HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	第10回数学総合若手研究集会
Author(s)	黒田, 匡迪; 後藤, 良彰; 佐々木, 克真; 二口, 伸一郎; 船川, 大樹; 山下, 達也; 和田, 和幸
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 160, i, 1-vii, 325
Issue Date	2014-02-03
DOI	10.14943/81522
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/68085
Type	bulletin (article)
File Information	tech160.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

第１０回数学総合若手研究集会

～多分野間の交流による発展・発見を目指して～

The 10th Mathematics Conference for Young Researchers

－MCYR10－

世話人

黒田 匡迪　後藤 良彰　佐々木克真　二口伸一郎

船川 大樹　山下 達也　和田 和幸

札幌，2014

Series #160.February, 2014

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS
http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/view/type/techreport.html

#138 J. Inoguchi, いろいろな幾何と曲線の時間発展, 66 pages. 2008.

#139 M. Hayashi, I. Saito and S. Miyajima, 第 17 回関数空間セミナー, 91 pages. 2009.

#140 T. Suda, Y. Umeta, K. Kasai, M. Kasedou, T. Yamanoi and K. Yoshida, 第 5 回数学総合若手研究集会, 252 pages. 2009.

#141 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, S. Jimbo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, G. Nakamura 第 34 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 67 pages. 2009.

#142 K. Kasai, H. Kuroda, T. Nagai, K. Nishi, S. Tsujie and T. Yamaguchi, 第 6 回数学総合若手研究集会, 267 pages. 2010.

#143 M. Hayashi, T. Nakazi, M. Yamada and R. Yoneda, 第 18 回関数空間セミナー, 80 pages. 2010.

#144 Liang Chen, Doctoral thesis "On differential geometry of surfaces in anti de Sitter 3-space", 79 pages. 2010.

#145 T. Funaki, Y. Giga, M.-H. Giga, H. Ishii, R. V. Kohn, P. Rybka, T. Sakajo, P. E. Souganidis, Y. Tonegawa, and E. Yokoyama, Proceedings of minisemester on evolution of interfaces, Sapporo 2010, 279 pages. 2010.

#146 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, and G. Nakamura, Proceedings of the 35th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 2010.

#147 M. Hayashi, T. Nakazi, M. Yamada and R. Yoneda, 第 19 回関数空間セミナー, 111 pages. 2011.

#148 T. Fukunaga, N. Nakashima, A. Sekisaka, T. Sugai, K. Takasao and K. Umeta, 第 7 回数学総合若手研究集会, 280 pages. 2011.

#149 M. Kasedou, Doctoral thesis "Differential geometry of spacelike submanifolds in de Sitter space", 69 pages. 2011.

#150 T. Ozawa, Y.Giga, T. Sakajo, S. Jimbo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa and G. Nakamura, Proceedings of the 36th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 63 pages. 2011.

#151 K. Takasao, T. Ito, T. Sugai, D. Suyama, N. Nakashima, N. Miyagawa and A. Yano, 第 8 回数学総合若手研究集会, 286 pages. 2012.

#152 M. Hayashi, T. Nakazi and M. Yamada, 第 20 回関数空間セミナー, 89 pages. 2012.

#153 Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 37th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 81 pages. 2012.

#154 N. Hu, Doctoral thesis "Affine geometry of space curves and homogeneous surfaces", 69 pages. 2012.

#155 2013 代数幾何学シンポジウム, 127 pages. 2013.

#156 M. Hayashi, S. Miyajima, T. Nakazi, I. Saito and M. Yamada, 第 21 回関数空間セミナー, 90 pages. 2013.

#157 D. Suyama, T. ito, M. Kuroda, Y. goto, N. Teranishi, S. Futakuchi, T. Fuda and N. Miyagwa, 第 9 回数学総合若手研究集会, 344 pages. 2013.

#158 Y. Giga, S. Jimbo, H. Terao, K. Yamaguchi, Proceedings of the 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 2013, 154 pages. 2013.

#159 Y. Giga, S. Jimbo, T. Ozawa, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, H. Kubo, T. Sakajo, and H. Takaoka Proceedings of the 38th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 76 pages. 2013.

はじめに

大学院生および若手研究者により組織・運営されている数学総合若手研究集会は今年で第 10 回目を数えます。当研究集会は、数学に関わる物理・化学・経済・工学・医学などの様々な分野の若手研究者に講演の場を提供することで、研究の発展および人的ネットワークの構築を促すことを目的として行われてきました。近年、多くの学問分野が数学的手法を取り入れることに関心を持っており、数学を軸とした多分野間の交流による発展・発見を目指してこのような場を設けることには、少なからず意義があると信じております。こうした目的が功を奏してか講演を希望する方々が年々増えてきており、今年は数学はもちろんのこと、物理・化学・工学など、幅広い分野の若手研究者の方々70 名に講演していただくことになりました。

当研究集会の講演は、口頭発表であるシングルセッション (60 分) とパラレルセッション (30 分)、そしてポスター発表からなります。シングルセッションは、あらゆる分野の参加者を対象とした講演であり、問題の背景・動機などを含んだ入門的な内容となっております。それに対して、パラレルセッションは、より専門的な内容の講演であり、分野ごとに部屋を分けて行われます。ポスター発表では、個別の発表時間でなく、質疑応答の時間を設けております。

このテクニカルレポート集は講演者の方々から事前に提出していただいた原稿を印刷したものです。当研究集会の目的である「多分野間の交流による発展・発見」に合わせて、他分野の方々にも分かり易い、入門的な事項を含んだものとなっております。参加者の皆様が講演をより深く理解し、またご自身の研究を進展させる一助となればこの上ない喜びです。

開催にあたり、講演者の皆様、参加者の皆様、北大数学教室の先生方、数学事務の方々、過去の数学総合若手研究集会世話人の方々から多大なるご支援を頂きました。また、今年度はより円滑な運営の為にウェブ上での申し込みを導入いたしました。この申し込みフォームの製作は大学院生の山口崇幸氏の主導の下で行われました。皆様のおかげで今年度も無事に当研究集会を開催できましたことを、この場を借りて心より感謝申し上げます。

なお、この研究集会は北海道大学大学院理学研究院数学部門の財政的援助を受けて開催されています。深く感謝いたします。

2014 年 3 月

MCYR10 世話人
黒田匡迪 (代表)　後藤良彰　佐々木克真　二口伸一郎
船川大樹　　山下達也　和田和幸

第10回 数学総合若手研究集会

～多分野間の交流による発展・発見を目指して～

The 10th Mathematics Conference for Young Researchers

日時： 2014 年 3 月 3 日 (月)～3 月 6 日 (木)

場所： 北海道大学 学術交流会館

A : 小講堂 (シングル・パラレル会場)　B : 第 2 会議室 (パラレル会場)
C : 第 3 会議室 (パラレル会場)　D : 第 4 会議室 (パラレル会場)
E : 第 1 会議室 (ポスター会場・休憩所)

URL:http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/mcyr/2014/

• シングルセッション (会場 A)

永幡 裕　(Yutaka NAGAHATA)　北海道大学生命科学院
タンパクの時系列から得られた Markov 連鎖の解析に向けて：グラフの分割とクラスタリングで定義する複雑な化学反応における状態とその時間階層構造 3

石田 敦英　(Atsuhide ISHIDA)　追手門学院大学経済学部経済学科
Scattering problems on the Schrödinger equation for a repulsive Hamiltonian 11

只野 誉　(Homare TADANO)　大阪大学大学院理学研究科数学専攻
Gap theorems for compact gradient Sasaki-Ricci solitons 19

縫田 光司　(Koji NUIDA)　産業技術総合研究所セキュアシステム研究部門
非可換群を用いた暗号技術について 27

奥田 喬之　(Takayuki OKUDA)　九州大学数理学府
Dehn-twist presentations of periodic mapping classes and splitting of singular fibers 35

横山 俊一　(Shunichi YOKOYAMA)　九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 / JST CREST
数式処理における数学と世界最速への挑戦：終結式の計算を例に 43

河田 貴久　(Takahisa KAWADA)　名古屋工業大学大学院工学研究科情報工学専攻
群作用をもつゴッパ符号の構成法 51

坂田 繁洋　(Shigehiro SAKATA)　首都大学東京理工学研究科数理情報科学専攻
距離核ポテンシャルの最大点と体の中心 59

• パラレルセッション (会場 A)

布田 徹　(Toru FUDA)　北海道大学大学院理学院数学専攻
Convergence Conditions of Mixed States and their von Neumann Entropy in Continuous Quantum Measurements 69

相原 祐太　(Yuta AIHARA)　北海道大学理学研究院
Differentiation in Locally Convex Spaces and its Application to Asymptotic Analysis of the Partition Function of an Abstract Bose Field Model 73

二口 伸一郎 (Shinichiro FUTAKUCHI) 北海道大学大学院理学院数学専攻
非自己共役なハミルトニアンに対する力学の構成と，その応用について 77

日高 建 (Takeru HIDAKA) 九州大学大学院数理学研究院
準相対論的な Pauli-Fierz 模型の基底状態の存在について 81

川本 昌紀 (Masaki KAWAMOTO) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
電磁場中の粒子に対する散乱理論 85

高橋 剛 (Go TAKAHASHI) 早稲田大学基幹理工学研究科数学応用数理専攻
4 次元 Navier-Stokes 方程式の解の爆発と正則性 89

可香谷 隆 (Takashi KAGAYA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
外力項付き曲線短縮方程式に対する Capillary 自由境界値問題 93

渡辺 朋成 (Tomonari WATANABE) 広島大学大学院理学研究科数学専攻
時空間に非一様な消散項を持つ非線形波動方程式の大域解の存在と時間減衰評価 97

佐野 めぐみ (Megumi SANO) 大阪市立大学理学研究科数物系専攻
A mean value property for polycaloric functions 101

内免 大輔 (Daisuke NAIMEN) 大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻
Sobolev の臨界指数を持つ Kirchhoff 型方程式の正値解の存在について 105

高橋 甫宗 (Toshinori TAKAHASHI) 近畿大学大学院総合理工学研究科理学専攻
合流型超幾何微分方程式の Voros 係数 109

李 正勲 (Junghun LEE) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
On the Artin-Mazur Zeta Functions of Rational Maps over $\mathbb{C}_p$ 113

楢崎 政宏 (Masahiro NARAZAKI) 九州大学大学院 数理学府数理学専攻
Laplace 積分の評価と漸近展開 117

• パラレルセッション (会場 B)

土田 旭 (Asahi TSUCHIDA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
ポート制御 Hamilton 系における特異制御について 123

加葉田 雄太朗 (Yutaro KABATA) 北海道大学大学院理学院数学専攻
平面から平面への写像の特異点の認識問題とその応用 127

本多 俊一 (Shunichi HONDA) 室蘭工業大学大学院工学研究科数理システム工学専攻
枠付き曲線について 131

嶺山 良介 (Ryosuke MINEYAMA) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
Coxeter 群の無限遠境界と極限集合 135

野口 朗 (Akira NOGUCHI) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Group actions on a non-type I C^*-algebra 139

山本 健 (Ken YAMAMOTO) 中央大学理工学部物理学科
ジップの法則における規模と順位の反比例関係に対する一考察 143

弓林 司 (Tsukasa YUMIBAYASHI) 首都大学東京大学院理工学研究科物理学専攻
パラメータを持つ代数差分方程式と再帰方程式 147

佐々木 多希子 (Takiko SASAKI) 東京大学大学院数理科学研究科
Linearly implicit finite-difference scheme for a nonlinear wave equation with application to approximation of the blow-up time 151
畑中 美帆 (Miho HATANAKA) 大阪市立大学理学研究科数物系専攻
位相的トーリック多様体の貼り合わせによる構成法 155
十鳥 健太 (Kenta TOTTORI) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
Calabi's gradient metric on the space of Kähler metrics 159
大城 和秀 (Kazuhide OSHIRO) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
群上の連続ウェーブレット解析 163
冨澤 佑季乃 (Yukino TOMIZAWA) 中央大学大学院理工学研究科数学専攻
Bregman 距離による非 Lipschitz な非線形写像 167
関坂 歩幹 (Ayuki SEKISAKA) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
反応拡散方程式の進行波解の安定性に対する力学系的アプローチ 171

• パラレルセッション (会場 C)

内藤 貴仁 (Takahito NAITO) 信州大学理学部数理・自然情報科学科
分類空間のループ余積と Van den Bergh 同型写像 177
原口 忠之 (Tadayuki HARAGUCHI) 環太平洋大学次世代教育学部教育経営学科
微分空間の性質とその応用について 181
岡崎 建太 (Kenta OKAZAKI) 京都大学数理解析研究所
レンズ空間の E_6 状態和不変量について 185
塚本 靖之 (Yasuyuki TSUKAMOTO) 京都大学大学院人間・環境学研究科共生人間学専攻
平面配置の対称性に関するいくつかの例 189
野口 和範 (Kazunori NOGUCHI) 信州大学
Ramified coverings of small categories 193
橋爪 恵 (Megumi HASHIZUME) 奈良女子大学大学院人間文化研究科数学専攻
同じ射影図を持つリンクダイアグラムの集合の領域交差交換による同値類について 197
高岡 邦行 (Kuniyuki TAKAOKA) 早稲田大学大学院教育学研究科
LR 数が 3 の平面閉曲線の特徴付けについて 201
山口 崇幸 (Takayuki YAMAGUCHI) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Truncated Polyak algebra of Gauss words and classification by numerical finite type invariant 205
瀬戸 樹 (Tatsuki SETO) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Toeplitz 作用素を用いた Roe-Higson 指数定理の偶数次元への展開 209
安本 真士 (Masashi YASUMOTO) 神戸大学大学院理学研究科
ミンコフスキー空間内の特異点を持つ離散極大曲面について 213
緒方 勇太 (Yuta OGATA) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
DPW method for constant mean curvature surfaces in 3-dimensional Lorentzian spaceforms 217
金城 就実 (Shumi KINJO) 信州大学大学院理工学系研究科数理・自然情報科学専攻
A 型・D 型 Dynkin 図形に付随した S^3 の $\mathbb{R}^4$ へのはめ込み 221

八木 潤 (Jun YAGI) 高知大学理学部
5-membered ringed chains のなす配置空間のトポロジー 225

• パラレルセッション (会場 D)

加瀬 遼一 (Ryoichi KASE) 大阪大学情報科学研究科
道代数上の前射影傾加群のなす半順序集合について 231

穂坂 秀昭 (Hideaki HOSAKA) 東京大学大学院数理科学研究科
Littlewood-Richardson 係数にまつわる組合せ論 235

池田 創一 (Soichi IKEDA) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
解析数論にあらわれる関数方程式 239

松岡 謙晶 (Kaneaki MATSUOKA) 名古屋大学多元数理科学研究科
Riemann ゼータ関数と多重ゼータ関数 243

閔 正媛 (Jeongwon MIN) 東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻
有限群のウィッテンゼータ関数とウィッテン L-関数について 247

小西 正秀 (Masahide KONISHI) 名古屋大学多元数理科学研究科
$A^{(1)}_{n-1}$ 型巡回 KLR 代数の分類 251

足立 崇英 (Takahide ADACHI) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Triangulations and τ-tilting modules 255

中島 秀斗 (Hideto NAKASHIMA) 九州大学大学院数理学府数理学専攻
等質開凸錐の基本相対不変式の決定 259

源嶋 孝太 (Kouta GEJIMA) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
二次の複素特殊線形群上の新谷関数と Heun の方程式 263

平島 拓真 (Takuma HIRASHIMA) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Newton polygon を用いた類数の可除性問題について 267

スリアジャヤ アデ イルマ 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
(Ade Irma SURIAJAYA)
On the Zeros of the k-th Derivative of the Riemann Zeta Function under the Riemann Hypothesis . 271

佐藤 一樹 (Kazuki SATO) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
4 変数三次同次式の有理数解について 275

光明 新 (Arata KOMYO) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
Character Variety の混合ホッジ構造について 279

• ポスターセッション (会場 E)

小川 駿 (Shun OGAWA) 京都大学大学院情報学研究科
遷移線形化の手法を用いた非線形応答理論 285

金川 哲也 (Tetsuya KANAGAWA) 東京大学工学系研究科機械工学専攻
非線形波動理論に基づく気泡流中の音響波の系統的理解 289

坂本 真 (Makoto SAKAMOTO) 室蘭工業大学大学院工学研究科数理システム工学専攻
有限体 $\mathbb{F}_p$ 上定義された楕円曲線の $\mathbb{F}_p$ 有理点群の構造 293

田端 亮　(Ryo TABATA)　広島大学大学院理学研究科数学専攻
半正値エルミート行列上の Generalized Matrix Functions の不等式 297

寺田 知幸　(Tomoyuki TERADA)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
時間周期項を加えた FitzHugh-Nagumo 方程式系の自己複製ダイナミクスについて 301

船川 大樹　(Daiju FUNAKAWA)　北海道大学大学院理学院数学専攻
特異摂動の入った Dereziński-Gèrard モデルの解析 305

矢城 信吾　(Shingo YASHIRO)　九州大学数理学府
Fat point の極小自由分解について 309

若杉 勇太　(Yuta WAKASUGI)　大阪大学大学院・理学研究科・数学専攻
On diffusion phenomena for the linear wave equation with space-dependent damping 313

和田 和幸　(Kazuyuki WADA)　北海道大学大学院理学院数学専攻
複素スカラー場が自己相互作用する系における基底状態 317

渡邊 隆子　(Takako WATANABE)　お茶の水女子大学大学院　人間文化創成科学研究科
理学専攻　物理科学領域
一点位相付量子ウォークの極限定理 321

世話人：　黒田匡迪 (代表)　後藤良彰　佐々木克真
二口伸一郎　船川大樹　山下達也　和田和幸

Schedule

3月3日 (月)

9:50-10:00	開会			
10:00-11:00	永幡 裕 (数理)			
11:20-12:20	石田 敦英 (解析)			
12:20-14:00	昼食			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
14:00-14:30	布田 徹 (解析)	土田 旭 (幾何)	内藤 貴仁 (幾何)	加瀬 遼一 (代数)
14:50-15:20	相原 祐太 (解析)	加葉田 雄太朗 (幾何)	原口 忠之 (幾何)	穂坂 秀昭 (代数)
15:40-16:10	二口 伸一郎 (解析)	本多 俊一 (幾何)	岡崎 建太 (幾何)	池田 創一 (解析)
16:30-17:00	日高 建 (解析)	嶺山 良介 (幾何)	塚本 靖之 (幾何)	松岡 謙晶 (解析)
17:20-17:50	川本 昌紀 (解析)	野口 朗 (解析)	野口 和範 (幾何)	閔 正媛 (代数)

3月4日 (火)

10:00-11:00	只野 誉 (幾何)			
11:20-12:20	縫田 光司 (数理)			
12:20-14:00	昼食			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
14:00-14:30	高橋 剛 (解析)	山本 健 (数理)	橋爪 惠 (幾何)	小西 正秀 (代数)
14:50-15:20	可香谷 隆 (解析)	弓林 司 (数理)	高岡 邦行 (幾何)	足立 崇英 (代数)
15:40-16:10	渡辺 朋成 (解析)	佐々木 多希子 (解析)	山口 崇幸 (幾何)	中島 秀斗 (代数)
16:30-18:00	ポスターセッション (会場 E)			

3月5日 (水)

