1}{4} \tag{1}$$

を満たす自然数とし、$q_n(z)$ を $e^{-\frac{1}{N}h(z)}$ の部分和、つまり

$$q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\{-\frac{1}{N}h(z)\}^k}{k!}$$

とおく。明らかに、この $q_n(z)$ は多項式である。このとき

$$|q_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{\frac{1}{N}(|a||z|^2+|b||z|+|c|)\}^k}{k!} = e^{\frac{1}{N}(|a||z|^2+|b||z|+|c|)}$$

だから、任意の多項式 $p(z)$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left|p(z)q_n(z)e^{h(z)} - p(z)e^{-\frac{1}{N}h(z)}e^{h(z)}\right| \\
&\quad\leq\ |p(z)|\left(e^{(1+\frac{1}{N})(|a||z|^2+|b||z|+|c|)} + e^{(1-\frac{1}{N})(|a||z|^2+|b||z|+|c|)}\right) \\
&\quad\leq\ 2|p(z)|e^{(1+\frac{1}{N})(|a||z|^2+|b||z|+|c|)}
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
&\left|p(z)q_n(z)e^{h(z)} - p(z)e^{-\frac{1}{N}h(z)}e^{h(z)}\right|^2 e^{-\frac{|z|^2}{2}} \\
&\leq\ 4|p(z)|^2 e^{\{2(1+\frac{1}{N})|a|-\frac{1}{2}\}|z|^2+2(1+\frac{1}{N})(|b||z|+|c|)}
\end{aligned}$$

となる。(1) より

$$2(1+\frac{1}{N})|a| - \frac{1}{2} < 0$$

だから、最後の関数は dA に関して可積分である。$n \to \infty$ とするとき $q_n(z)$ は $\mathbb{C}$ 上で $e^{-\frac{1}{N}h(z)}$ に点別収束するので、ルベーグの収束定理より、$n \to \infty$ とするとき

$$\int_{\mathbb{C}} \left|p(z)q_n(z)e^{h(z)} - p(z)e^{-\frac{1}{N}h(z)}e^{h(z)}\right|^2 e^{-\frac{|z|^2}{2}} dA(z) \to 0$$

となる。それゆえ、

$$e^{(1-\frac{1}{N})h(z)}\mathcal{C} \subset \overline{e^{h(z)}\mathcal{C}}$$

が得られる。$e^{(1-\frac{1}{N})h(z)}$ に対しても同様のことを行うことができ、

$$e^{(1-\frac{2}{N})h(z)}\mathcal{C} \subset \overline{e^{(1-\frac{1}{N})h(z)}\mathcal{C}}.$$

が得られる。これらを繰り返せば、

$$\mathcal{C} \subset \overline{e^{\frac{1}{N}h(z)}\mathcal{C}} \subset \cdots \subset \overline{e^{(1-\frac{1}{N})h(z)}\mathcal{C}} \subset \overline{e^{h(z)}\mathcal{C}}$$

が得られる。

参考文献

[ARS] A. Aleman, S. Richter, C. Sundberg; *Beurling's theorem for the Bergman space*, Acta Math. **177** (1996), 275–310.

[Be] A. Beurling; *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math. **81** (1949), 239–255.

[BS] L. Brown, A. L. Shields; *Cyclic vectors in the Dirichlet space*, Trans. Amer. Math. Soc. **285** (1984), 269–304.

[CG] X. Chen, K. Guo; *Analytic Hilbert Modules*, Chapman-Hall/CRC 2003.

[CGH] X. Chen, K. Guo and S. Hou, *Analytic Hilbert spaces over the complex plane*, J. Math. Anal. Appl. **268** (2002), 684-700.

[GZ] K. Guo, D. Zheng; *Invariant subspaces, quasi-invariant subspaces and Hankel operators*, J. Funct. Anal. **187** (2001), 308–342.

[Izu] K. H. Izuchi; *Cyclic vectors in the Fock space over the complex plane*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 3627–3630.

[Ko] B. Korenblum; *Outer functions and cyclic elements in Bergman spaces*, J. Funct. Anal. **115** (1993), 104–118.