10:00-11:00	奥田 喬之 (幾何)			
11:20-12:20	横山 俊一 (代数)			
12:20-14:00	昼食			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
14:00-14:30	佐野 めぐみ (解析)	畑中 美帆 (幾何)	瀬戸 樹 (幾何)	源嶋 孝太 (代数)
14:50-15:20	内免 大輔 (解析)	十鳥 健太 (幾何)	安本 真士 (幾何)	平島 拓真 (代数)
15:40-16:10	高橋 甫宗 (解析)	大城 和秀 (解析)	緒方 勇太 (幾何)	Suriajaya Ade Irma (代数)
16:30-17:00	李 正勲 (解析)	冨澤 佑季乃 (解析)	金城 就実 (幾何)	佐藤 一樹 (代数)
17:20-17:50	楢崎 政宏 (解析)	関坂 歩幹 (数理)	八木 潤 (幾何)	光明 新 (代数)
18:00-20:00	懇親会			

3月6日 (木)

10:00-11:00	河田 貴久 (代数)
11:20-12:20	坂田 繁洋 (解析)
12:20-12:30	閉会

シングルセッション
会場Ａ

タンパクの時系列から得られた Markov 連鎖の解析に向けて:

グラフの分割とクラスタリングで定義する複雑な化学反応における状態とその時間階層構造

永幡 裕(Yutaka NAGAHATA) 北海道大学生命科学院

本研究はたんぱく質の一分子実験から得られたたんぱく質内二点間距離の時系列から抽出した Markov 連鎖の解析を目的としている。特にまだ定式化されていない、たんぱく質を含む複雑な分子において「化学反応における状態」をどう定義すべきかの考察を、グラフ理論を用いて行う。

~~キーワード:ハミルトン力学系での~~化学反応、組み合わせ爆発、マルコフ連鎖の階層的クラスタリング、グラフでのスペクトル理論

目次

第0章 数学と科学の違い

第1章 遷移状態理論

第2章 グラフ理論

第3章 Markov 連鎖

第4章 Perron-Frobenius 定理

第5章 The most distinct bipartition (min-conductance cut)

第0章 数学と科学の違い

数学と科学はどちらかが他方を包含するという関係ではない。数学にとって科学は難問を提供してくれる分野である。他方、科学にとって数学は現象を理解する際に用いる道具である。例えば科学では、異なる階層で得られた情報を総合して問題を問いたり、明確に定義されていない演算を行ったりするが、数学的に見れば論理的な飛躍である。

科学的な考察は、唯物論的世界観に基づいて現象から得られた統計上優位な結果を妥当な形で表現し理解する事が目的だと考えられる。従って、統計上優位な結果を妥当な形で表現できる数式は科学的には正しく、理論からの演繹が使えても実験からの帰納が完全な形で使えないため、基礎方程式からの展開に多少の飛躍が入っても問題としない。加えて、実験結果には必ず誤差が伴い、かつ高々有限回の測定しか出来ないため、基礎方程式と現象が必要十分であるとはいえない。

従って、我々のいる世界が何人にとっても同じただ一つの世界で、我々の用いている論理や数学を応用したり発展させたりすることで理解可能であるという前提の下、そうした自然現象に論理的な正当性を外挿することで、科学的な考察では自然現象の妥当な理解をしているという点をご理解願いたい。

従って、自然科学者の扱う数式は、自然現象を妥当な形で説明するための道具でなくてはいけないが、その論理に飛躍がある場合があることをご了承願いたい。

第1章 遷移状態理論

本章では、本研究で取り組む問題の出発点である一次の反応速度式について、反応速度定数を見

積もる標準的な理論である遷移状態理論の説明を通して解説する。

定義1．1　一次の反応速度式

反応$i \to j$への反応速度定数:$k_{ij} \in \mathbb{R}^+$、分子Xの異性体 $X_1, \dots, X_N$ に対して時刻 t でのXの濃度 $[X_j](t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$からなる濃度ベクトル$[X] = ([X_1], \dots, [X_N])$に対して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[X] = [X]K$$

を一次の反応速度式と呼ぶ。

ただし、$M = K - \sum_i \mathrm{diag}[k_{1i}, k_{2i}, \dots, k_{Ni}]$, $(K)_{ij} = k_{ji}$。

この定義を用いると、

$[X](t + \Delta t) = \exp[\Delta t M]\,[X](t)$ より後述する Markov 連鎖の遷移確率行列が、次のように書ける $\mathcal{P}_{\Delta t} \coloneqq \exp[\Delta t M]$。

定義1．2　化学反応速度式

$$\mathrm{Re} \underset{k_{\mathrm{Pr-Re}}}{\overset{k_{\mathrm{Re-Pr}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Pr}$$

について考える。ここで、Re, Pr はそれぞれ*反応系*、*生成系*と呼び、$k_{\mathrm{Re-Pr}}$, $k_{\mathrm{Pr-Re}} \in \mathbb{R}^+$ はそれぞれ反応系から生成系、生成系から反応系への*反応速度定数*である。

これら生成系、反応系は例えば異なる2つの分子の構造（かたち）や結合、解離状態を表していると考えられている。

この反応速度式に対応する微分方程式は次のとおりである。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}[\mathrm{Re}]\\ [\mathrm{Pr}]\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}[\mathrm{Re}]\\ [\mathrm{Pr}]\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix}-k_{\mathrm{Re-Pr}} & k_{\mathrm{Pr-Re}}\\ k_{\mathrm{Re-Pr}} & -k_{\mathrm{Pr-Re}}\end{pmatrix}$$

ここで、$[X](t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$は時刻 t でのXの濃度である。

定義1．3　遷移状態

先ほどの反応速度式に、*遷移状態*と呼ばれる中間状態を人工的に定義する。

$$\mathrm{Re} \underset{k_{\mathrm{TS-Re}}}{\overset{k_{\mathrm{Re-TS}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{TS} \underset{k_{\mathrm{Pr-TS}}}{\overset{k_{\mathrm{TS-Pr}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Pr}$$

この遷移状態を使って反応速度定数$k_{\mathrm{Pr-Re}}$を見積もる理論を遷移状態理論と呼ぶ。

遷移状態理論における主定理を示すために、準平衡仮説について言及しておく

定義1．4　準平衡

次の条件が成り立つときを準平衡と呼ぶ。

$$k_{\mathrm{Re-TS}} \ll k_{\mathrm{TS-Re}}, k_{\mathrm{Pr-TS}} \cong 0, [\mathrm{TS}](0)$$

定理1．5　遷移状態理論

準平衡ならば次の関係が成り立つ

$$k_{\mathrm{Re-Pr}} = \frac{k_{\mathrm{TS-Pr}}[\mathrm{TS}]_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{Re}\to\mathrm{Pr}}}{[\mathrm{Re}]_{\mathrm{eq}}} \cong \frac{k_{\mathrm{TS-Pr}}[\mathrm{TS}]^{\mathrm{Re}\to\mathrm{Pr}}(t)}{[\mathrm{Re}](t)}$$

ただし$[\mathrm{X}]_{\mathrm{eq}}$は平衡状態（$\mathrm{d}[\mathrm{X}]/\mathrm{d}t = 0$、安定固定点）での[X]を指す。$[\mathrm{X}]^{\mathrm{Re}\to\mathrm{Pr}}$は$k_{\mathrm{Pr-TS}} \cong 0$に起因する項で$k_{\mathrm{Pr-TS}} = 0$とした際の[X]である。

式を見れば分かるように、準平衡仮定を用いるにしても、$[\mathrm{TS}]^{\mathrm{Re}\to\mathrm{Pr}}(t)$や$[\mathrm{Re}](t)$が平衡状態とほぼ同じ値をとっていなくてはならない。遷移状態理論は従って、平衡状態である準平衡仮説が成立する

系において用いられる理論である。具体的な計算には統計力学を用いる。

$k_{\mathrm{TS-Pr}}[\mathrm{TS}]^{\mathrm{Re}\to\mathrm{Pr}}$は反応系から生成系への確率的な流れ(flux)であり、[Re]は反応系での周辺確率であるので原点$q^{\ddagger}=0$を遷移状態とする、一次元の反応座標$q^{\ddagger}$を仮定して

$$(k_{\mathrm{TS-Pr}}[\mathrm{TS}])(E)$$
$$=\frac{1}{Z}\int\dots\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{h^N}\delta(H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})-E)J(p^{\ddagger},q^{\ddagger})\boldsymbol{\chi}(p^{\ddagger},q^{\ddagger})$$
$$[\mathrm{Re}](E)=\frac{1}{Z}\int\dots\int_{\mathrm{Re}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{h^N}\delta(H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})-E)$$

と計算する。

ただし$J(p,q)=\delta[q^{\ddagger}]\nabla q^{\ddagger}\cdot\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{m}},\chi=\Theta(p^{\ddagger})$で、

$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$はハミルトニアン、$E$はエネルギー、$h$はプランク定数、$N$は自由度、$q$は座標、$p$は$q$に正準共役な運動量、$Z$は分配関数である。紙面の都合上、古典力学・統計力学の詳細には立ち入らないが、$\delta(H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})-E)/(\mathrm{Z}h^N)$を密度関数だと考えて頂ければ良い。

第2章　グラフ理論

一次の反応速度式を Markov 連鎖として考察する前に、準備としてグラフ理論について触れておく。

定義2．1　グラフ

高々加算個の要素からなる集合を*点集合* $V\coloneqq\{1,2,\dots\}$とする。ある点とある点を繋ぐ集合を*枝集合* $E=V\times V$ とする。この点と枝からなる集合を$G=(V,E)$ を*グラフ*と呼ぶ。

定義2．2　有向・無向グラフ

グラフ $G=(V,E)$ が $(i,j),(j,i)\in E$について $(i,j)=(j,i)$ ならば*無向グラフ*、$(i,j)\neq(j,i)$ならば*有向グラフ*と呼ぶ。

定義2．3　グラフの重み

$w\colon 2^V\times 2^V\to[0,\infty)$ ただし、$\forall R,S\in 2^V,\ \forall r\in R,\ \forall s\in S$ に対して $\sum_{r\in R,s\in S}w[\{r\},\{s\}]=w[R,S]$として定義した w を*枝の重み*、w を考慮するグラフを*重み付きグラフ*と呼ぶ。

以下では $w[\{r\},\{s\}]$ を $w[r,s]$ と略記する。

定理2．4　wは測度

$2^V\times 2^V$は明らかにσ-加法族であり、wは定義2．3より非負かつ加算加法性を持つので$(2^V\times 2^V,w)$は測度である。

定義2．5　グラフの道

特に、$w[i,j]=0$ であれば枝 $(i,j)\in E$ は存在しないものとする。点 $i_1,\dots,i_{k+1}\in V$ に対して枝 $(i_1,i_2),\dots,(i_k,i_{k+1})$ が存在するとき $i_1,(i_1,i_2),i_2,\dots,(i_k,i_{k+1}),i_{k+1}$ を長さ k の道という。

定義2．6　強連結なグラフ

与えられた(部分)グラフ任意の2点 i,j 間に道が存在する場合、そのグラフは*強連結*であるという。

この強連結性はMarkov連鎖の時間発展を理解す

る上で非常に重要な概念となる。

第3章　Markov 連鎖

前述したように一次の反応速度式は Markov 連鎖として書きなおすことが出来る。本章ではその基本的な点について述べる。

点集合：$V = \{1, \dots, n\}$

時刻：$t \in T(\subset \mathbb{R})$

時間刻み幅：$\Delta t \in \mathbb{R}$

とする。このとき$\forall t \in T$に対して集合族 $\{V_t\}_{t\in T}$ を考える。

定義3．1　確率測度（結合確率）

$p_{t,\Delta t}: 2^{V_{t+\Delta t}} \times 2^{V_t} \to [0:1]$ s.t. $p_{t,\Delta t}[V_{t+\Delta t}, V_t] = 1$

となる確率測度を Markov 連鎖の結合確率と呼ぶこととする。以下では便宜的に$R_{t+\Delta t} \subset V_{t+\Delta t}, S_t \subset V_t$に対して$p_{t,\Delta t}[R,S] \coloneqq p_{t,\Delta t}[R_{t+\Delta t}, S_t]$,

$p_{t,\Delta t}[i,j] \coloneqq p_{t,\Delta t}[\{i\},\{j\}]$

と書くこととする。但し、定義から明らかであるが

$p_{t,\Delta t}[R,S] = \sum_{i\in R, j\in S} p_{t,\Delta t}[i,j]$

定義3．2　遷移確率行列と周辺確率

周辺確率：$p_t[S] \coloneqq p_{t,\Delta t}[S,V] = p_{t-\Delta t,\Delta t}[V,S]$

条件付き確率：$p_{\Delta t}[R|S](t) \coloneqq p_{t,\Delta t}[R,S]/p_t[S]$

とし、$\forall t \in T, \forall i \in V_t, \forall j \in V_{t+\Delta t}$に対して

$\exists p_{\Delta t}(i|j) \in [0:1]$で

$$p_{\Delta t}[i|j](t) = p_{\Delta t}(i|j)$$

である事をMarkov性と呼びVの元をMarkov 状態と呼ぶ。このとき条件付き確率を $p_{\Delta t}[i|j]$ と略記し上記が成立する場合のみ扱う。$(\mathcal{P}_{\Delta t})_{i,j} \coloneqq p_{\Delta t}[j|i]$を遷移確率行列と呼ぶ。

（本来は測度論に基づいて条件付き確率を考える場合には正則条件付き確率について言及すべきであるが、本題からそれるため略す）

なお、定義から明らかであるが $\forall t \in T, p_t[V] = 1$, $\forall t \in T, \forall j \in V_t, p_{\Delta t}[V|j] = 1$

定義3．3　Markov 連鎖

Markov 状態ベクトル：$p_t = (p_t[1], \dots, p_t[n])$

のΔt時間発展を次の様に定義する。

$$p_t \mathcal{P}_{\Delta t} = p_{t+\Delta t}$$

第4章　Perron-Frobenius 定理

この章では、遷移確率行列の一般的な場合である非負行列Aに関して考察する。まずわかり易いように簡単な例から始める。$\rho(A)$を行列Aのスペクトル半径（最大固有値）とする。

定義4．1　既約行列と可約行列

非負行列 A が既約であるとは A を k 乗した際の成分 $a_{ij}^{(k)} = (A^k)_{i,j}$ について任意の i,j に対して $a_{ij}^{(k)} > 0$ となる k が存在する場合を指す。

既約行列 A_{11}, A_{21} と零行列 O によって次の様に表現される非負行列

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & * \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

について考える。このとき、

$$A^n = \begin{pmatrix} A_{11}^n & * \\ O & A_{22}^n \end{pmatrix}$$

であるので A は既約行列ではない。このように既約行列ではない行列を可約行列とよぶ。

この既約行列は重み付き有向グラフ G における強連結性を考えるとより直感的に理解できる。

定理4．2　既約行列と強連結なグラフ

グラフの向き付き枝の重みで表現される行列が既約であることと、そのグラフが強連結であることは必要十分である。

グラフの向き付き枝の重みは先の行列 A で表現されるとする。このときそのグラフは強連結ではない。

従って、既約でない行列によって表現されるグラフは強連結ではないので、強連結ならば既約である。

次の非負行列 A'

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

を考える。このとき A_{21}, A_{12} がそれぞれ少なくとも1つ非負な成分を持つとすると、A'で表現されるグラフは強連結である。

既約ならば A_{21}, A_{12} がそれぞれ少なくとも1つ非負な成分を持つので、既約ならば強連結である。

一般の場合には適当な直交行列でブロック上三角行列（既約標準形）に置換した行列に対して同様の議論をすればよい。

補題4．3　準備

n次正方非負行列Aと正数μに対して次の2つの主張は等価である。

(i)　$(\mu I_n - A)\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ を満たす正ベクトル$\boldsymbol{x}$が存在する。

(ii)　$\rho(A) < \mu$

定理4．4　Perron-Frobenius の定理

既約なn次非負正方行列Aに対して次の3つが成り立つ

(1)　$\rho(A) > 0$で、Aは正の固有値$\rho(A)$とそれに対応する正の固有ベクトルをもつ

(2)　$A \geq B (\geq O_n)$なる任意のn次正方非負行列Bに対して、$\rho(A) \geq \rho(B)$。等号$\rho(A) = \rho(B)$は$A = B$のとき。

(3)　$\rho(A)$はAの単純な固有値である。

定理4．5　（弱い）Gershgorin の定理

ある$p \in \mathbb{N}$にたいして行列A^pの固有値 λ^pはA^pの対角要素が全て正ならばn個の Gershgorin の円

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - b_{ii}| < r_i\}$$

のどれかに含まれる

ただし、

$$r_i = \sum_{j \neq i} b_{ij} = \sum_j b_{ij} - b_{ii} = \rho(A)^p - b_{ii}$$

$$b_{ij} \coloneqq (B)_{ij} \coloneqq (\mathrm{diag}[x]^{-1} A^p \, \mathrm{diag}[x])_{ij}$$

またこのとき、行列Aの固有値λは$\lambda^p = \rho(A)^p$

（$p = 1$のときは単純）か$|\lambda| < \rho(A)$のいずれか。

定理4．6　行列の周期

A^pの対角要素が全て正となるpが存在しないとき、$|\lambda| < \rho(A)$でなければ、$|\lambda|^p = \rho(A)^p$すなわち、行列の周期$\sigma \in \mathbb{N}$が存在して

$\lambda = \zeta^k \rho(A)$ $(\zeta = \exp[2\pi i/\sigma])$

定義4．7　確率行列

$\sum_j a_{ij} = 1$ s.t. $a_{ij} \coloneqq (A)_{ij}$となる行列を確立行列である。（遷移確率行列$\mathcal{P}_{\Delta t}$は確率行列である）

定理4．8　定常分布

強連結な遷移確率行列$\mathcal{P}_{\Delta t}$のペロン・フロベニウス根$\rho(\mathcal{P}_{\Delta t})$は$\rho(\mathcal{P}_{\Delta t}) = 1$でそれに対応するペロン・フロベニウスベクトルは定常状態を表す周辺確率分布$p_t = p_\infty$に対応する

定理4．9　Markov 連鎖部分グラフの PF 根

$\mathcal{P}_{\Delta t}$で表される Markov 連鎖の部分グラフに対応する対角ブロック$\mathcal{P}_{\Delta t}^{\mathrm{sub}}$が強連結ならば、ペロン・フロベニウス根$\rho\left(\mathcal{P}_{\Delta t}^{\mathrm{sub}}\right)$は$0 < \rho\left(\mathcal{P}_{\Delta t}^{\mathrm{sub}}\right) < 1$ を満たす。

第5章　The most distinct bipartition (min-conductance cut)

マルコフ連鎖の最離2分割 (MDB: most distinct bipartition)アルゴリズムを用いた探索を考える。ここで、「互いにもっとも行き来しにくい」を次の式で表す。

定義5．1　コンダクタンス

$$\phi[S] \coloneqq \max\left\{\frac{p_{t,\Delta t}[S, S^{\mathrm{c}}]}{p_t[S^{\mathrm{c}}]}, \frac{p_{t,\Delta t}[S^{\mathrm{c}}, S]}{p_t[S]}\right\}$$

をコンダクタンスと呼ぶ

定義5．2　Cheeger 定数

$$h[G] \coloneqq \min_{S \subset V} \phi[S]$$

この$h[G]$をグラフGの Cheeger 定数と呼ぶ。

この式は

$h[G] = \min_{S \subset V}[\max\{p_{\Delta t}[S|S^{\mathrm{c}}], p_{\Delta t}[S^{\mathrm{c}}|S]\}]$ と書き直す事もでき、「点部分集合Sとその補集合を互いに遷移する確率を両方共が下がるようにSを決める」と解釈することが出来る。

このSを*二分決定木*を用いて探索する方法について述べる。*二分決定木*とは、各点がひとつの入枝とふたつの出枝からなっている*木*(任意の点間に唯一つ路があるグラフ）で本稿では*根*（始点）が1つの場合を考える。

定義5．3　部分グラフ

$G_S(S, S \times S)$を頂点集合Sによって定まる部分グラフと呼ぶ。

定義5．4　2分割(bipartition)

$G(V, E)$を頂点集合Sを用いて$G_S(S, S \times S)$と$G_S(S^{\mathrm{c}}, S^{\mathrm{c}} \times S^{\mathrm{c}})$に分けることをグラフ$G$の点部分集合$S$によって定まる分割と呼ぶ。

与えられたグラフの点を分割する全ての場合を、二分決定木を用いて探索し、MDB を定めるSを決める。

定義5．5　Shannon の分解則

Boole 関数族 $B_{n,m} = \{f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m\}$とする。

$\forall f_k \in B_{k,k+1}$，$\forall a^{(k)} \in \{0,1\}^k$，$\exists a^{(1)} \in \{0,1\}$に対

して

$$f_{k+1}\left(a^{(k+1)}\right) = a^{(1)} f_k\left(a^{(k)}\right) + \bar{a}^{(1)} f_k\left(a^{(k)}\right)$$

ただし+は Boolean OR

定義5．6　入次数と出次数

有向グラフの各点において、有向枝がその点を指している数を*入次数*、その点から他の点を指している有向枝の数を*出次数*という。

定義5．7　根付き有向木

根（入次数0の点）から任意の点に唯一つだけ路が存在する有向グラフ $G = (V, E)$を*根付き有向木*と呼ぶ。

定義5．8　二分木決定木

葉（入次数1の点）を除く各点が有限個の変数集合$X = \{x_1, x_2, \dots\}$ で表され、出次数2の根と{0,1}の元で表される葉を除く各点が入次数1と出次数2をもつ根付き有向木

定義5．9　二分決定木の深さ

二分決定木は葉を含めた同じ*深さ*（根から各点への路の長さ）kの点それぞれが$f_k \in B_{k,k+1}$の取りうる値に対応する。また葉のもつ深さのうち最大のものを*二分決定木の深さ*と呼ぶ。

N点からなるグラフ任意の二分割(bipartition)は、深さNの二分決定木の各葉で表現できる。

定義5．10　有向グラフのラプラシアン

F. Chung, Annals of Combinatorics 9, 1 (2005). で導入された有向グラフのラプラシアンは

$$\mathcal{L} = I - \frac{1}{2}\left(\pi^{\frac{1}{2}}\mathcal{P}_{\Delta t}\pi^{-\frac{1}{2}} - \left(\pi^{\frac{1}{2}}\mathcal{P}_{\Delta t}\pi^{-\frac{1}{2}}\right)^T\right)$$

定義5．11　heuristics min-conductance

ラプラシアンの固有ベクトル

$$v_1 = (v_1[1], v_1[2], \dots, v_1[N])$$

を次の様に並べ直す

$\tilde{v}_1 = (\tilde{v}_1[i_1], v_1[i_2], \dots, v_1[i_N])$

s.t. $|\tilde{v}_1[i_1]| \le |v_1[i_2]| \le \cdots \le |v_1[i_N]|$

この順序を用いて表される

$$h_{\text{approx}}(G) = \min_k \frac{p[C_k, C_k^c]}{\min\{p[C_k], p[C_k^c]\}}$$

s.t. $C_k = \{i_1, \dots, i_k\}$

を heuristics min-conductance と呼ぶ。

定義5．12　アルゴリズム用の諸定義

$\mathcal{V}_k \coloneqq \{1, \dots, k\} \subset \mathcal{V}$,

$\mathcal{V}_k^c \coloneqq \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_k = \{k+1, \dots, N\}$,

$S_k \subset \mathcal{V}_k$ s.t $S_k \subset S_{k+1}$,

$S_k^c \coloneqq \mathcal{V}_k \setminus S_k$,

定理5．13　コンダクタンスの下限

$\psi(S_k) \coloneqq$

$$\max\left\{\frac{p[S_k^c, S_k]}{\min\{1/2\,,\, 1 - p[S_k^c]\}}, \frac{p[S_k, S_k^c]}{\min\{1/2\,, 1 - p[S_k]\}}\right\}$$

とすると$\psi(S_k) \le \phi(S_N)$（等号成立は$k = N$のとき）。従って

$$h_{approx}[G] < \psi(S_k)$$

ならば$h[G] \leq h_{approx}[G]$よりS_NはMDBではない。この定理を*枝刈り*(2分決定木探索停止の基準)に用いる。

5. 14 計算結果

一般性を失わないように、ペロン・フロベニウス根(周辺確率の定常分布)p_∞を一般性を失わないように次の様に定める。

$$p_\infty[1] \geq p_\infty[2] \geq \cdots \geq p_\infty[N]$$

このとき、先の二分決定木による探索を行うと、$h_{approx}[G]$より小さい値の$\phi(S)$をもつSを全て探索し終えるまでに通った枝の本数は図で与えられる。

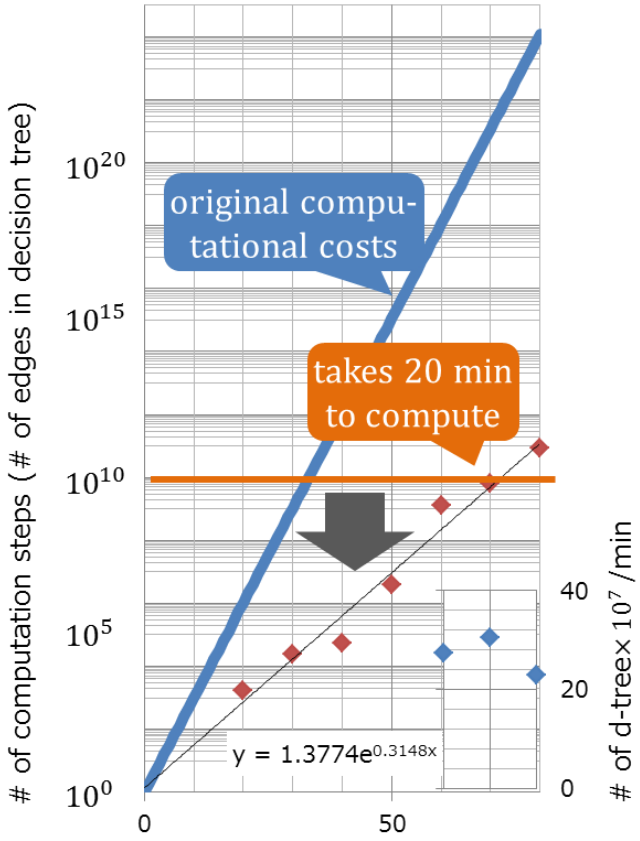


図　青線は全探索、赤い点は枝刈りで探索した二分木の枝の数。

参考文献

ハミルトン系での化学反応:

昨年のテクニカルレポートを読んで下さい。

第1章　遷移状態理論

山崎勝義, 遷移状態理論の基本仮定－遷移状態理論式導出過程の理解－, 第二版第四刷 (漁火書店, 1999)

幸田　清一郎　編, 大学院講義物理化学Ⅱ　第2版 (東京化学同人 2011)

第2章　グラフ理論

藤重悟、グラフ・ネットワーク・組合せ論 (共立出版, 2002)

特に第一章

第3章　Markov 連鎖

正則条件付き確率:

吉田朋広、数理統計学　第二版(朝倉書店 2007)

第4章　Perron-Frobenius 定理

伊理正夫、一般線形代数(岩波書店, 2003)

特に§5. 1、§7. 1

第5章　The most distinct bipartition

min-conductance cut と有向 Markov 連鎖のスペクトル理論

R. Kannan, S. Vempala, and A. Vetta, J. ACM **51**, 497–515 (2004).

F. Chung, Ann. Comb. **9**, 1–19 (2005).

二分決定木

I. Wegener, Branching Programs and Binary Decision Diagrams: Theory and Applications (SIAM 1987)

Scattering problems on the Schrödinger equation for a repulsive Hamiltonian

石田　敦英（追手門学院大学）†

概 要

量子力学における数学的（2 体）散乱理論とはどのようなものか．ということをテーマに，基礎方程式である Schrödinger 方程式から始め，自由粒子の場合や Stark 効果の場合と比較しながら repulsive Hamiltonian と呼ばれる系について，短距離型と長距離型というポテンシャルのクラスの閾値や，修正波動作用素による長距離散乱について解説する．

1 Schrödinger 方程式

$x \in \mathbb{R}^n$，$t \in \mathbb{R}$ として，次のような $u(x,t)$ について方程式を考えます．

$$i\hbar\partial_t u(x,t) = -\hbar^2 \triangle u(x,t)/(2m) + V(x)u(x,t) \tag{1.1}$$

この方程式は，n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ の中を質量 m の粒子が相互作用ポテンシャル $V(x)$ の影響を受けながら運動している系を記述するもので Schrödinger 方程式と呼ばれます．ここで，Plank 定数を h として $\hbar = h/2\pi$，$\triangle = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$ は Laplacian です．

この方程式を解きたいのですが容易には解けません．そこで $V = 0$ の場合に解くことを考えます．また簡単のため $u(x,t)$ は x の関数として Schwartz の急減少関数空間 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ に属するとしておきます．改めて方程式を書くと

$$i\hbar\partial_t u(x,t) = -\hbar^2 \triangle u(x,t)/(2m) \tag{1.2}$$

です．粒子がポテンシャルの影響を受けずに自由に運動する場合です．まず関数 $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ の Fourier 変換 $\mathscr{F}\phi(\xi)$ と逆 Fourier 変換 $\mathscr{F}^*\phi(x)$ を以下で定めます．

$$\mathscr{F}\phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)dx/(2\pi)^{n/2}, \quad \mathscr{F}^*\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\phi(\xi)d\xi/(2\pi)^{n/2}. \tag{1.3}$$

さて，(1.2) の両辺を Fourier 変換してみます．それを見るため $\partial_{x_1}u(x,t)$ を Fourier 変換してみましょう．$u(\cdot,t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ であるから，部分積分により

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\partial_{x_1}u)(\xi,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\partial_{x_1}u(x,t)dx/(2\pi)^{n/2} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}e^{-ix\cdot\xi}u(x,t)dx/(2\pi)^{n/2} = i\xi_1\mathscr{F}u(\xi,t).\end{aligned} \tag{1.4}$$

つまり，Fourier 変換によって微分という作用 ∂_{x_1} が多項式 ξ_1 を掛けるという作用に変わりました．よって (1.2) の Fourier 変換は

$$i\hbar\partial_t\mathscr{F}u(\xi,t) = -\hbar^2\xi^2\mathscr{F}u(\xi,t)/(2m) \tag{1.5}$$

† 〒 567-8502 大阪府茨木市西安威 2-1-15 追手門学院大学経済学部経済学科
e-mail: a-ishida@res.otemon.ac.jp

となり，これは t についての常微分方程式です．初期状態を $u(x,0)=u_0(x)$ として容易に解けます．

$$\mathscr{F}u(\xi,t)=e^{-i\hbar t\xi^2/(2m)}\mathscr{F}u_0(\xi). \tag{1.6}$$

さらに，以下の Fourier 反転公式（今の場合は第 1 式目）

$$\mathscr{F}^*\mathscr{F}\phi(\xi)=\phi(x),\quad \mathscr{F}\mathscr{F}^*\phi(x)=\phi(\xi) \tag{1.7}$$

を用いると，積分の順序変更（ができるとして）と複素積分定理によって

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\hbar t\xi^2/(2m)+ix\cdot\xi}\mathscr{F}u_0(\xi)d\xi/(2\pi)^{n/2}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\hbar t\xi^2/(2m)+ix\cdot\xi+i\xi\cdot y}u_0(y)dyd\xi/(2\pi)^n\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\hbar t(\xi-m(x-y)/(\hbar t))^2}d\xi\right)e^{-m(x-y)^2/(2i\hbar t)}u_0(y)dy/(2\pi)^n\\
&= (m/(2\pi i\hbar t))^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-m(x-y)^2/(2i\hbar t)}u_0(y)dy
\end{aligned} \tag{1.8}$$

と解くことができます．上の計算は形式的ではありますが，積分の順序変更も含めてきちんと正当化されます．今は $V=0$ であったので計算することができました，しかし $V\neq 0$ の場合はこれほど単純ではありません．そこで，より一般的な Scrödinger 方程式の解を扱うためにもう少し抽象的な概念を導入しましょう．

方程式 (1.1) を Hilbert 空間である関数空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ で考えます．方程式 (1.1) の右辺の作用素を H と書くこととします．すなわち

$$Hu(t)=-\triangle u(t)+Vu(t). \tag{1.9}$$

H は Hamiltonian と呼ばれ古典力学の全エネルギーに対応するものです．時刻 t に対して関数 $u(t)$ が決まるという意味で変数 x は省略します．また，物理定数は全て省略しました．(1.1) は

$$i\partial_t u(t)=Hu(t)\quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^n) \tag{1.10}$$

と単純に書き直されました．ここで，作用素 H が自己共役[1]という性質を持つとします．すると H に対応する単位の分解 E_H（測度）が存在し H は次のように積分で表現されます．

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE_H(\lambda). \tag{1.11}$$

さらに，この表現を用いて作用素の関数 $f(H)$ を定めることができます．

$$f(H)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dE_H(\lambda). \tag{1.12}$$

これらの積分による表現はスペクトル分解定理と呼ばれており，この定理によって (1.10) の解を求めることができるのです．(1.12) の f として $f(\lambda)=e^{-it\lambda}$ を適用してみます．つまり

$$e^{-itH}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\lambda}dE_H(\lambda) \tag{1.13}$$

[1]物理の本では Hermite 対称と言われる性質であるが，数学では作用素の定義域の条件が重要となる．本稿では定義域の問題には触れないこととする．

です．e^{-itH} は強連続 unitary 群といい

$$u(t) = e^{-itH}u_0 \tag{1.14}$$

と置くと，方程式 (1.10) で初期条件を $u(0) = u_0$ としたときの解になっています．形式的に e^{-itH} を単なる指数関数と思えば

$$i\partial_t e^{-itH} = He^{-itH}, \quad e^{-itH}\big|_{t=0} = 1 \tag{1.15}$$

であるから，この記法の整合性が分かると思います．注意して頂きたいのは，上で述べた議論で H に必要な条件は，自己共役であるということだけです．つまり $L^2(\mathbb{R}^n)$ で自己共役な作用素についての Schrödinger 方程式の解は，必ず強連続 unitary 群で表現できるのです[2]．本稿では自己共役性については詳しく述べませんが，この意味でも，ある作用素が自己共役であるかどうかを判定することはそれだけでも重要なテーマです．

2　波動作用素と漸近完全性

ここからは前節で解いた Schrödinger 方程式の時間発展作用素 e^{-itH} を用いて，散乱問題を考えます．相互作用ポテンシャル V は遠方でその値が消えていくもの，$V(x) \to 0(|x| \to \infty)$ とします．また，free Hamiltonian を $H_0 = -\triangle$ と書くことにします．$H = H_0 + V$ です．

(1.8) によれば，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |V(x)e^{-itH_0}u_0(x)|^2 dx \leqslant Ct^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |V(x)|^2 dx \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)|dy \right)^2 \tag{2.1}$$

です．よって，右辺の V や u_0 の積分が収束しているならば，時刻 t が十分大きいとき，L^2 ノルムの意味で

$$He^{-itH_0}u_0 = (H_0 + V)e^{-itH_0}u_0 \sim H_0 e^{-itH_0}u_0. \tag{2.2}$$

すなわち，$u(t) = e^{-itH_0}u_0$ は Schrödinger 方程式 (1.10) の近似的な解になっているように見えます．このことから，ある運動 $e^{-itH}u_+$ で $t \to \infty$ のとき $e^{-itH_0}u_0$ に近づくものが存在することが期待されます．式で書くと $e^{-itH}u_+ = e^{-itH_0}u_0 + o(1)$，つまり

$$u_+ = \lim_{t\to\infty} e^{itH}e^{-itH_0}u_0. \tag{2.3}$$

$t \to -\infty$ の時も同様に考え，この右辺の作用素

$$W^{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itH}e^{-itH_0} \tag{2.4}$$

を波動作用素と言います．この強極限の存在が意味することは，任意の初期状態 u_0 に対して，それを始状態とするような散乱状態[3]の存在，つまり散乱の可能性を示唆しているのです．

今度は逆に，$u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ が散乱状態であるとしましょう．散乱しているので，その時間発展 $e^{-itH}u$ は遠方に飛び去っているはずです．実際，$R > 0$ に対して

$$\int_{|x|<R} |e^{-itH}u(x)|^2 dx \to 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty \tag{2.5}$$

[2]Stone の定理として知られている．

[3]‘散乱状態’ ということを数学として正しく言うと，‘H の絶対連続部分空間’ である．また，$\mathrm{Range}\, W^{\pm} \subset$ {H の絶対連続部分空間 } が成り立つ．

が成り立ちます[4]．半径 R の有界な領域の粒子の存在確率は時刻が大きくなるにつれて 0 になる．ということ表しています．つまり粒子は遠方にしか存在しません．一方，ポテンシャル V は遠方では値を持たないとしていたので，$e^{-itH}u$ は H_0 にのみ従って運動していると考えられます．すなわち $t \to \infty$ のとき，ある u^+ によって $e^{-itH}u = e^{-itH_0}u^+ + o(1)$ なので，次の極限

$$u^+ = \lim_{t\to\infty} e^{itH_0}e^{-itH}u \tag{2.6}$$

が存在するように期待されます．この波動作用素とは逆向きの極限 (2.6) が存在すとき，漸近的に完全であると言います[5]．漸近的に完全であるなら，全ての散乱状態を e^{-itH_0} の振る舞いで近似出来るので，散乱状態について完全に理解したとも捉えられます．本稿では漸近完全性についてはこれ以上立ち入りませんが，一般に漸近完全性を証明することは波動作用素の存在を証明することよりもはるかに困難であり，数学的散乱理論の最重要テーマとなっています．

ここでは波動作用素 (2.4) の存在に焦点を当ててみます．これまではポテンシャル V は遠方で値が無いということしか述べませんでした．それでは一体どれくらいの速さの減衰が必要となるのでしょうか．これはよく知られており，具体的には

$$|V(x)| \leqslant C\langle x\rangle^{-\rho} \tag{2.7}$$

と表すと，$\rho > 1$ ならば (2.4) の存在が示されます．逆に $0 < \rho \leqslant 1$ なら一般には (2.4) は存在しません．$\rho > 1$ のとき V は短距離型と言い，$0 < \rho \leqslant 1$ のときは長距離型と言われます．閾値 1 がどこから出てくるのか．に答える前に，次の事実に注目しましょう．$u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して[6]

$$\int_1^\infty \|Ve^{-itH_0}u\|dt < \infty \tag{2.8}$$

であれば，(2.4) は存在する．これは Cook-Kuroda method と呼ばれ，簡単ではありますが，強極限の存在の証明に大変有用な手法です．実際，不等式

$$\|(e^{it_1H}e^{-it_1H0} - e^{it_2H}e^{-it_2H0})u\| = \|\int_{t_2}^{t_1} \partial_t(e^{itH}e^{-itH_0})udt\| \leqslant \int_{t_2}^{t_1} \|Ve^{-itH_0}u\|dt \tag{2.9}$$

で $t_1, t_2 \to \infty$ とすれば分かります．実は，自由粒子の系では，位置 x は t の 1 乗のオーダーで増大します．形式的に $x = t$ を代入すると

$$\|\langle x\rangle^{-\rho}e^{-itH_0}u\| = Ct^{-\rho}\|u\|. \tag{2.10}$$

これが t について可積分となるのは $\rho > 1$ のときです．この議論は波動作用素の存在の証明にはなっていませんが，閾値 1 の理解の 1 つと思って下さい．