[Ro] J. W. Roberts; *Cyclic inner functions in weighted Bergman spaces and weak outer functions in H^p, $0 < p < 1$*, Illinois J. Math. **29** (1985), 25–38.

[Sh] H. S. Shapiro; *Some remarks on weighted polynomial approximation of holomorphic functions*, Math. USSR Sb. **2** (1967), 285–294.

2重単位開円板上の逆シフト不変部分空間の上のクロス交換子について

泉池　耕平

1　Introduction

2変数を $z = e^{is}, w = e^{it}$ によって表記し、$\mathbb{C}^2$ 上の単位トーラスを $\Gamma^2 = \Gamma_z \times \Gamma_w = \{(z,w) : |z| = |w| = 1\}$ によって表記する。$L^2 = L^2(\Gamma^2)$ をノルム

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{is}, e^{it})|^2 \frac{dsdt}{(2\pi)^2} \right)^{1/2}$$

を持つ Γ^2 上の Lebesgue 空間とし、$H^2 = H^2(\Gamma^2)$ を Γ^2 上の Hardy 空間とする。

定義 1. 関数 $f \in H^\infty$ が内部関数であるとは、Γ^2 上の殆ど至る所で $|f| = 1$ であるときに言う。

H^2 の閉部分空間 M が不変であるとは、$zM \subset M$ かつ $wM \subset M$ であるときに言う。

不変部分空間の研究は、1949年に Beurling が1変数の Hardy 空間の不変部分空間の特徴付けを行ったことから始まった。

定理 2 ([Beu]). 不変部分空間 M は、$M = qH^2(\Gamma)$、q は内部関数、である。

2　不変部分空間

2変数の Hardy 空間の不変部分空間についての既に知られている結果を述べていく。閉部分空間 M に対して、L^2 から M への正射影を P_M によって表記する。関数 $\psi \in L^\infty$ に対して、H^2 上の Toeplitz 作用素 T_ψ は

$T_\psi f = P_{H^2}(\psi f)$、$f \in H^2$ によって定義される。この Toeplitz 作用素と同じように、M 上の作用素 R_ψ を

$$R_\psi = P_M(\psi f) \ \text{ for } \ f \in M.$$

によって定義する。この作用素は、$R_\psi^* = R_{\overline{\psi}}$、$R_z = T_z|_M$、$R_w = T_w|_M$ となる。$[R_z, R_w^*]$ によって、 R_z と R_w^* のクロス交換子を表記する。つまり、

$$[R_z, R_w^*] = R_z R_w^* - R_w^* R_z$$

とする。Mandrekar は、このクロス交換子を用いて不変部分空間 M が Beurling 型であることの同値条件を以下のように導いた；

定理 3 ([Man]). $[R_z, R_w^*] = 0$ であることと、M が Beurling 型、つまり $M = qH^2$、q は Γ^2 上の内部関数、であることは同値である。

この結果をもとに多くの研究が行われている。その中で、作用素 R_z、R_w のシンボルを z, w から一般の $\phi(z), \psi(w) \in H^\infty(\Gamma)$ にそれぞれ換えたクロス交換子が 0 となるときを考え、以下のような結果を得た；

定理 4 ([IzIz2]). $\phi(z), \psi(w) \in H^\infty(\Gamma)$ を定数ではない関数とする。そのとき、$[R_z, R_w^*] = 0$ であることと $[R_{\phi(z)}, R_{\psi(w)}^*] = 0$ であることは同値である。

3 逆シフト不変部分空間

H^2 の部分空間 M を $M \neq \{0\}$ かつ $M \neq H^2$ である不変部分空間とする。そのとき、

$$T_z^*(H^2 \ominus M) \subset H^2 \ominus M$$

かつ

$$T_w^*(H^2 \ominus M) \subset H^2 \ominus M.$$

となる。$N = H^2 \ominus M$ と表記する。この N を H^2 の逆シフト不変部分空間と呼ぶ。

不変部分空間と同様に、この逆シフト不変部分空間についても交換子による研究が行われている。R_ψ と同じように、$S_\psi f = P_N(\psi f)$、$f \in N$、によって N 上の作用素 S_ψ を定義する。この作用素は、$S_\psi^* = S_{\overline{\psi}}$、$S_z^* = T_z^*|_M$、$S_w^* = T_w^*|_M$ となる。逆シフト不変部分空間についても、$[S_z, S_w^*] = 0$ となる部分空間の特徴付けが知られている：