3 Repulsive Hamiltonian

この節からは，本稿での考察目標であった repulsive Hamiltonian について述べていきます．この系の free Hamiltonian は

$$H_0 = p^2 - x^2 \tag{3.1}$$

[4]正しくは H に局所コンパクトという条件が必要である．絶対連続部分空間よりももう少し広いクラスに属する u に対しても時間平均の極限として (2.5) は成り立つ．

$$\int_{-t}^{t}\int_{|x|<R} |e^{-i\tau H}u(x)|^2dxd\tau/t \to 0 \quad \text{as} \quad t \to \infty.$$

これは RAGE theorem と呼ばれる（[7]）．

[5]Range $W^{\pm} = \{H$ の絶対連続部分空間 $\}$ である．

[6]$u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ でなくても，稠密な部分空間に属する u で十分である．

で与えられます[7]．慣例に従い $p = -i\nabla$ と書きました．これまで述べたきた自由粒子の Hamiltonian と同じ記号を用いますが混乱はないと思います．(3.1) の支配する系において，粒子はどのような振る舞いをするのでしょうか．量子力学においても古典力学的な観察は多いに役立ちます．(3.1) の x^2 を外力とみなして Newton の運動方程式を考えると

$$\ddot{x}(t)/2 = 2x(t) \tag{3.2}$$

です[8]．これは容易に解くことが出来，初期条件を $x(0) = x_0$，$\dot{x}(0) = 2\xi_0$ と与えれば，

$$x(t) = \cosh(2t)x_0 + \sinh(2t)\xi_0 \tag{3.3}$$

となります．つまり $t \to \infty$ のとき $x(t) = O(e^{2t})$ であり，粒子は時間に関して指数関数的オーダーで遠方に飛び去ります．前節の議論から類推すると

$$|V(x)| \leqslant C(\log\langle x\rangle)^{-1-\epsilon}, \quad \epsilon > 0 \tag{3.4}$$

が短距離型ポテンシャルの条件となりそうです．実際，このポテンシャルに対して Bony-Carles-Häfner-Michel [1] によって漸近完全性まで得られています[9]．それでは，(3.4) のポテンシャルを仮定して波動作用素の存在を見てみましょう[10]．まず次の伝播評価が成り立ちます．

Proposition 3.1. (I [4]) $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ として，$\mathscr{F}e^{ix^2/2}\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ かつ $\delta > 0$ に対して $\operatorname{supp}\mathscr{F}e^{ix^2/2}\phi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |\xi| \geqslant \delta\}$ となるものをとる．$t \to \infty$ のとき

$$\|F(e^{-2t}|x| \leqslant \delta/3)e^{-itH_0}\phi\| \leqslant 2e^{-4t}\|x^2\phi\| \tag{3.5}$$

が成り立つ．ここで $F(\lambda \leqslant \delta/3)$ は集合 $\{\lambda \in \mathbb{R} \,\big|\, \lambda \leqslant \delta/3\}$ の定義関数である．

この評価の意味について説明します．量子力学では Fourier 変換後の変数 ξ は運動量に対応しています．$e^{ix^2/2}$ は技術的なものなのでとりあえず無視するとして，波動関数 ϕ の Fourier 変換の台が原点を含まないということは，運動量が 0 ではないということを表しています．運動量を δ 以上持つ粒子の位置 x の増大度が $\delta e^{2t}/3$ 以下ならば，そのような粒子の存在確率は e^{-4t} のオーダーで 0 になる．つまり，x は $\delta e^{2t}/3$ より大きい増大度を持たねばならない．ということを主張しているのです．この評価を用いれば，以下のように Cook-Kuroda method によって波動作用素の存在は直ちに従います．

$$\begin{aligned}\|V(x)e^{-itH_0}\phi\| &\leqslant \|V(x)F(e^{-2t}|x| \geqslant \delta/3)e^{-itH_0}\phi\| + C\|F(e^{-2t}|x| \leqslant \delta/3)e^{-itH_0}\phi\| \\ &\leqslant C(t^{-1-\epsilon}\|\phi\| + e^{-4t}\|x^2\phi\|).\end{aligned} \tag{3.6}$$

さて，条件 (3.4) の下，波動作用素は存在しましたが，果たして本当に (3.4) が存在するためのぎりぎりの条件なのでしょうか．少し唐突ですが，次の free Hamiltonian

$$H_0^S = p^2 - E \cdot x \tag{3.7}$$

を考察してみましょう．$E \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は電場を表し，H_0^S は Strak Hamiltonian と呼ばれています．Newton の運動方程式

$$\ddot{x}(t)/2 = E \tag{3.8}$$

[7] 作用素 H_0 は $\mathscr{D}(p^2 + x^2)$ を芯として本質的自己共役となる．また絶対連続な作用素である．これらの事実は [1] で詳しく考察されている．

[8] 質量を 1/2 としていることに注意．

[9] より一般的に $0 < \alpha \leqslant 2$ に対して $H_{0,\alpha} = p^2 - |x|^\alpha$ で議論している．

[10] 空間次元 $n \geqslant 3$ ならクーロンタイプの特異性を持つポテンシャルも扱うことができる．

を $x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=2\xi_0$ の下で解くと，

$$x(t)=Et^2+2\xi_0 t+x_0=O(t^2) \tag{3.9}$$

であるから，短距離型としては

$$|V(x)|\leqslant C\langle x\rangle^{-1/2-\epsilon},\quad \epsilon>0 \tag{3.10}$$

が予想されます．この閾値 $1/2$ への肯定的な解答として，$0<\rho_1\leqslant 1/2$ に対して

$$H^S=H_0^S+V,\quad V(x)=F(|x|\geqslant 1)|x|^{-\rho_1} \tag{3.11}$$

とすると，波動作用素

$$W^{S,\pm}=\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itH^S}e^{-itH_0^S} \tag{3.12}$$

は存在しない．という主張が Ozawa [6] によって示されています．波動作用素が存在しないような具体的なポテンシャルを構成することにより，閾値 $1/2$ を決定づけたのです．$H_0=p^2-x^2$ の系に対しても，次のように波動作用素が存在し得ないケースを作ることが出来ます．

Theorem 3.2. (I [4]) $0<\gamma_1\leqslant 1$ に対して

$$H=H_0+V,\quad V(x)=(\log(2+|x|))^{-\gamma_1} \tag{3.13}$$

とすると，波動作用素

$$W^{\pm}=\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itH}e^{-itH_0} \tag{3.14}$$

は存在しない．

4 長距離型の場合

以下この節ではポテンシャル V は長距離型とします．具体的には $0<\gamma_1\leqslant 1$ に対して

$$|V(x)|\leqslant C(\log\langle x\rangle)^{-\gamma_1} \tag{4.1}$$

です[11]．前節で述べたように，ポテンシャルが長距離型のときは波動作用素が存在しない場合もあるのですが，それでも数学的散乱理論は波動作用素の解析を諦めません．長距離型の場合は波動作用素に適当な（存在するように）修正を施した修正波動作用素というものの存在を議論していくことになります．修正因子を構成するために，もう一度古典軌道 (3.3) を考察します．古典力学における運動量に対応するものは $\dot{x}(t)/2$ ですから，(3.3) を用いて計算すると

$$\dot{x}(t)/2=\sinh(2t)x_0+\cosh(2t)\xi_0 \tag{4.2}$$

となり，これより $t\to\infty$ のとき

$$x(t)=\tanh(2t)\dot{x}(t)/2+O(e^{-2t}) \tag{4.3}$$

[11]実際は緩やかな減衰を仮定する代わりに滑らかさが必要となる．今回の場合は V は C^2 級で

$$|\partial_x^\beta V(x)|\leqslant C_\beta(\log\langle x\rangle)^{-\gamma_1-1},\quad 1\leqslant|\beta|\leqslant 2$$

を仮定している．

が得られます．これは，次の Hamilton-Jacobi 方程式からも確かめることが出来ます．

$$\begin{cases} \partial_t S(t,\xi) = \xi^2 - (\nabla_\xi S(t,\xi))^2, \\ S(0,\xi) = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

実際，$S(t,\xi) = \tanh(2t)\xi^2/2$ はこの方程式をみたし，これを ξ で微分したもの

$$(\nabla_\xi S)(t,\xi) = \tanh(2t)\xi \tag{4.5}$$

が (4.2) に対応しています．つまり，量子力学的側面からも $x \sim \tanh(2t)p$ となっているはずです．さて，修正波動作用素の存在は次の定理で述べられます．

Theorem 4.1. (I [4]) 以上の仮定の下，次の修正波動作用素が存在する．

$$W_D^{\pm} = \underset{t\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\, e^{itH} e^{-itH_0} M_t(x+p), \quad M_t(x) = e^{-i\int_0^t V^1(\sinh(2\tau)x)d\tau}. \tag{4.6}$$

波動作用素の先頭にある $M_t(x+p)$ が修正因子です．これが波動作用素の存在にどのような役割を担うのでしょうか．まず

$$e^{-itH_0}\sinh(2t)(x+p)e^{itH_0} \sim \tanh(2t)p \tag{4.7}$$

に注意しておきます[12]．Cook-Kuroda method の証明 (2.9) を見れば，$e^{itH}e^{-itH_0}M_t(x+p)$ の微分の可積分性調べればよいのが分かるので，微分を実行し，(4.7) を用いると

$$\begin{aligned} \partial_t e^{itH}e^{-itH_0}M_t(x+p) &= ie^{itH}V(x)e^{-itH_0} - ie^{itH}e^{-itH_0}V(\sinh(2t)(x+p))M_t(x+p) \\ &\sim ie^{itH}(V(x) - V(\tanh(2t)p))e^{-itH_0}M_t(x+p). \end{aligned} \tag{4.8}$$

修正因子 $M_t(x+p)$ のおかげで $V(x)$ と $V(\tanh(2t)p)$ の差が現れました．これこそが修正因子の働きです．$x \sim \tanh(2t)p$ であることを思い出しましょう．これらの差は x と p の作用素の関数ではありますが，微分積分学の基本定理が成り立つとすれば

$$V(x) - V(\tanh(2t)p) = \int_0^1 (\nabla V)(\tanh(2t)p + \theta(x - \tanh(2t)p)) \cdot (x - \tanh(2t)p)d\theta \tag{4.9}$$

と計算されます[13]．つまり，長距離型ポテンシャルの場合は，減衰の緩い V そのものを評価するのではなく，修正因子が，V 微分と x と $\tanh(2t)p$ の差に評価を押し付けるのです．

---

[12] 実際は少し異なるが，分かりやすさのためこのように書いた．(3.3) と (4.2) の量子力学版である次の関係

$$\begin{aligned} e^{itH_0}xe^{-itH_0} &= \cosh(2t)x + \sinh(2t)p, \\ e^{itH_0}pe^{-itH_0} &= \sinh(2t)x + \cosh(2t)p \end{aligned}$$

を用いる．これらの関係式は [5] による．

[13] さらに V の 2 階微分のエラーが出てくる．これは Baker-Campbell-Hausdorff の公式と呼ばれる（[2]）．

References

[1] Bony, J. F., Carles, R., Häfner, D. and Michel, L. Scattering theory for the Schrödinger equation with repulsive potential, *J. Math, Pures Appl.* **84**, 509-579 (2005).

[2] Dereziński, J. and Gérard, C., *Scattering Theory of Classical and Quantum N-Particle Systems*, (Springer-Verlag 1997).

[3] Enss, V. and Weder, R. The geometric approach to multidimensional inverse scattering, J. Math. Phys. **36**, 3902-3921 (1995).

[4] Ishida, A., Existence and Non-Existence of the Wave Operators for the Schrödinger Equation with Repulsive Potential and Long-range Interaction, *preprint*.

[5] Nicoleau, F., Inverse scattering for a Schrödinger operator with a repulsive potential, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* **22**, 1485-1492 (2006).

[6] Ozawa, T. Non-existence of wave operators for Stark effect Hamiltonians, *Math. Z.* **207**, 335-319 (1991).

[7] Reed, M. and Simon, B., *Method of Modern Mathematical Physics, Vol3, Scattering Theory*, (Academic Press 1979).

Gap Theorems for Compact gradient Sasaki-Ricci Solitons

第 10 回 数学総合若手研究集会

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻

只野 誉*

概 要

In this note we give some necessary and sufficient conditions for compact gradient Sasaki-Ricci solitons to be Sasaki-Einstein. Our result [7] may be considered as a Sasaki geometry version of recent works by H. Li [6] and M. Fernández-López and E. García-Río [4].

1 Sasaki manifolds

本章及び次章では, 佐々木多様体の定義を振り返り, その Kähler 多様体との類似性を見る. 詳しくは [9, Chapter V], [1, Chapter 6-7], [5] 等を参照せよ. 以下, S を $(2n+1)$-次元実多様体とし, ξ, η, ϕ をそれぞれ S 上のベクトル場, 1-形式, $(1,1)$-型テンソル場とする.

命題 1.1 ([9] Chapter V; Proposition 1.1, 1.2)**.** ξ, η, ϕ からなる組 (ξ, η, ϕ) が

$$\eta(\xi) = 1, \quad \phi^2 = -1 + \xi \otimes \eta$$

を満たすとする. このとき, 次が成り立つ：

$$(1)\ \ \phi(\xi) = 0, \qquad (2)\ \ \eta(\phi X) = 0, \qquad (3)\ \ \operatorname{rank} \phi = 2n,$$

ここで $X \in \Gamma(TS)$. また, S 上の Riemann 計量 g で次の条件を満たすものが作れる：

(4) $\eta(X) = g(X, \xi), \quad X \in \Gamma(TS)$,

(5) $g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \Gamma(TS)$.

組 (ξ, η, ϕ, g) を **almost contact metric structure** (ACM structure) という. □

定義 1.2. ACM structure (ξ, η, ϕ, g) に対し, その **基本 2-形式** $\Phi(\cdot, \cdot)$ を次で定める：

$$\Phi(X, Y) := g(\phi X, Y), \quad X, Y \in \Gamma(TS).$$

定義 1.3. S 上の 1-形式 η が **接触形式** であるとは $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ を満たすときにいう. 組 (S, η) を **接触多様体** という. このとき $\eta \wedge (d\eta)^n$ は S 上の体積形式であり, $d\eta$ の階数は $2n$ である.

命題 1.4 ([9] Chapter V)**.** 接触多様体 (S, η) に対し, S 上のベクトル場 ξ で

$$\eta(\xi) = 1, \quad d\eta(\xi, \cdot) = 0$$

を満たすものが取れる. この ξ を **Reeb ベクトル場** という. □

*h-tadano@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

定義 1.5. 接触多様体 (S,η) 上の **接触束** D を各点 $p\in S$ に対して $D_p := \operatorname{Ker}\eta_p$ で定義する. D は階数 $2n$ の TS の部分束で, 次の直和分解が成立する：

$$TS = D\oplus\mathbb{R}\xi. \tag{1.1}$$

ここで $\mathbb{R}\xi$ は ξ が生成する S 上の直線束である.

定理 1.6 ([9] Chapter V; Theorem 2.1)**.** 接触多様体 (S,η) に対し, Reeb ベクトル場 ξ と接触形式 η を要素に持つ ACM structure (ξ,η,ϕ,g) で

$$\Phi(X,Y) = \frac{1}{2}d\eta(X,Y),\quad X,Y\in\Gamma(TS)$$

を満たすものが作れる. 組 (ξ,η,ϕ,g) を **contact metric structure** (CM structure) という.

実際 $d\eta$ は D 上のシンプレクティック形式であるから, D 上の計量 $\tilde{g}$ と概複素構造 $\tilde{\phi}$ で

$$\tilde{g}(\tilde{\phi}X,Y) = \frac{1}{2}d\eta(X,Y),\quad X,Y\in\Gamma(D)$$

を満たすものが取れる. あとは $\tilde{g},\tilde{\phi}$ を ξ 方向に trivial に拡張すればよい. この定理から直ちに：

命題 1.7. 接触多様体 (S,η) から定まる CM structure (ξ,η,ϕ,g) の Riemann 計量 g は

$$g(X,Y) = \frac{1}{2}d\eta(X,\phi Y) + \eta(X)\eta(Y),\quad X,Y\in\Gamma(TS)$$

で与えられる. 特に $g^T := g|_{D\times D}$ とおくと $(D,g^T,\phi|_D)$ は Hermite 空間となる. □

定義 1.8. Riemann 多様体 (S,g) に対してその **Riemann 錐** $(C(S),\bar{g})$ を

$$(C(S),\bar{g}) := (\mathbb{R}_+\times S, dr^2+r^2g)$$

と定義する. ここで r は $\mathbb{R}_+=\{r>0\}$ の自然な座標である. 例えば奇数次元単位球面

$$S = \mathbb{S}^{2n+1}(1) := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2n+2} : \sum_{i=1}^{2n+2} x_i^2+y_i^2 = 1\right\} \tag{1.2}$$

の Riemann 錐は $C(S)=\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ である. これは後述する佐々木多様体の例でもある.

(S,g) 上の幾何が $(C(S),\bar{g})$ 上の幾何に翻訳出来るであろう, と考えるのは自然である. 実際 S 上の ACM structure (ξ,η,ϕ,g) は $C(S)$ 上の概複素構造に対応する.

定義 1.9. S 上の ACM structure (ξ,η,ϕ,g) に対し, $TC(S)$ 上の準同型 J を

$$J(X) := \phi(X) - \eta(X)r\frac{\partial}{\partial r},\quad J\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) := \xi \tag{1.3}$$

で定める. ここで $X\in\Gamma(TS)$. $J^2=-1$ であるから, J は $C(S)$ 上の概複素構造である.

簡単な計算により, ACM structure に対して定まる (1.3) の概複素構造 J は

$$J\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\in\Gamma(TS),\quad \mathcal{L}_{r\frac{\partial}{\partial r}}J = 0 \tag{1.4}$$

を満たし, このとき $(\bar{g},J)$ は $C(S)$ 上の概 Hermite 構造を与えることが確かめられる. 逆に (1.4) を満たす $C(S)$ 上の概 Hermite 構造 $(\bar{g},J)$ に対して

$$\xi := J\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)|_S,\quad \eta(\tilde{X}) := \frac{1}{r^2}\bar{g}(\xi,\tilde{X}),\quad \phi(X) := \begin{cases} J(X) & \text{if } X\in\Gamma(D)\\ 0 & \text{if } X=\xi\end{cases},\quad g := \bar{g}|_S$$

とおくと, J は (1.3) を満たし (ξ,η,ϕ,g) は S 上の ACM structure を与える. ここで $\tilde{X}\in\Gamma(TS)$ である. 両者の間には 1 対 1 の対応が付くことが知られている：

定理 1.10 ([1] Theorem 6.5.8)**.**

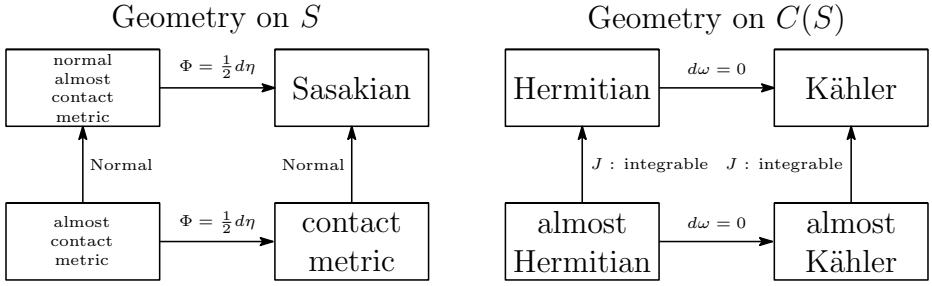
$$\left\{\begin{array}{c}\text{almost contact metric structure}\\ (\xi,\eta,\phi,g)\text{ on }S\end{array}\right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{c}\text{almost Hermitian structure}\\ (\bar{g},J)\text{ on }C(S)\text{ satisfying (1.3) and (1.4)}\end{array}\right\}$$

定義 1.11 (佐々木-畠山)**.** S 上の ACM structure 及び CM structure に対して

ACM structure が **normal** $\overset{\text{def}}{\iff}$ (1.3) によって定まる $C(S)$ 上の概複素構造 J が可積分

CM structure が **佐々木構造** $\overset{\text{def}}{\iff}$ CM structure の下に在る ACM structure が normal

定義 1.12. 佐々木構造を持つ Riemann 多様体 (S,g) を **佐々木多様体** という. 佐々木多様体 (S,g) はその佐々木構造も明記した方が良いときには (S,g,ξ,η,ϕ) のように表す.