定理 5 ([INS1]). $[S_z, S_w^*] = 0$ でなることと、逆シフト不変部分空間 N が次の 3 つのどれかの形を持つことと同値である；

- $N = H^2 \ominus q_1(z)H^2$
- $N = H^2 \ominus q_2(w)H^2$
- $N = (H^2 \ominus q_1(z)H^2) \cap (H^2 \ominus q_2(w)H^2)$,

$q_1(z)$ と $q_2(w)$ は 1 変数の内部関数である。

不変部分空間の場合は、定理 3 のようにシンボルを換えても交換子は 0 であった。しかし、逆シフト不変部分空間の場合は状況が異なることが知られている。そのため、$[S_{z^n}, S_w^*] = 0$、n は正の整数、となる逆シフト不変部分空間について考えていく。

明らかに、$[S_z, S_w^*] = 0$ ならば $[S_{z^n}, S_w^*] = 0$ である。また、[INS2] により、 $S_{z^n} S_w^* = 0$ ならば $[S_{z^n}, S_w^*] = 0$ である。よって、$[S_z, S_w^*] \neq 0$ かつ $S_{z^n} S_w^* \neq 0$ の仮定で考えていく。

[INS2] で、$n = 2$ のときは明らかになっている；
$[S_{z^2}, S_w^*] = 0$ となることは、次の 3 つのどれかであることと同値である:

- $[S_z, S_w^*] = 0$
- $S_{z^2} S_w^* = 0$
- $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{D} \backslash \{0\}$ は $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ を満たし、かつ $N \subset H^2 \ominus b(z)H^2$ となるような Blaschke 積
$$b(z) = \frac{z - \alpha_1}{1 - \overline{\alpha_1} z} \frac{z - \alpha_2}{1 - \overline{\alpha_2} z}$$
が存在する。

4 結果

[IzIz1] において、以下の結果が得られた：

定理 6 ([IzIz1]). N を逆シフト不変部分空間とし、$n \geq 2$ とする。また、$[S_z, S_w^*] \neq 0$ かつ $S_{z^n} S_w^* \neq 0$ とする。そのとき、$[S_{z^n}, S_w^*] = 0$ であることは以下と同値である。

$$N = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{1 - \overline{\alpha_j} z} \left(H^2(\Gamma_w) \ominus q_j(w) H^2(\Gamma_w) \right),$$

$2 \le p \le n$、の形で、次の条件を満たす:

(i) 異なる任意の i, j に対して、$\alpha_i \neq \alpha_j$；

(ii) $\alpha_1^n = \alpha_2^n = \cdots = \alpha_p^n$；

(iii) 任意の $1 \le j \le p$ に対して、$q_j(w)$ は定数でない 1 変数の内部関数または 0 である；

(iv) ある i, j に対して、$q_i(w)H^2(\Gamma_w) \neq q_j(w)H^2(\Gamma_w)$。

この場合、$S_{z^n} = \alpha_1^n I$ である。

この定理を示すために、2 つの補題を紹介する。これらの補題は、Izuchi-Nakazi-Seto によって示されている；

補題 7 ([INS2]). $[S_{z^n}, S_w^*] = 0$ であるならば、$[S_z, S_w^*] = 0$ となるかまたは $M \cap H^2(\Gamma_z) = b(z)H^2(\Gamma_z)$ となる。ここで、$b(z)$ は次数が n 以下の定数でない Blaschke 積である。

補題 8 ([INS2]). $M \cap H^2(\Gamma_z) = b(z)H^2(\Gamma_z)$、$b(z)$ は定数でない内部関数、とする。$M_0 = M \ominus b(z)H^2$ とする。そのとき、$[S_{z^n}, S_w^*] = 0$ であることと、$T_{z^n}^* M_0 \subset M_0$ であることは同値である。