次の命題は上の定義から直ちに従う：

命題 1.13 ([1] Definition 6.5.15)**.** Riemann 多様体 (S,g) が佐々木多様体であることと, (S,g) の Riemann 錐 $(C(S),\bar{g})$ が (1.4) を満たす複素構造 J に関して Kähler 多様体であることは同値. □

この命題以外にも, (S,g) が佐々木多様体であるための同値な条件が幾つか知られている：

定理 1.14 ([1] Lemma 7.3.8, Proposition 7.3.17)**.** (S,g) を CM structure (ξ,η,ϕ,g) を持つ $(2n+1)$-次元 Riemann 多様体とする. 以下は同値：

(1) (S,g) は 定義 1.11 の意味で佐々木構造を持つ,

(2) $(C(S),\bar{g})$ が (1.4) を満たす概複素構造 J に関して Kähler 多様体,

(3) ξ は 単位 Killing ベクトル場であり $\phi=\nabla\xi$ は次を満たす：

$$(\nabla_X\phi)(Y)=R(X,\xi)Y=g(\xi,Y)X-g(X,Y)\xi,\quad X,Y\in\Gamma(TS). \tag{1.5}$$

佐々木多様体は曲率の制限を受ける. 実際 (1.5) から次が従う：

$$\mathrm{Ric}(\xi,X)=2n\eta(X),\quad X\in\Gamma(TS). \tag{1.6}$$

実は佐々木多様体 S 上の ξ,η は $C(S)$ 上の座標を用いて明示的に表すことが出来る：

命題 1.15 ([1] Theorem 6.5.2)**.** (S,g) を佐々木多様体とする. このとき

$$\xi=\left(J\frac{\partial}{\partial r}\right)_{|r=1},\quad \eta=\left(\sqrt{-1}(\bar{\partial}-\partial)\log r\right)_{|r=1}.$$

ここで (S,g) を $\{r=1\}\subset C(S)$ と同一視した. 定理 1.14 (3) より ξ は (S,g) 上の 単位 Killing ベクトル場である. 詳しくは [1, Chapter 6], [9, Chapter V] を参照せよ. □

(S, g, ξ, η, ϕ) を $(2n+1)$-次元佐々木多様体とする. 分解 (1.1) から $g^T := g|_{D\times D}$ により D 上に計量 g^T が定まる. g^T を **横断 Riemann 計量** という. $(D, g^T, \phi|_D)$ は Hermite 空間であった.

2.1 Transversal Kähler structure

定義 2.1. **横断 Levi-Civita 接続** ∇^T を次で定める：$X \in \Gamma(TS), Y \in \Gamma(D)$ に対して

$$\nabla^T_X Y := \begin{cases} \pi(\nabla_X Y) & \text{if } X \in \Gamma(D), \\ \pi([\xi, Y]) & \text{if } X = \xi, \end{cases}$$

ここで $\pi : TS \to D$ は分解 (1.1) に応じた自然な射影, ∇ は (S, g) の Levi-Civita 接続である.

命題 2.2 ([1] Exercise 2.4)**.** 横断 Levi-Civita 接続 ∇^T は

$$Xg^T(V, W) = g^T(\nabla^T_X V, W) + g^T(V, \nabla^T_X W), \quad \nabla^T_X Y - \nabla^T_Y X - \pi([X, Y]) = 0$$

を満たす D 上の唯一の接続である. ここで $X, Y \in \Gamma(TS), V, W \in \Gamma(D)$. □

定義 2.3. **横断曲率テンソル**, **横断 Riemann 曲率テンソル**, **横断 Ricci 曲率テンソル**, **横断スカラー曲率** をそれぞれ

$$R^T(X, Y)Z := \nabla^T_X \nabla^T_Y Z - \nabla^T_Y \nabla^T_X Z - \nabla^T_{[X,Y]} Z, \quad \mathrm{Rm}^T(X, Y, Z, W) := g^T(R^T(X, Y)Z, W),$$
$$\mathrm{Ric}^T_g(X, Y) := \sum_{i=1}^{2n} \mathrm{Rm}^T(e_i, X, Y, e_i), \qquad s^T := \sum_{i=1}^{2n} \mathrm{Ric}^T(e_i, e_i)$$

で定義する. ここで $X, Y, Z, W \in \Gamma(D)$. また $\{e_i\}_{i=1}^n$ は D の g^T に関する正規直交底.

命題 2.4 ([1] Chapter 2, Chapter 7; Theorem 7.3.12)**.** $X, Y, Z, W \in \Gamma(D)$ に対して次が成り立つ：

(1) $\mathrm{Rm}^T(X, Y, Z, W) = \mathrm{Rm}(X, Y, Z, W) + g(\phi(Y), W)g(\phi(X), Z) - g(\phi(X), W)g(\phi(Y), Z)$,

(2) $\mathrm{Ric}^T(X, Y) = \mathrm{Ric}(X, Y) + 2g(X, Y)$. □

命題 2.5 (横断 Bianchi 恒等式)**.** $X, Y, Z, W \in \Gamma(D)$ に対して

(1) $R^T(X, Y)Z + R^T(Y, Z)X + R^T(Z, X)Y = 0$,

(2) $\mathrm{Rm}^T(Y, X, Z, W) = -\mathrm{Rm}^T(X, Y, Z, W), \quad \mathrm{Rm}^T(X, Y, W, Z) = -\mathrm{Rm}^T(X, Y, Z, W)$,

(3) $\mathrm{Rm}^T(X, Y, Z, W) = \mathrm{Rm}^T(Z, W, X, Y)$,

(4) $(\nabla^T_X R^T)(Y, Z)W + (\nabla^T_Y R^T)(Z, X)W + (\nabla^T_Z R^T)(X, Y)W = 0$

が成り立つ. (1) を **横断第 1 Bianchi 恒等式**, (4) を **横断第 2 Bianchi 恒等式** という. □

佐々木多様体 (S, g, ξ, η, ϕ) が与えられたとき, 計量を変形することで S 上の新たな佐々木構造を得ることが出来る：

定理 2.6 (丹野)**.** 佐々木多様体 S 上の佐々木構造 (ξ, η, ϕ, g) と $\alpha > 0$ に対して

$$\hat{\xi} := \frac{1}{\alpha}\xi, \quad \hat{\eta} := \alpha\eta, \quad \hat{\phi} := \phi, \quad \hat{g} := \alpha g + \alpha(\alpha - 1)\eta \otimes \eta$$

とすると, $(\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\phi}, \hat{g})$ はまた S 上の佐々木構造となる. この変形を **D-homothetic deformation** という. この変形で接触束は変わらない.

通常の Riemann 幾何学で成り立つ主張がどの程度佐々木多様体上の横断幾何学で成り立つか, というのは自然な疑問である. 次の Myers 型の定理が知られている：

定理 2.7 (長谷川-清野)**.** (S, g, η, ξ, ϕ) を $(2n+1)$-次元完備佐々木多様体とする. $\tau > 0$ が存在し

$$\mathrm{Ric}_g^T(X, X) \geqslant \tau g^T(X, X), \quad X \in \Gamma(D)$$

が成り立つとする. このとき (S, g) はコンパクトで基本群は有限.

Proof. D-homothetic deformation を使う. $\alpha = \frac{\tau}{2n+2}$ とする. 仮定により $X \in \Gamma(D)$ に対して

$$\mathrm{Ric}_{\hat{g}}^T(X, X) = \mathrm{Ric}_g^T(X, X) \geqslant \tau g^T(X, X) = (2n+2)\hat{g}(X, X)$$

が成り立つが, Proposition 2.4 (2) より $\mathrm{Ric}_{\hat{g}}(X, X) \geqslant 2n\hat{g}(X, X)$ が従う. これと (1.6) により $\tilde{X} \in \Gamma(TS)$ に対して $\mathrm{Ric}_{\hat{g}}(\tilde{X}, \tilde{X}) \geqslant 2n\hat{g}(\tilde{X}, \tilde{X})$ を得る. 結論は Myers の定理から従う. □

概 Hermite 多様体 (M, g, J) 上の Hermite 構造 (TM, g, J) が $\nabla J = 0$ を満たすとき (TM, g, J) を M 上の Kähler 構造といった. ここで ∇ は M の Levi-Civita 接続.

定義 2.8. 接触多様体 (S, η) 上の CM structure から定まる組 $(D, g^T, \phi|_D)$ が S 上の **横断 Kähler 構造** であるとは $\nabla^T \phi = 0$ を満たすときにいう.

命題 2.9. 佐々木多様体 (S, g) は横断 Kähler 構造 $(D, g^T, \phi|_D)$ を持つ. □

2.2 Transversal Hodge Theory

(S, g, ξ, η, ϕ) をコンパクト佐々木多様体とする.

定義 2.10. S 上の実 r-形式 $\alpha \in \Omega^r(S)$ が **basic** であるとは

$$\iota_\xi \alpha = 0, \quad \mathcal{L}_\xi \alpha = 0 \tag{2.1}$$

を満たすときにいう. 但し $\alpha \in C^\infty(S)$ のときは (2.1) を $\xi\alpha = 0$ で読み替える.

定義 2.11. $\Omega_B^r(S) := \{\alpha \in \Omega^r(S) : \alpha \text{ は basic 形式}\}$, $C_B^\infty(S) := \Omega_B^0(S)$, $d_B := d|_{\Omega_B^\bullet(S)}$.

$\alpha \in \Omega_B^r(S)$ とすると (2.1) と Cartan の公式により $d\alpha \in \Omega_B^{r+1}(S)$. つまり外微分作用素 d は basic 形式を保つ. 従って $d_B : \Omega_B^r(S) \to \Omega_B^{r+1}(S)$ となり, 次の **basic de Rham 複体** を得る：

$$0 \longrightarrow C_B^\infty(S) \xrightarrow{d_B} \Omega_B^1(S) \xrightarrow{d_B} \cdots \xrightarrow{d_B} \Omega_B^{2n}(S) \xrightarrow{d_B} 0. \tag{2.2}$$

定義 2.12. 複体 (2.2) から定まる群を **basic de Rham コホモロジー群** といい $H_B^r(S)$ で表す.

D 上の概複素構造 $J = \phi|_D$ は直和分解

$$D \otimes \mathbb{C} = D^{1,0} \oplus D^{0,1}, \quad D^* \otimes \mathbb{C} = (D^{1,0})^* \oplus (D^{0,1})^* \tag{2.3}$$

を引き起こす. ここで

$$D^{1,0} = \{X \in D \otimes \mathbb{C} : J(X) = \sqrt{-1}X\}, \quad D^{0,1} = \{X \in D \otimes \mathbb{C} : J(X) = -\sqrt{-1}X\}$$

はそれぞれ J の固有値 $\pm\sqrt{-1}$ に対する固有空間である. (2.3) は直和分解

$$\Lambda^r(D^* \otimes \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^p(D^{1,0})^* \otimes \Lambda^q(D^{0,1})^*, \quad \Omega_B^r(S) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=r} \Omega_B^{p,q}(S) \tag{2.4}$$

を定める. ここで $\Omega_B^{p,q}(S)$ は $\Lambda^p(D^{1,0})^* \otimes \Lambda^q(D^{0,1})^*$ の切断全体の集合である. (2.4) より作用素

$$\partial_B : \Omega_B^{p,q}(S) \to \Omega_B^{p+1,q}(S), \quad \bar{\partial}_B : \Omega_B^{p,q}(S) \to \Omega_B^{p,q+1}(S)$$

が定義出来て $d_B = \partial_B + \bar{\partial}_B$ が成り立つ. このとき次の **basic Dolbeault 複体** を得る：

$$0 \longrightarrow \Omega_B^{p,0}(S) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega_B^{p,1}(S) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega_B^{p,n}(S) \xrightarrow{\bar{\partial}} 0. \tag{2.5}$$

定義 2.13. 複体 (2.5) から定まる群を **basic Dolbeault コホモロジー群** といい $H_B^{p,q}(S)$ で表す.

定義 2.14. **横断 Hodge スター作用素** $*_B$ を $\alpha \in \Omega_B^r(S)$ に対して $*_B\alpha = *(\eta \wedge \alpha)$ と定める. ここで $*$ は通常の Hodge スター作用素である. 作用素 $\delta_B, \vartheta_B, \bar{\vartheta}_B$ を次で定める：

$$\delta_B := - *_B \circ d_B \circ *_B, \quad \vartheta_B := - *_B \circ \bar{\partial}_B \circ *_B, \quad \bar{\vartheta}_B := - *_B \circ \partial_B \circ *_B.$$

これらは次の L^2-内積に関して, それぞれ $d_B, \partial_B, \bar{\partial}_B$ の随伴作用素である：

$$\langle \alpha, \beta \rangle_B = \int_S \alpha \wedge *_B \bar{\beta} \wedge \eta. \tag{2.6}$$

定理 2.15 ([8] Theorem 7.22, [1] Theorem 7.2.6)**.** 作用素 $\Delta_B, \Box_B, \bar{\Box}_B$ を次で定める：

$$\Delta_B := d_B\delta_B + \delta_B d_B, \quad \Box_B := \partial_B\vartheta_B + \vartheta_B\partial_B, \quad \bar{\Box}_B := \bar{\partial}_B\bar{\vartheta}_B + \bar{\vartheta}_B\bar{\partial}_B.$$

これらは内積 (2.6) に関して自己随伴的である. Δ_B を **basic ラプラシアン**という. $\mathcal{H}_B^r(S) := \{\alpha \in \Omega_B^r(S) : \Delta_B\alpha = 0\}$ とおき, $\mathcal{H}_B^r(S)$ の元を **basic 調和 r-形式** という. 次が成り立つ：

$$\dim \mathcal{H}_B^r(S) < \infty, \quad \mathcal{H}_B^r(S) \simeq H_B^r(S), \quad \Omega_B^r(S) \simeq \operatorname{Im} d_B \oplus \operatorname{Im} \delta_B \oplus \mathcal{H}_B^r(S),$$

$$\Delta_B = 2\Box_B = 2\bar{\Box}_B, \quad H_B^r(S) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=r} H_B^{p,q}(S), \quad H_B^{p,q}(S) \simeq H_B^{q,p}(S), \quad H_B^{p,q}(S) \simeq H_B^{n-p,n-q}(S).$$

定義 2.16. $f \in C_B^\infty(S)$ に対し, f の **横断グラディエントベクトル場** $\nabla^T f$ を

$$g^T(\nabla^T f, X) := d_B f(X), \quad X \in \Gamma(D)$$

で定める. $\nabla^T f \in \Gamma(D)$ である. また f の **横断ヘッシアン** $\operatorname{Hess}_f^T(\cdot,\cdot)$ を次で定義する：

$$\operatorname{Hess}_f^T(X, Y) := g^T(\nabla_X^T \nabla^T f, Y), \quad X, Y \in \Gamma(D).$$

古典的な結果と同様の主張が成立する. 例えば：

命題 2.17 (横断 Bochner 公式)**.** $f \in C_B^\infty(S)$ に対して

$$\frac{1}{2}\Delta_B |\nabla^T f|^2 = |\operatorname{Hess}_f^T|^2 + \left\langle \nabla^T f, \nabla^T \Delta_B f \right\rangle + \operatorname{Ric}^T(\nabla^T f, \nabla^T f) \tag{2.7}$$

が成り立つ. 詳しくは [3], [7] 等を参照せよ. □

3 Sasaki-Einstein metrics and gradient Sasaki-Ricci solitons

Ricci ソリトンと Einstein 計量の間には幾つかの Gap Theorem が成り立つ. 本章では, Riemann 多様体及び Kähler 多様体上の Ricci ソリトンに対する Gap Theorem [4], [6] の佐々木幾何学への対応物 [7] を紹介する. 再び (S, g, ξ, η, ϕ) を $(2n+1)$-次元佐々木多様体とする.

定義 3.1. 佐々木多様体 (S, g) が **佐々木-Einstein 多様体** であるとは, g が Einstein 計量であるとき, つまり実定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して $\operatorname{Ric}_g = \lambda g$ を満たすときに言う. (1.6) より $(2n+1)$-次元佐々木-Einstein 多様体の Einstein 定数は $\lambda = 2n$ に限る.

命題 3.2 ([1] Theorem 7.3.12, 11.1.5)**.** (S, g) を $(2n+1)$-次元佐々木多様体とする. 次は同値：

(1) (S, g) は佐々木-Einstein 多様体. このとき必然的に $\operatorname{Ric}_g = 2ng$,

(2) (S, g) の Riemann 錐 $(C(S), \bar{g})$ は Ricci-flat Kähler 多様体：$\operatorname{Ric}_{\bar{g}} = 0$,

(3) (D, g^T) は定数 $2n+2$ の transverse Kähler-Einstein 方程式を満たす：$\mathrm{Ric}^T = (2n+2)g^T$.

これらの等価な条件を満たす佐々木多様体を **佐々木-Einstein 多様体** という. □

(1.2) の奇数次元単位球面は佐々木-Einstein 多様体の典型的な例である. 球面以外の例については [1, Chapter 11], [9] 等を見よ. 佐々木-Einstein 多様体は Kähler-Einstein 多様体の奇数次元類似とでも言うべき対象である. 詳しくは [1, Chapter 11], [5] 等を参照せよ. 以下, $n \geqslant 1$ とする. 佐々木-Einstein 多様体の一般化として次を考える：

定義 3.3. $(2n+1)$-次元佐々木多様体 (S, g) が **グラディエント佐々木-Ricci ソリトン** であるとは, ある S 上の basic 函数 $f \in C^\infty_B(S)$ が存在して

$$\mathrm{Ric}^T + \mathrm{Hess}^T_f = (2n+2)g^T \tag{3.1}$$

を満たすときにいう. もちろん f が定数函数なら (S, g) は佐々木-Einstein 多様体である. このときグラディエント佐々木 Ricci ソリトンは **自明** であるという.

(S, g) が佐々木-Einstein 多様体であるとき $s^T_{\max} = 2n(2n+2)$ が成り立つ. ここで $s^T_{\max}$ は横断スカラー曲率 s^T の最大値である. この逆に関して, 次が成り立つ：

Main Theorem A ([7], see also [4]). *Let (S, g) be a $(2n+1)$-dimensional compact gradient Sasaki-Ricci soliton satisfying* (3.1). *Then (S, g) is Sasaki-Einstein if and only if*

$$s^T_{\max} - 2n(2n+2) \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{vol(S, g)} \int_S \|\nabla^T f\|^2.$$

定義 3.4. Basic 函数 $0 \neq f \in C^\infty_B(S)$ が λ を **固有値** に持つ Δ_B の **固有函数** であるとは, ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して次を満たすときにいう：

$$\Delta_B f = \lambda f. \tag{3.2}$$

命題 3.5 ([8] Theorem 7.30). (3.2) の固有値は非負で離散的. つまり, 固有値 $\{\lambda_i\}$ を並べ替えて

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots$$

と出来る. また, 固有値 λ_i の固有函数 f_i から成る $L^2(C^\infty_B(S))$ の完備な正規直交底が存在する. □

(3.2) に対して, 命題 3.5 以外にも通常のラプラシアンに対する固有値問題で良く知られた結果と同様の事実が幾つか成り立つ. 詳しくは [2], [3], [7] 等を見よ. 縮約横断第 2 Bianchi 恒等式と横断 Bochner 公式 (2.7) から, グラディエント佐々木-Ricci ソリトン (S, g) 上で

$$\int_S |\,\mathrm{Hess}^T_f\,|^2 = \int_S \mathrm{Ric}^T(\nabla^T f, \nabla^T f) \tag{3.3}$$

が従う. 詳しくは [3], [4, Lemma 2.3], [7] 等を参照せよ. 故に (3.1), (3.3) より $\int_S \mathrm{Ric}^T(\nabla^T f, \nabla^T f) \leqslant 0$ ならば (S, g) は自明である. 実はもっと強い事実が成り立つ：

Main Theorem B ([7], see also [4]). *Let (S, g) be a $(2n+1)$-dimensional compact gradient Sasaki-Ricci soliton satisfying* (3.1). *Then (S, g) is Sasaki-Einstein if and only if*

$$\int_S \mathrm{Ric}^T(\nabla^T f, \nabla^T f) \leqslant \frac{\lambda_1}{2} \int_S |\nabla^T f|^2,$$

where λ_1 denotes the first eigenvalue of the basic Laplacian Δ_B.

命題 3.2 (3) より, 佐々木多様体 (S, g) が佐々木-Einstein 多様体であるのは $\mathrm{Ric}^T = (2n+2)g^T$ が成り立つとき, かつそのときに限る. 次の定理は, 非自明な佐々木 Ricci ソリトン上の横断 Ricci テンソル Ric^T は横断 Riemann 計量の $(2n+2)$ 倍 $(2n+2)g^T$ に十分近づけないことを意味し, 佐々木 Ricci ソリトンと佐々木-Einstein 計量の間の Gap Theorem を与える. 同様の事情は Riemann 多様体及び Kähler 多様体上の Ricci ソリトン [4], [6] で知られている：

Main Theorem C ([7], see also [4], [6]). *Let (S, g) be a $(2n+1)$-dimensional compact gradient Sasaki-Ricci soliton satisfying* (3.1). *Then (S, g) is Sasaki-Einstein if and only if*

$$|\,\mathrm{Ric}^T - (2n+2)g^T| \leqslant \frac{-f_X + \sqrt{f_X^2 + 8(2n-1)(2n+2)f_X}}{4(2n-1)},$$

where $f_X := \frac{1}{vol(S,g)} \int_S |\nabla^T f|^2$ is the Sasaki-Futaki invariant with respect to $X = \nabla^T f$.

次の定理は Kähler 多様体上の Ricci ソリトンに対して得られた Gap Theorem [6, Theorem 1.3] の佐々木幾何学版である：

Main Theorem D ([7], see also [6]). *Let (S, g) be a $(2n+1)$-dimensional compact gradient Sasaki-Ricci soliton satisfying* (3.1) *and $\int_S f = 0$. Then there exists a positive constant $\epsilon = \epsilon(\lambda_1, f_X) \ll 1$ depending on the first eigenvalue λ_1 of the basic Laplacian Δ_B and the Sasaki-Futaki invariant f_X with respect to $X = \nabla^T f$ such that if*

$$\mathrm{Ric}^T \geqslant (1-\epsilon)(2n+2)g^T,$$

then (S, g) is Sasaki-Einstein.

注意 3.6. In above Theorem D, ϵ can be expressed explicitly from its proof.

References

[1] C. Boyer and K. Galicki, Sasakian geometry, Oxford Mathematical Monopraphs, Oxford University Press, Oxford, 2008, ISBN 978-0-19-856495-9

[2] I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian geometry, Pure and Applied Mathematics, vol. 115, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984, ISBN 978-0121706401

[3] B. Chow, P. Lu and L. Ni, Hamilton's Ricci flow, Graduate Studies in Mathematics, vol. 77, American Mathematical Society, Science Press, 2006, ISBN 978-0-8218-4231-7

[4] M. Fernández-López and E. García-Río, *Some gap theorems for gradient Ricci solitons*, Internat. J. Math., **23** (2012), no. 7, 1250072, 9pages.

[5] A. Futaki, H. Ono and G. Wang, *Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds*, J. Differential Geom., **83** (2009), no. 3, 585-635.

[6] H. Li, *Gap theorems for Kähler-Ricci solitons*, Arch. Math. (Basel), **91** (2008), no. 2, 187-192.

[7] H. Tadano, *Gap theorems for compact gradient Sasaki-Ricci solitons*, preprint, 2013.

[8] P. Tondeur, Geometry of foliations, Monographs in Mathematics, vol. 90, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997, ISBN 3-7643-5741

[9] K. Yano and M. Kon, Structure on manifolds, Series in Pure Mathematics, vol. 3, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984, ISBN 9971-966-15-8

非可換群を用いた暗号技術について

縫田　光司（NUIDA, Koji）

産業技術総合研究所（k.nuida@aist.go.jp）　2013 年 12 月 19 日

概 要

現代の代表的な暗号技術は、RSA 暗号や楕円曲線暗号のように可換な群を用いて構成されているものが殆どである。一方、純粋に理論的な興味に加えて将来的な量子コンピュータによる攻撃の危険性に備える意味もあり、非可換な群を用いた暗号技術の構成に関する研究もそれなりに進められている。本発表では、非可換群に基づく暗号技術の既存研究の紹介および筆者の最近の研究成果の紹介と、関連する数学的な問題の提案を行う。

1　暗号技術

1.1　共通鍵暗号と公開鍵暗号

暗号技術とは、（より広範な技術も含めることもあるが、狭い意味では）データに何らかの変換を施し、意図に沿った特定の人（たち）だけは秘密の情報を用いてデータを復元できる一方、それ以外の人たちは元データの情報を読み取ることができないようにする技術である。もう少しきちんと述べると、暗号方式は、「暗号鍵」（あるいは単に「鍵」）と呼ばれる補助情報を生成する鍵生成アルゴリズム、鍵を用いてデータ（「平文」と呼ばれる）を暗号文に変換する暗号化アルゴリズム、鍵を用いて暗号文を平文に戻す復号アルゴリズムという三つのアルゴリズムで構成される。

歴史的に古くから研究されてきた暗号技術は「共通鍵暗号」と分類されるものであり、暗号化と復号で同一の鍵（「共通鍵」）が用いられる。一方、比較的最近（といってももう 40 年近い歴史を持つのだが）研究され始めた暗号技術として、暗号化と復号で異なる鍵を用いる「公開鍵暗号」と呼ばれる種類の暗号技術がある。公開鍵暗号において、暗号化アルゴリズムが用いる鍵を「暗号化鍵」あるいは「公開鍵」、復号アルゴリズムが用いる鍵を「復号鍵」あるいは「秘密鍵」と呼ぶ。通常、暗号化鍵は誰もが知ることができるよう公開され、一方の復号鍵は正規の受信者だけにしか知られないよう秘密に管理される点からこうした名称が付いている。事前の補助情報の共有を要しない公開鍵暗号は、その特徴ゆえにオンラインショップにおけるクレジットカード決済をはじめとするインターネット上での秘匿通信に幅広く用いられており、読者の皆様の多くが（意識しているかどうかはさておき）日頃からお世話になっている技術といえるであろう。

1.2　公開鍵暗号技術の例

代表的な公開鍵暗号方式の一つとして ElGamal（エルガマル）暗号 [1] が挙げられる。この暗号方式は以下のように構成される。

鍵生成アルゴリズム まず、素数位数の巡回群 G（乗法群とする）とその生成元 g を選ぶ。次に、指数 x をランダムに選んで別の生成元 $h := g^x$ を決める。群 G の記述と g, h を公開鍵、指数 x を秘密鍵とする。

暗号化アルゴリズム 平文 $m \in G$ を暗号化するために、指数 r をランダムに選び、公開鍵を用いて G の元 g^r と $m \cdot h^r$ を計算する。その組 $c := (g^r, m \cdot h^r)$ を暗号文とする。

復号アルゴリズム 暗号文 $c = (c_1, c_2)$ と秘密鍵 x（および公開鍵）が与えられたとき、平文 $m' := c_2 \cdot c_1^{-x}$ を復号結果とする。

$c_1 = g^r$ および $c_2 = m \cdot h^r$ のとき、$h = g^x$ より $c_2 \cdot c_1^{-x} = m \cdot g^{rx} \cdot g^{-rx} = m$ であり、確かに平文が正しく復号されることを確認されたい。この暗号方式が安全であるためには、公開情報である生成元 $g \in G$ と $h \in G$ から $h = g^x$ を満たす指数 x を計算することが現実的な時間では不可能であることが必要となる。この x を計算する問題は「離散対数問題」と呼ばれている。（なお、厳密には、離散対数問題の計算を経ずに、迂回的な別手段で ElGamal 暗号を破れる可能性も考えられる。しかし、現時点ではそのような方法は発見されておらず、一方でそうした迂回手段が無いことも証明されていない。）

ElGamal 暗号と密接に関連する暗号技術として Diffie–Hellman（ディフィー・ヘルマン）鍵交換 [2] が知られている（実際には、Diffie–Hellman 鍵交換は ElGamal 暗号より先に考案されたものであり、ElGamal 暗号の設計にもそのアイデアが活かされている）。これは通信しようとしている二者間（例えば A さんと B さん）で、事前情報の共有無しに共通鍵暗号の鍵を準備するためのプロトコルであり（これは上述した狭い意味での暗号技術ではないが、公開鍵暗号技術の一種と捉えられている）、以下の要領で実行される。

1. A さんは素数位数の巡回群 G とその生成元 g を選び、B さんに伝える。
2. A さんは指数 x_A をランダムに選び、元 $h_A := g^{x_A}$ を B さんに伝える。同様に、B さんは指数 x_B をランダムに選び、元 $h_B := g^{x_B}$ を A さんに伝える。
3. A さんは受け取った元 h_B と先程選んだ指数 x_A を用いて、$K_A := {h_B}^{x_A}$ を計算する。同様に、B さんは受け取った元 h_A と先程選んだ指数 x_B を用いて、$K_B := {h_A}^{x_B}$ を計算する。

すると、指数法則（冪乗の可換性）より、$K_A = (g^{x_B})^{x_A} = (g^{x_A})^{x_B} = K_B$ が成り立ち、確かに両者が共通の情報 $K_A = K_B$ を共有できていることが確かめられる。この鍵交換プロトコルと ElGamal 暗号の構造の類似性に注意されたい。ここでも、安全性（得られた鍵 $K_A = K_B$ の情報が漏れないこと）が成り立つためには、群 G における離散対数問題が現実的に解けないことが必要とされる。

1.3 量子コンピュータによる暗号攻撃

上述の通り、ElGamal 暗号や Diffie–Hellman 鍵交換の安全性は巡回群 G における離散対数問題の困難性を必要としており、近年の暗号分野では、離散対数問題が計算困難と考えられている具体的な群としてある種の楕円曲線の Mordell–Weil 群（の部分群）がよく用いられている。一方、有名な RSA 暗号は整数剰余環の可逆元のなす乗法群を舞台とする暗号方式であり、その安全性は巨大な合成数の素因数分解の計算困難性を必要としている。このように比較的初期に得られた有力な公開鍵暗号技術は大半が離散対数問題や素因数分解の困難性と関連しているのであるが、量子コンピュータを用いて素因数分解および可換群上の離散対数問題を効率的に計算するアルゴリズムを 1990 年代に Shor が考案した [3] ことで、将来的に実用規模の量子コンピュータが実現するとそうした暗号技術がことごとく破られ得るという危険性が浮上した。

近年の暗号分野では、量子コンピュータによる潜在的な脅威への対策（および純粋に理論的な興味）のため、量子コンピュータを用いてもなお計算困難と予想される別の計算問題に安全性の根拠を置く公開鍵暗号方式「耐量子暗号」（post-quantum cryptography）が一つの重要な研究テーマとなっている。「耐量子暗号」の主な候補としては、格子の（近似）最短ベクトル問題に基づく暗号方式や、ランダム線型符号の復号

問題に基づく暗号方式などがこれまでによく研究されている。一方、ElGamal 暗号や RSA 暗号で用いられている可換群の代わりに、非可換群を用いて公開鍵暗号を構成しようという研究も、上記の物と比べると数が少ないとはいえそれなりに進められている。本稿ではこうした非可換群を用いた暗号技術を紹介する。

2 既存の非可換群ベース暗号の例

2.1 組み紐群を用いた鍵交換プロトコルとその攻撃

ここでは、Ko らが 2000 年に提案した組み紐群を用いた鍵交換プロトコル [4] を紹介する。n 本の紐からなる組み紐群を B_n と書く。つまり、

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{c} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ for } i,j \in [1,n] \text{ with } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ for } i \in [1,n-1] \end{array} \right\rangle$$

とする。ℓ と r を正整数とするとき、$LB_\ell := \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{\ell-1} \rangle$ および $RB_r := \langle \sigma_{\ell+1}, \ldots, \sigma_{\ell+r-1} \rangle$ とおく。Ko らのプロトコルでは、最初に整数 ℓ, r と元 $x \in B_{\ell+r}$ を選んで公開しておく。A さんと B さんが鍵を共有するためのプロトコルは以下のように実行される。

1. A さんは $a \in LB_\ell$ をランダムに選び、$y_A := axa^{-1}$ を B さんに送る。同様に、B さんは $b \in RB_r$ をランダムに選び、$y_B := bxb^{-1}$ を A さんに送る。
2. A さんは受け取った y_B と先程選んだ a をもとに $K_A := ay_Ba^{-1}$ を計算する。同様に、B さんは受け取った y_A と先程選んだ b をもとに $K_B := by_Ab^{-1}$ を計算する。

LB_ℓ および RB_r の定義より、a と b は互いに可換であることに注意されたい。このことから、$K_A = abxb^{-1}a^{-1} = baxa^{-1}b^{-1} = K_B$ が成り立つため、確かに同一の情報を共有することができている。このプロトコルの仕組みは Diffie–Hellman 鍵交換と類似しており、Diffie–Hellman 鍵交換が冪乗演算の可換性を利用していたところ、このプロトコルでは組み紐群の互いに可換な二つの部分群を代わりに利用していると解釈することもできる。

このプロトコルが安全であるためには、少なくとも、上記の元 x および y_A が与えられた状態で、$y_A = a'xa'^{-1}$ を満たす $a' \in LB_\ell$ の計算が現実的時間で困難である必要がある（この a' がプロトコルで用いられた a と異なるものであっても、性質 $a'b = ba'$ と $y_A = a'xa'^{-1}$ より $a'y_Ba'^{-1} = K_A$ が成り立つため、公開情報だけから鍵が求まってしまう）。Hofheinz と Steinwandt は 2003 年に、こうした元 a' を計算するアルゴリズムを提案し、実験した範囲で 8 割前後の入力に対して a' を正しく計算できたことを発表した [5]。このため、上記の鍵交換プロトコルは暗号技術として充分な安全性を有していないものと考えられる。なお、この結果は安全な暗号技術の構築という観点からは否定的な結果と解釈されるかもしれないが、一方で組み紐群上の計算に関する新たなアルゴリズムの構成という観点からは前向きな結果と捉えることもできる。通常の計算機分野においては計算「できる」ことが望ましい状況と考えられる傾向があるが、暗号技術の研究においては計算「できない」ことが大きな価値を持つ場合が多い。こうした一種の逆転現象は、暗号分野の研究の面白さを生み出す源泉の一つであると筆者は考えている。

2.2 非可換係数行列を用いた鍵交換プロトコル

上記のプロトコル以外にも非可換群を用いた公開鍵暗号技術がいくつか提案されているが、充分な安全性の達成は中々難航している状況とみられる。詳しくは Blackburn らの概説論文 [6] などを参照されたい。

この方面における最近の研究の一つとしては、Kahrobaei らによる非可換群を用いた Diffie–Hellman 鍵交換プロトコルの変形方式 [7] が挙げられる。まず、元々の Diffie–Hellman 鍵交換プロトコルは巡回群上で定義されていたが、プロトコルにおいて逆元を取る操作は用いられていないため、(1 元生成の) 半群上でも同様のプロトコルを定義できることを注意しておく。Kahrobaei らは、整数剰余環上の対称群の群環 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[S_m]$ を係数に持つ $k \times k$ 行列の半群 $M_k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[S_m])$ を考え、その上で Diffie–Hellman 鍵交換を行うことを提案した。つまり Kahrobaei らのプロトコルは以下のようになる。

1. A さんは上記パラメータ n, m, k とランダムな行列 $M \in M_k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[S_m])$ を選び、B さんに伝える。
2. A さんは指数 x_A をランダムに選び、元 $M_A := M^{x_A}$ を B さんに伝える。同様に、B さんは指数 x_B をランダムに選び、元 $M_B := M^{x_B}$ を A さんに伝える。
3. A さんは受け取った元 M_B と先程選んだ指数 x_A を用いて、$K_A := {M_B}^{x_A}$ を計算する。同様に、B さんは受け取った元 M_A と先程選んだ指数 x_B を用いて、$K_B := {M_A}^{x_B}$ を計算する。

論文 [7] では、パラメータの具体例として $n \in \{2, 3, 5, 7\}$、$m = 5$、$k \in \{2, 3\}$ を用いて安全性に関する計算機実験的な考察がなされている。しかしながら、ごく最近の論文ということもあり、このプロトコルの安全性に関する理論的な解析は筆者の知る限り行われていない。この点は今後の研究課題であろう。

3 提案方式

ここでは、筆者がつい最近考案した非可換群を用いた完全準同型暗号方式について述べる。詳細は研究発表 [8] の予稿集や今後発表するつもりの論文を参照されたい。

3.1 完全準同型暗号

「準同型暗号」(homomorphic encryption) とは、暗号文に対してある決められた操作を行うことで、平文に対するある演算結果に対応する暗号文を得ることのできる公開鍵暗号技術のことである (共通鍵暗号でも同様の技術が考えられるが、本稿では公開鍵暗号のみを取り扱う)。例えば、ElGamal 暗号において、平文 m_1 の暗号文 $(g^{r_1}, m_1 \cdot h^{r_1})$ と平文 m_2 の暗号文 $(g^{r_2}, m_2 \cdot h^{r_2})$ が与えられたとき、成分ごとにそれらの積を計算すると $(g^{r_1+r_2}, (m_1 \cdot m_2) \cdot h^{r_1+r_2})$ となり、これは平文の積 $m_1 \cdot m_2$ の暗号文となっている。すなわち暗号化したまま平文に乗法演算を施すことが可能なため、ElGamal 暗号は「乗法準同型暗号」である。

ElGamal 暗号では平文の乗法演算のみに着目したが、もっと強く、平文に対する任意の演算を施すことのできる準同型暗号も考えられ、そうしたものは「完全準同型暗号」(fully homomorphic encryption) と呼ばれている。完全準同型暗号を最初に実現したのは Gentry による 2009 年の論文 [9] であり、1 ビット平文 $m \in \{0, 1\}$ の暗号文に対する操作で平文に対するビット演算 AND および XOR を実現して、それらの組合せで平文に対する任意の (より正確には、パラメータに対する高々多項式オーダーのサイズの回路で定義される) 演算を実現している。Gentry の方式は、多項式環の剰余環のイデアルが定める整数格子という、いわば「可換な構造」に基づく方式であり、その後の研究で得られた完全準同型暗号の構成も筆者の知る限り全て同様の「可換な構造」に基づいている。筆者の研究では、こうした「可換な構造」の代わりに、非可換群を用いた完全準同型暗号の構成を行った。