これら 2 つの補題を用いて、定理 6 を証明する。
まずは、$(\Leftarrow)$ を示す。

$$N = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{1 - \overline{\alpha_j} z} \left(H^2(\Gamma_w) \ominus q_j(w) H^2(\Gamma_w) \right)$$

とし、

$$b(z) = \prod_{j=1}^{p} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha_j} z}.$$

とする。$M = H^2 \ominus N$ とおく。そのとき、$b(z)H^2 \subset M$ であり、(i) より $M \cap H^2(\Gamma_z) = b(z)H^2(\Gamma_z)$ となる。

$$M_0 = M \ominus b(z)H^2$$

とおく。そのとき、任意の M_0 の元 G は

$$G = \sum_{j=1}^{p} \frac{f_j(w)}{1 - \overline{\alpha_j} z}, \ \ f_j(w) \in H^2(\Gamma_w)$$

の形を持つ。(ii) より、$T_{z^n}^* G = \overline{\alpha_1}^n G \in M_0$ である。よって、補題 2 より $[S_{z^n}, S_w^*] = 0$ を得る。

次に、($\Rightarrow$) を示す。$[S_{z^n}, S_w^*] = 0$ とし、$M = H^2 \ominus N$ とおく。補題 1 より、

$$b(z)H^2 \subset M$$

であり、点列 $\{\alpha_j\}_{j=1}^p \subset \mathbb{D}$ が任意の $i \neq j$ に対して $\alpha_i \neq \alpha_j$ を満たし、任意の j に対して $m_j \geq 1$、かつ

$$0 < \sum_{j=1}^p m_j \leq n$$

を満たす有限 Blaschke 積

$$b(z) = \prod_{j=1}^p \left(\frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha_j} z} \right)^{m_j}$$

が存在する。$b(0) = 0$ であるならば、$S_{z^n} S_w^* = 0$ または $[S_z, S_w^*] = 0$ である。よって、$b(0) \neq 0$ と仮定してもよい。

$\alpha_i^n \neq \alpha_j^n$ となる i, j が存在するならば、$[S_z, S_w^*] = 0$ である。また $\alpha_1^n = \cdots = \alpha_p^n$ であり、かつ $m_j \geq 2$ となる m_j が存在するならば、$[S_z, S_w^*] = 0$ となる。よって、

$$b(z) = \prod_{j=1}^p \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha_j} z}$$

であり、かつ $\alpha_1^n = \cdots = \alpha_p^n$ である。今 $N \perp b(z)H^2$ であるので、任意の $G \in N$ に対して

$$G = \sum_{j=1}^p \frac{g_j^G(w)}{1 - \overline{\alpha_j} z}, \;\; g_j^G(w) \in H^2(\Gamma_w)$$

と書ける。$\{g_j^G(w) : G \in N\}$ によって生成される逆シフト不変部分空間は、$H^2(\Gamma_w) \ominus q_j(w) H^2(\Gamma_w)$ によって表記できる。ここで、$q_j(w)$ は内部関数または 0 である。よって、

$$N = \sum_{j-1}^p \frac{1}{1 - \overline{\alpha_j} z} \left(H^2(\Gamma_w) \ominus q_j(w) H^2(\Gamma_w) \right)$$

が得られる。また、(iii) と (iv) についても簡単に確かめることができる。

参考文献

[Beu] A. Beurling; *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math. **81** (1949), 239-255.

[INS1] K.J. Izuchi, T. Nakazi, M. Seto; *Backward shift invariant subspaces in the bidisc II*, J. Operator Theory **51** (2004), 361-376.

[INS2] K.J. Izuchi, T. Nakazi, M. Seto; *Backward shift invariant subspaces in the bidisc III*, Acta Sci. Math. (Szeged) **70** (2004), 727-749.

[IzIz1] K.J. Izuchi, K.H. Izuchi; *Cross commutators on backward shift invariant subspaces over the bidisk*, Acta Sci. Math. **72** (2006), 251-270.

[IzIz2] K.J. Izuchi, K.H. Izuchi; *Cross commutators on backward shift invariant subspaces over the bidisk II*, preprint.

[Man] V. Mandrekar; *The validity of Beurling theorems in polydiscs*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 145-148.