3.2 方式の構成

筆者の方式では、まず、有限（非可換）群 $\widetilde{G}$ とその部分群 G、G から別の群 G_{im} への全射準同型写像 $\varphi\colon G \to G_{\mathrm{im}}$、$G$ の生成系 $\mathcal{G}_G$、$\ker(\varphi)$ の生成系 $\mathcal{G}_{\ker}$、G の元を入力として 0 または 1 を出力するアルゴリズム Ker を選ぶ。ここでアルゴリズム Ker は、入力 $g \in G$ が $\ker(\varphi)$ の元であれば 1、そうでなければ 0 を出力するものとする。それ以外の条件は後述する。この公開鍵暗号方式の公開鍵は群 $\widetilde{G}$ の記述、$\mathcal{G}_G$ および $\mathcal{G}_{\ker}$ であり、一方、秘密鍵はアルゴリズム Ker（より正確には Ker の値を計算するために必要となる補助情報）である。また、平文は 0 または 1 とする。なお、以下で群 G ないし $\ker(\varphi)$ の元をランダムに生成する際には、生成系 $\mathcal{G}_G$ ないし $\mathcal{G}_{\ker}$ の元をランダムにたくさん選んで掛け合わせることで、結果が一様分布に充分近くなるようにするものとする。その際に必要な生成元の個数などの詳細については割愛する。

この方式では、暗号化アルゴリズムと復号アルゴリズムに加えて、平文の AND 演算と NOT 演算を実現するための暗号文に対する操作を定義する（一般の演算は AND と NOT の組合せで実現する）。

暗号化アルゴリズム 平文 $m \in \{0,1\}$ に対して、$c_2 \in G$ と $h \in \ker(\varphi)$ をランダムに生成し、元 $c_1 \in G$ を

$$\begin{cases} m = 0 \text{ のとき} & c_1 := h \\ m = 1 \text{ のとき} & c_1 := c_2 \cdot h \end{cases} \tag{1}$$

によって定める。そして、このアルゴリズムは暗号文 $c := (c_1, c_2)$ を出力する。

復号アルゴリズム 暗号文 $c = (c_1, c_2)$ に対して、ビット $\mathsf{Ker}(c_1) \in \{0,1\}$ を復号結果として出力する。

AND 演算アルゴリズム 暗号文 $c_i = (c_{i,1}, c_{i,2})$（$i \in \{1,2\}$）に対して、$g \in G$ をランダムに選び、

$$c'_1 := [g \cdot c_{1,1} \cdot g^{-1}, c_{2,1}]\,,\ c'_2 := [g \cdot c_{1,2} \cdot g^{-1}, c_{2,2}] \tag{2}$$

によって新しい暗号文 $c_1 \wedge c_2 = (c'_1, c'_2)$ を得る。ここで $[g,h] := ghg^{-1}h^{-1}$ は交換子を表す。

NOT 演算アルゴリズム 暗号文 $c = (c_1, c_2)$ に対して、

$$c'_1 := {c_1}^{-1} \cdot c_2\,,\ c'_2 := c_2 \tag{3}$$

によって新しい暗号文 $\neg c = (c'_1, c'_2)$ を得る。

3.3 性質

ここではまず、上記の公開鍵暗号方式の機能について述べる。安全性については後述する。

上記の方式は、どんな群を用いて構成してもよいわけではなく、（完全）準同型暗号となるためには群 G_{im} が何らかの条件を満たしている必要がある。その一つの充分条件は以下のようになる。ここで、群 G_{im} は安全性レベルと関係する何らかの正整数パラメータ（セキュリティパラメータ）λ に依存する形で選ばれているものとし、同様にパラメータ λ に依存するある量 $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) \in [0,1]$ が「ほぼ 1 である」ということを、どのような正の多項式 $P(t)$ についても、ある値より大きな全ての λ において $1 - \varepsilon(\lambda) < 1/P(\lambda)$ が成り立つことと定義する。（暗号分野の用語を用いると、これは $1-\varepsilon$ が λ に関して negligible な量であることに他ならない。）以上の準備のもと、上記の充分条件は以下のように定義される。

定義 1 (交換子に関する分離性)**.** 群 G_{im} が「交換子に関して分離的」(commutator-separable) であるとは、$|X|/|G_{\mathrm{im}}|$ がほぼ 1 であるような $G_{\mathrm{im}} \setminus \{1\}$ の部分集合 X と値がほぼ 1 の関数 $\mu = \mu(\lambda)$ で以下を満たすものが存在することと定める：どの元 $x_1, x_2 \in X$ についても、$g \in G_{\mathrm{im}}$ を一様ランダムに選んだときに $[gx_1g^{-1}, x_2] \in X$ となる確率は μ 以上である。

もう少し用語を導入する。G_{im} が交換子に関して分離的であると仮定し、$X \subset G_{\mathrm{im}} \setminus \{1\}$ を定義 1 のように選んでおく。このとき、暗号文 $c = (c_1, c_2)$ が「0 型」であるということを $\varphi(c_2) \in X$ かつ $\varphi(c_1) = 1$ によって、また「1 型」であるということを $\varphi(c_2) \in X$ かつ $\varphi(c_1) = \varphi(c_2)$ によって定義する。すると以下の性質が成り立つことがわかる。

- 0 型および 1 型の暗号文を復号すると結果は 0 および 1 となる。これは復号アルゴリズムの定義と $1 \notin X$ より明らかである。
- 平文 $m \in \{0, 1\}$ を暗号化するとき、$m = 0$ ならば暗号文はほぼ 1 の確率で 0 型になり、$m = 1$ ならば暗号文はほぼ 1 の確率で 1 型になる。これは暗号化アルゴリズムの定義と、$|X|/|G_{\mathrm{im}}|$ がほぼ 1 であることによる。
- b_1 型の暗号文 c_1 と b_2 型の暗号文 c_2 について、$c_1 \wedge c_2$ はほぼ 1 の確率で $b_1 \wedge b_2$ 型（後者の $\wedge$ はビットに対する AND 演算）の暗号文となる。これは定義 1 の条件および交換子の性質 $[g, 1] = [1, g] = 1$（$b_1 = 0$ または $b_2 = 0$ の場合に関係してくる）より導かれる。
- b 型の暗号文 c について、$\neg c$ は常に $\neg b$ 型（後者の $\neg$ はビットに対する NOT 演算）の暗号文となる。これは定義より明らかである。

以上の対応関係により所望の結果が導かれる。すなわち、

定理 2. G_{im} が交換子に関して分離的ならば、上記の方式は完全準同型暗号である。

なお、交換子に関して分離的な G_{im} の具体例としては特殊線型群 $SL_2(\mathbb{F}_p)$（ここで p はパラメータ λ に関して指数関数的に大きな素数）が挙げられる。このことは以下の補題および $G_{\mathrm{im}} = SL_2(\mathbb{F}_p)$ の各元 x における中心化群 $Z_{G_{\mathrm{im}}}(x)$ の濃度の計算によって導かれるが、詳細はページ数の都合で割愛する。

補題 3. $G_{\mathrm{im}} := SL_2(\mathbb{F}_p)$、$X := G_{\mathrm{im}} \setminus \{\pm I\}$ とすると、任意の元 $x_1, x_2 \in X$ について

$$Pr[\,[gx_1g^{-1}, x_2] \notin X] \leq \frac{(|G_{\mathrm{im}}| - |X|) \cdot |Z_{G_{\mathrm{im}}}(x_1)| \cdot |Z_{G_{\mathrm{im}}}(x_2)|}{|G_{\mathrm{im}}|} = \frac{2 \cdot |Z_{G_{\mathrm{im}}}(x_1)| \cdot |Z_{G_{\mathrm{im}}}(x_2)|}{p^3 - p} \tag{4}$$

が成り立つ。ここでの確率は $g \in G_{\mathrm{im}}$ を一様ランダムに選んだときの確率を表す。

証明の概略. $y := [gx_1g^{-1}, x_2] \notin X$ となる $g \in G_{\mathrm{im}}$ の総数が右辺の分子以下であることを示せばよい。各 y ごとに、$z := gx_1g^{-1}$ と置くと $zx_2z^{-1} = yx_2$ であり、こうなる z の可能性は高々$|Z_{G_{\mathrm{im}}}(x_2)|$ 通りである。また、これらの z の各々について、$gx_1g^{-1} = z$ となる g の可能性は高々$|Z_{G_{\mathrm{im}}}(x_1)|$ 通りである。以上を掛け合わせて冒頭の主張が示される。 □

問題 4. 交換子に関して分離的な群の具体例は他にないだろうか？例えば、対称群 S_n（n はパラメータ λ に応じて適度に増大するものとする）は交換子に関して分離的だろうか？(なお、可解群は交換子に関して分離的でないことを示すことができる。素朴に考えると、何らかの意味で「可解群からほど遠い」群、例えば完全群（perfect group、$[G, G] = G$ となる群のこと）やそれに準ずる群を選ぶのが望ましいと思われる。)

次に安全性に関して、暗号理論的な定式化は割愛するけれども、公開情報である群 $\widetilde{G}$ の記述と G および $\ker(\varphi)$ の生成系 $\mathcal{G}_G$ および $\mathcal{G}_{\ker}$ と、ランダムな暗号文 $c = (c_1, c_2)$ だけが与えられている（つまり、アルゴリズム Ker の情報を持っていない）状態で、c が 0 と 1 どちらの平文に対応しているかを識別することが現実的な時間では困難である必要がある。これは具体的な群 G や写像 φ などの選び方に依存する性質である。

3.4 具体例

最後に、上記の方式に則った構成の具体例を挙げる。セキュリティパラメータ λ に応じて、λ に関して指数関数的に大きな異なる素数 $p \neq q$ を選び、$N := pq$ とおく。群 K とその部分群 K_0、および群準同型写像 $\mathsf{ind}\colon K_0 \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ を以下の条件を満たすように選ぶ（具体例は後述）。

1. K における K_0 の元の共役元たちが K を生成する。
2. K の中で互いに共役でない K_0 の二つの元 g_1 および g_2 で $\mathsf{ind}(g_1) \neq \mathsf{ind}(g_2)$ となるものが存在する。

この写像 ind を群環からの環準同型写像 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[K_0] \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ へ自然に拡張し（これも ind と書く）、さらに行列の各成分ごとにこの写像を施すことで群準同型写像 $GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[K_0]) \to GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ を定義する（これも ind と書く）。一方、行列の各成分ごとに自然な射影 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ を施すことで群準同型写像 $\sigma\colon SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{F}_p)$ を定義する。また、以下では 2 次正方行列 $A_0, A_1, \ldots, A_{\ell-1}$ を左上から右下へ対角線上に並べた上で他の成分を全て 0 としてできる 2ℓ 次正方行列を $\mathrm{diag}(A_0, A_1, \ldots, A_{\ell-1})$ と記す。

整数 $\ell \geq 1$ を選び、群 $\widetilde{G}$ を $\widetilde{G} := GL_{2\ell}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[K])$ で定める。そして、行列 $T \in \widetilde{G}$ をランダムに選ぶ。次に、$GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[K_0])$ の元 A_1, A_2, A_3, A_4 を以下の条件を満たすように選ぶ。

1. 各 $i \in \{1,2,3,4\}$ について $\mathsf{ind}(A_i) \in SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ である。
2. $\sigma(\mathsf{ind}(A_1))$ と $\sigma(\mathsf{ind}(A_2))$ は $SL_2(\mathbb{F}_p)$ を生成する（$SL_2(\mathbb{F}_p)$ は 2 元生成なのでこれは可能である）。
3. $\mathsf{ind}(A_3)$ と $\mathsf{ind}(A_4)$ は $\ker(\sigma)$ を生成する（証明は割愛するが $\ker(\sigma) \simeq SL_2(\mathbb{F}_q)$ であり、$SL_2(\mathbb{F}_q)$ は 2 元生成なのでこれは可能である）。

各 $i \in \{1,2,3,4\}$ と $j \in \{1, \ldots, \ell-1\}$ について、$A'_{i,j} \in GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[K])$ をランダムに選ぶ。また、$g_i \in \widetilde{G}$ を $g_i := T \cdot \mathrm{diag}(A_i, A'_{i,1}, \ldots, A'_{i,\ell-1}) \cdot T^{-1}$ で定める。そして $\mathcal{G}_G := \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$、$\mathcal{G}_{\ker} := \{g_3, g_4\}$ と定める。G を $\mathcal{G}_G$ が生成する $\widetilde{G}$ の部分群とし、$G_{\mathrm{im}} := SL_2(\mathbb{F}_p)$ と定める。

最後に写像 φ の定義を述べる。各 $g \in G$ について、2ℓ 次正方行列 $T^{-1}gT$ の左上 2×2 部分を切り出した 2 次正方行列を D_g と置くと、上述した G の生成元の定義より $D_g \in GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[K_0])$ かつ $\mathsf{ind}(D_g) \in SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ が成り立つ。これを踏まえて、$\varphi(g) := \sigma(\mathsf{ind}(D_g))$ として群準同型写像 $\varphi\colon G \to G_{\mathrm{im}}$ を定義する。アルゴリズム Ker は、入力 $g \in G$ について $\varphi(g)$ を実際に計算して、$\varphi(g) = 1$ であれば 0 を出力し、そうでなければ 1 を出力するものとする。以上の構成において、N（$= pq$）、K、ℓ、$\mathcal{G}_G$、$\mathcal{G}_{\ker}$ が公開情報であり、φ の計算に必要となる p、q、K_0、ind、T が秘密情報である。

例 5. 上記の群 K や写像 ind の一例を示す。$p \equiv q \equiv 1 \pmod 4$ とし、$K := S_4$、K_0 は巡回置換 $\tau := (1\,2\,3\,4)$ が生成する部分群、$\zeta \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ を 1 の 4 乗根（p と q の選び方よりこれは存在する）とし、群準同型写像 $\mathsf{ind}\colon K_0 \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ を $\mathsf{ind}(\tau) := \zeta$ で定義する。すると $\mathsf{ind}(\tau^{-1}) = \zeta^{-1} \neq \zeta = \mathsf{ind}(\tau)$ であり、また τ^{-1} と τ は K の中で共役である。以上より K、K_0 および ind に関する条件が満たされる。

上記の構成の要点を述べると、「気持ち」としては、$G = SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$、$G_{\mathrm{im}} = SL_2(\mathbb{F}_p)$ として、写像 φ を $\varphi = \sigma$ で定義するぐらいの簡単な構成にしたい（G_{im} も $\ker(\varphi) \simeq SL_2(\mathbb{F}_q)$ も充分大きいので、少なくとも総当たりで暗号が破られることはないであろう）のだが、このままでは写像 φ が簡単に計算できてしまう。そこで、G をより大きい複雑な群 $\widetilde{G}$ の中に埋め込み、その埋め込みのパラメータを秘密にすることで φ を直ちに計算できないようにしたいと考える。今回は、G を（ランダム成分を適度に付け加えた上で）$\widetilde{G}$ の中に対角線上に埋め込んだ上で、秘密の行列 T による共役を取ることでこのような秘密の埋め込みを実現しようとしている。その際、行列群 $\widetilde{G}$ の係数環が可換だと、行列の特性多項式のように共役不変な量が（比較的）簡単に計算できてしまい、T での共役による霍乱の効果が薄れてしまう恐れがあるため、非可換な係数環 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[K]$ を用いている。また、φ の計算に用いる準同型写像 $\mathsf{ind}\colon \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[K_0] \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}[K]$ へ拡張できたとすると、その写像によって行列の係数を可換環へ写すことで攻撃が容易となる恐れがあるが、上記の ind に関する条件 2. よりそのような拡張が存在しないこともわかる。このように安全性を得るための工夫を講じてはいるものの、より理論的な安全性解析までには至っていないため、その点は今後の課題である。また、上記以外のより良い具体的構成を探すことも今後の課題である。

参考文献

[1] T. ElGamal, A Public-Key Cryptosystem and a Signature Scheme Based on Discrete Logarithms, *IEEE Transactions on Information Theory* **31**(4) (1985) 469–472

[2] W. Diffie and M. E. Hellman, New Directions in Cryptography, *IEEE Transactions on Information Theory* **22**(6) (1976) 644–654

[3] P. W. Shor, Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer, *SIAM Journal on Computing* **26**(5) (1997) 1484–1509

[4] K. H. Ko, S. Lee, J. H. Cheon, J. W. Han, J.-S. Kang and C. Park, New Public-Key Cryptosystem Using Braid Groups, in: *Proceedings of CRYPTO 2000*, Lecture Notes in Computer Science vol.1880, 2000, pp.166–183

[5] D. Hofheinz and R. Steinwandt, A Practical Attack on Some Braid Group Based Cryptographic Primitives, in: *Proceedings of PKC 2003*, Lecture Notes in Computer Science vol.2567, 2003, pp.187–198

[6] S. Blackburn, C. Cid and C. Mullan, Group Theory in Cryptography, in: *Proceedings of Group St Andrews 2009 in Bath*, LMS Lecture Note Series vol.387, 2011, pp.133–149

[7] D. Kahrobaei, C. Koupparis and V. Shpilrain, Public key exchange using matrices over group rings, *Groups Complexity Cryptology* **5**(1) (2013) 97–115

[8] 縫田光司、「ある条件を満たす非可換群を用いた完全準同型暗号の簡明な構成法」、2014 年暗号と情報セキュリティシンポジウム（SCIS2014）にて発表予定、2014 年 1 月

[9] C. Gentry, Fully homomorphic encryption using ideal lattices, in: *Proceedings of STOC 2009*, 2009, pp.169–178

Dehn-twist presentations of periodic mapping classes and splitting of singular fibers

奥田喬之*（九州大学大学院数理学府）

概要

Riemann 面の（極小な）退化の位相同値類と，向き付けられた実閉曲面の写像類群における負型擬周期的写像類の共役類とは，一対一に対応することが知られている．本講演の目標は，「与えられた周期的写像類を Dehn ツイストの合成として具体的に表示する」という問題に対して，上の事実に基づき「退化の特異ファイバーを複数の Lefschetz ファイバーに分裂させる」操作を対応づけることによって，より有効な手法を導入することである．本テクニカルレポートでは，この問題の背景から geometric presentation に至るまでの入門的な内容を説明する．

1 序

Σ_g を種数 $g \geq 1$ の向き付けられた実閉曲面とする．Σ_g の向きを保つ自己同相写像全体のなす集合 $\mathrm{Homeo}^+(\Sigma_g)$ は写像の合成を積として群をなすが，さらにそのアイソトピー類のなす集合（つまり連続的な変化で移りあう自己同相写像同士を同一視したもの）にも自然に群構造が誘導される．これを**写像類群**（**mapping class group**）と呼び，MCG_g と表す．写像類群は，トポロジーの分野において盛んに研究がなされている対象の一つである．写像類群 MCG_g は，有限個の Dehn ツイストによって生成されることが知られている [De]．ここで **Dehn ツイスト**とは，Σ_g 上の単純閉曲線に沿って Σ_g を一度切り，1 回転捻ってからそのまま貼り合せるという操作である（図 1 左）．この事実から「与えられた写像類群の元に対して Dehn ツイストの合成としての具体的な表示を見つける」という極めて自然な問題が考えられる．こうした表示を **Dehn ツイスト積表示**（**Dehn-twist presentation**）と呼ぶ．

以下では，特に**周期的写像類**，つまり MCG_g の有限位数の元を考えることにしよう．Nielsen [Ni] によって，Σ_g の周期的写像類は **total valency** と呼ばれる組合せ的なデータを用いて up to conjugacy で完全に記述される事が示されている（§2）．そこで次の問題を考えることにする．

問題 1.1. 与えられた *total valency* をもとに周期的写像類の *Dehn* ツイスト積表示を見つけ出す手法を構築する．

* *E-mail*: t-okuda@math.kyushu-u.ac.jp
Webpage: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~t-okuda/

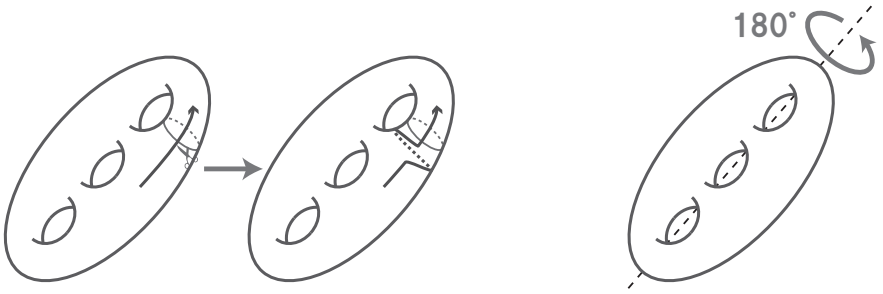


図 1　Σ_3 の向きを保つ自己同相写像の例．単純閉曲線に沿った右手捻り Dehn ツイスト（左）と超楕円的対合（右）．

実は，種数 $g = 4$ までの場合に対しては，廣瀬 [Hi] によって周期的写像類の Dehn ツイスト積表示のリストが具体的に得られている．しかしながら，その一部は計算機を使って地道に調べ上げることによって得られており，一般種数に対する Dehn ツイスト積表示を得るための一貫した手法はまだ確立されていない．

我々はこの問題へのアプローチとして，Riemann 面の退化に対する分裂変形を用いることにしよう．**Riemann 面の退化**とは，複素 1 パラメータの複素曲線の族であって，特異点を含む複素曲線（**特異ファイバー**）を唯一つ持つことを許容したものである（正確には §3 参照）．Riemann 面の退化の位相的分類の研究としては，松本・Montesinos [MM] の働きによって，Riemann 面の（極小な）退化の位相同値類は，写像類群における負型擬周期的写像類と呼ばれる写像類の共役類と，位相モノドロミーを通して一対一に対応することが示された（定理 3.1）．例えば，ある意味でもっとも簡単な（原子的な）特異ファイバーである Lefschetz ファイバーを持つ Riemann 面の退化は，その消滅サイクルに沿った右手捻り Dehn ツイストに対応している．そこで，「周期的写像類の Dehn ツイスト達への分解」に「対応する特異ファイバーの Lefschetz ファイバー達への分裂」を対応づけることによって，周期的写像類の Dehn ツイスト積表示（geometric presentation）を見つける新たな手法を構築しよう．特に我々は，高村 [Ta,III] によって考え出された**はがし変形**と呼ばれる分裂変形の構成理論を用いることにする．

2　周期的写像類の total valency

まず，周期的写像類を記述するため，Nielsen [Ni] が導入した **total valency** を定義しよう．

$f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ を向きを保つ周期的自己同相写像とする．つまり，ある正の整数 m に対して $f^m = \mathrm{id}_{\Sigma_g}$ が成り立つ．そうした m のうち最小のものを改めて m とおき，これを f の**周期**という．Σ_g のほとんどすべての点は f を m 回作用させることで初めて元の位置に戻るが，そうでない点も存在しうる．Σ_g の点 x が **multiple point** であるとは $f^c(x) = x$ なる最小の正の整数が m より小さいときをいい，このとき c を f の x における **recurrence number** という．例えば，f の固定点は recurrence number 1 の multiple point である．さらに正の整数 $\ell := m/c$ をとると，f^c は x を中心

とする十分小さい円板を保ち，時計回りに角度 $2\pi b/\ell$ の rotation としてふるまう．ここで，b/ℓ は既約真分数．これに対して，q を $bq \equiv 1 \bmod \ell$ を満たす 1 以上 $\ell - 1$ 以下の正の整数として定義する．このとき，$\theta := cq$ を f の x における **valency**[*1] とよぶ．

次に，f で生成される巡回群作用による Σ_g の商空間 $\overline{\Sigma}_g := \Sigma_g/\langle f \rangle$，つまり f で移りあう点を同一視して得られる空間を考えよう．$\overline{g}$ を $\overline{\Sigma}_g$ の種数とする．このとき，商写像 $\psi : \Sigma_g \to \overline{\Sigma}_g$ は m 重分岐被覆となっている．つまり，ψ はほとんどすべての点で m 重非分岐被覆であるが，有限個の点 $p_1, p_2, \ldots, p_h \in \overline{\Sigma}_g$ の上では分岐している．これらの点を ψ の **branch point** という．各 branch point $p_j\,(j = 1, 2, \ldots, h)$ に対して $\tilde{p}_j \in \psi^{-1}(p_j)\,(\subset \Sigma_g)$ をとると，$\tilde{p}_j$ は f の multiple point となっている．したがって，f の $\tilde{p}_j$ における recurrence number c_j と valency θ_j が定義されるが，これは $\tilde{p}_j$ の取り方に依らず，p_j のみに依存する．（実際，$c_j = \#\psi^{-1}(p_j)$ となっている．）そこで，θ_j を branch point p_j の **valency** と呼ぶ．

こうして得られた周期 m と，$\overline{\Sigma}_g$ の種数 $\overline{g}$，各 branch point の valency θ_j からなるデータ

$$[m, \overline{g}; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h]$$

を f の **total valency** と呼ぶ．次の定理から，total valency によって f の共役類が完全に記述されていることがわかる．

定理 2.1 ([Ni])**.** *f, f' を，各々 $[m, \overline{g}; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h], \left[m', \overline{g}'; \theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_{h'}\right]$ を total valency に持つ実閉曲面 Σ_g の周期的自己同相写像とする．このとき，f と f' が共役であるための必要十分条件は次の条件を満たすことである．*

(a) $m = m'$.

(b) $h = h'$.

(c) （適当な添え字の付け替えの下で）各 j に対し，$\theta_j = \theta'_j$.

さらにこのとき，$\overline{g} = \overline{g}'$ が成り立つ．

周期的写像類に対する total valency を，代表元である周期的自己同相写像の total valency として定義する．

節を終える前に，既約な写像類について説明しておこう．Σ_g の自己同相写像 f が可約であるとは，空でない Σ_g 上の単純閉曲線の非交和 $C = \gamma_1 \sqcup \gamma_2 \sqcup \cdots \sqcup \gamma_k$ が存在して $f(C) = C$ なるときをいう．例えば，Dehn ツイストや超楕円的対合は明らかに可約である．さらに，可約な自己同相写像で代表される写像類を可約であるといい，そうでない写像類を既約であるという．既約な周期的写像類に関しては，次が成り立つ．

補題 2.2. *total valency $[m, \overline{g}; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h]$ を持つ周期的写像類が既約であるための必要十分条件は，$\overline{g} = 0$ かつ $h = 3$ であることである．*

[*1] [Hi] [Is] のように既約真分数 $q/\ell\,(= \theta/m)$ を valency と定義することも多い．

3　Riemann 面の退化と分裂変形

M を滑らかな複素曲面（複素 2 次元多様体），Δ を $\mathbb{C}$ 上の単位開円板，$\pi : M \to \Delta$ を M から Δ への固有全射正則写像とする．このとき，各点 $s \in \Delta$ の逆像 $X_s := \pi^{-1}(s)$ はコンパクトな複素曲線であり，これを s 上のファイバーと呼ぶ．$\pi : M \to \Delta$ が種数 g の **Riemann 面の退化**であるとは，原点上のファイバー X_0 が π の特異点を含み（X_0 を**特異ファイバー**と呼ぶ），それ以外の一般ファイバー $X_s\,(s \in \Delta^* := \Delta \setminus \{0\})$ が種数 g の閉 Riemann 面となっているときをいう．すなわち，Riemann 面の退化とは，複素 1 パラメータの複素曲線の族で，特異点を含む複素曲線を 1 つだけ許容したものである．

ここで松本・Montesinos [MM] によって示された，Riemann 面の退化の位相的分類上非常に重要な次の定理を振り返っておこう．

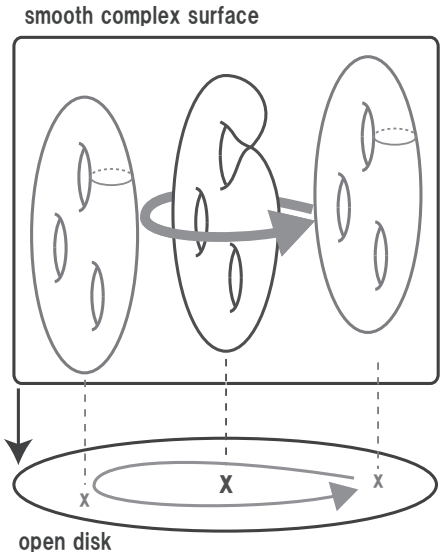


図 2　Lefschetz ファイバーを持つ種数 3 の Riemann 面の退化．

定理 3.1 ([MM])**.** $g \geq 2$ に対して，種数 g の *Riemann* 面の極小な退化の位相同値類と，写像類群 MCG_g における負型擬周期的写像類の共役類とは，位相モノドロミーを通して一対一に対応する．

ここで，位相モノドロミーとは，基点 $s_0 \in \Delta^*$ 上の一般ファイバー X_{s_0} を Σ_g とみなし，基本群 $\pi_1(\Delta^*, s_0) \cong \mathbb{Z}$ の作用から誘導される Σ_g の写像類のことである．つまり位相モノドロミーは，一般ファイバーが特異ファイバーの周りを一周して元の位置に戻ってきたときにどう変化しているかを表している．例えば，右手捻り Dehn ツイストや周期的写像類は負型擬周期的写像類である．Lefschetz ファイバーを特異ファイバーに持つ Riemann 面の退化は，その**消滅サイクル**（一般ファイバー X_s 上の単純閉曲線で s を 0 に近づけると一点に潰れていくもの）に沿った右手捻り Dehn ツイストに対応する（図 3）．また，周期的写像類に対応する Riemann 面の退化は，適当なブローアップを施すことによって**星型特異ファイバー**をもつことが次からわかる．

補題 3.2. 種数 g の *Riemann* 面の正規極小な退化 $\pi : M \to \Delta$ が，位相モノドロミーとして Σ_g の周期的写像類で *total valency* が $[m, \overline{g}; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h]$ なるものを持つとする．このとき，その特異ファイバー X_0 は π の因子として，既約成分の形式和

$$X_0 = m\Theta_0 + \sum_{j=1}^{h} \mathbf{Br}^{(j)} \qquad \left(\mathbf{Br}^{(j)} = m_1^{(j)}\Theta_1^{(j)} + m_2^{(j)}\Theta_2^{(j)} + \cdots + m_{\lambda^{(j)}}^{(j)}\Theta_{\lambda^{(j)}}^{(j)}\right)$$

で表され，Θ_0 は種数 $\overline{g}$ の閉 *Riemann* 面，$\mathbf{Br}^{(j)}$ は Θ_0 からのびる重複度付き *Riemann* 球面鎖で（必要ならば添え字 j を付け替えることで）$m_1^{(j)} = \theta_j$ となっている．

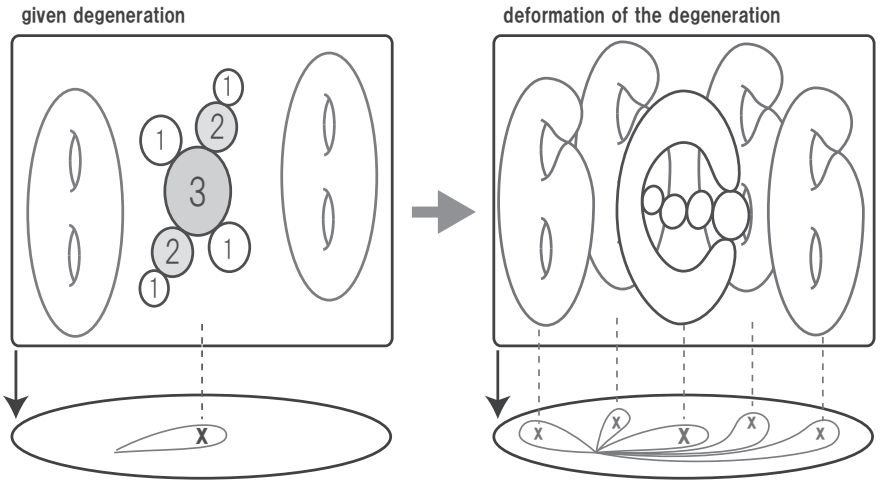


図 3　星型特異ファイバー $[3,0;1,1,2,2]$ を Lefschetz ファイバーに分裂させる変形の例.

このことから，Riemann 面の正規極小な退化の星型特異ファイバーは，形式的に周期的モノドロミーの total valency を用いることで

$$X_0 = [m, \overline{g}; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h]$$

と表せる．特に，補題 2.2 より，既約な周期的モノドロミーを持つ特異ファイバーは $X_0 = [m, 0; \theta_1, \theta_2, \theta_3]$ であり，Riemann 球面 Θ_0 から 3 本の Riemann 球面鎖がのびたものである．

さて，それでは次に，特異ファイバー X_0 を持つ Riemann 面の退化 $\pi : M \to \Delta$ に対する分裂変形をここで正確に定義しておこう．

$\mathscr{M}$ を複素 3 次元多様体，$\Delta^\dagger$ を $\mathbb{C}$ 上の十分小さな開円板，$\Psi : \mathscr{M} \to \Delta \times \Delta^\dagger$ を $\mathscr{M}$ から $\Delta \times \Delta^\dagger$ への固有平坦全射正則写像とする．このとき，$\Delta \times \Delta^\dagger$ の任意の点の上のファイバーはコンパクトな複素曲線となっている．各 $t \in \Delta^\dagger$ に対して，$\Delta_t := \Delta \times \{t\}$, $M_t := \Psi^{-1}(\Delta_t)$, $\pi_t := \Psi\big|_{M_t} : M_t \to \Delta_t$ とおく．与えられた $\pi : M \to \Delta$ が $\pi_0 : M_0 \to \Delta_0$ と一致すると仮定しよう．このとき，$\Psi : \mathscr{M} \to \Delta \times \Delta^\dagger$ を退化 $\pi : M \to \Delta$ に対する**変形族**といい，各 $\pi_t : M_t \to \Delta_t \, (t \in \Delta^\dagger \setminus \{0\})$ を $\pi : M \to \Delta$ の**変形**と呼ぶ．特に $\Psi : \mathscr{M} \to \Delta \times \Delta^\dagger$ が $\pi : M \to \Delta$ に対する**分裂族**であるとは，$\pi : M \to \Delta$ の全ての変形 $\pi_t : M_t \to \Delta_t \, (t \in \Delta^\dagger \setminus \{0\})$ が少なくとも 2 本の特異ファイバーを持つ複素曲線の族であるときをいう．またその特異ファイバー達を $X'_{s_1}, X'_{s_2}, \ldots, X'_{s_N}$ $(N \geq 2)$ としたとき，$\pi : M \to \Delta$ の特異ファイバー X_0 は $X'_{s_1}, X'_{s_2}, \ldots, X'_{s_N}$ に**分裂する**という．ここで，π_t の特異値集合 $s_1, s_2, \ldots, s_N \in \Delta_t$ は t のとり方に依存するが，その個数（つまり特異ファイバーの本数）N とそれらの特異ファイバーの位相型は t によらないことに注意されたい．

分裂族の構成方法は二つ知られている．一つは，種数 1 の場合に対して Moishezon [Mo] が示した 2 重被覆を経由した手法 **double covering method** である．これは堀川 [Ho] によって種数 2 の場合にも適用され，さらに荒川・足利 [ArAs] はこの手法を一般種数の超楕円的な退化へと拡張した．ただし，種数 $g = 1, 2$ の退化は全て超楕円的であるが，$g \geq 3$ では非超楕円的な退化が存在し，

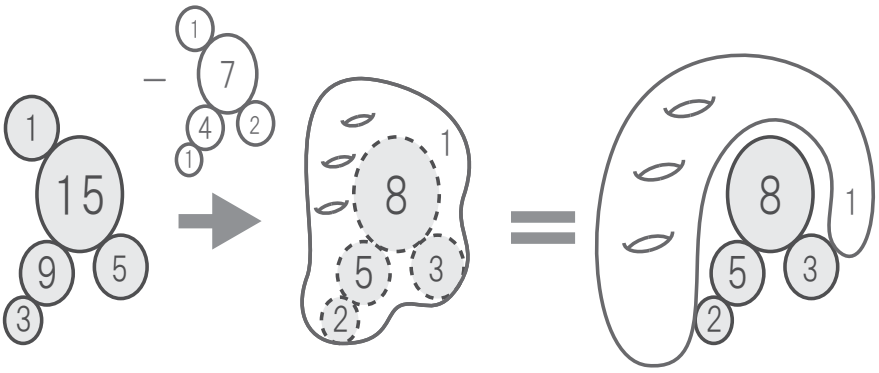


図 4　星型特異ファイバー $[15, 0; 1, 5, 9]$ に対する，simple crust $[7, 0; 1, 2, 4]$ によるはがし変形.

それらに対してはこの手法が適用できないことに注意.

もう一つは，高村 [Ta,III] によって考え出された構成法で，これにより得られる変形を**はがし変形**（**barking deformation**）と呼ぶ．ここでは，星型特異ファイバーに対するはがし変形について，正確な定義や条件の説明は省きそのアイディアのみを紹介する．詳細は [Ta,III] を，特に星型特異ファイバーに対しては，[AhAw] や [O1] も参考にされたい.

星型特異ファイバー $X_0 = m_0\Theta_0 + \sum_{j=1}^{h} \mathbf{Br}^{(j)}$ の連結な部分因子

$$Y = n_0\Theta_0 + \sum_{j=1}^{h} \mathbf{br}^{(j)} \qquad \left(\mathbf{br}^{(j)} = n_1^{(j)}\Theta_1^{(j)} + n_2^{(j)}\Theta_2^{(j)} + \cdots + n_{\nu^{(j)}}^{(j)}\Theta_{\nu^{(j)}}^{(j)}\right)$$

を考えよう．各 Riemann 球面鎖 $\mathbf{br}^{(j)}$ の端の既約成分 $\Theta_{\nu^{(j)}}^{(j)}$ の重複度 $n_{\nu^{(j)}}^{(j)}$ がある算術的条件を満たし，かつ，他の既約成分の Y における “形式的” 自己交差数が X_0 における自己交差数と一致するとき，Y を X_0 の **simple crust** と呼ぶ．X_0 に対してある simple crust Y が存在するとき，Y から誘導される変形族が存在して，X_0 がその一部分としての Y を「はがしとられる」ようにしてより重複度の小さくなった特異ファイバー X_0' へと変形する（図 4）．この変形族を**はがし変形族**という．特異ファイバーの周りの位相モノドロミーが変形前と後とで明らかに変化しているため，必然的に X_t' 以外にも変形後の特異ファイバーが存在することになる．したがって，はがし変形族は分裂族であるとわかる.

4　Geometric presentation

X_0 を，与えられた周期的写像類 $[f]$ を位相モノドロミーに持つ Riemann 面の退化の星型特異ファイバーとしよう．X_0 が複数の特異ファイバー $X_1', X_2', \ldots, X_N'$ $(N \geq 2)$ に分裂するとき，X_0 の周りの位相モノドロミー $[f]$ は，分裂後の特異ファイバー達 $X_1', X_2', \ldots, X_N'$ それぞれの周りの局所位相モノドロミーの合成と共役になる．したがって，もし X_0 が Lefschetz ファイバー[*2] へと分裂

[*2] Lefschetz ファイバーは，普通 Lefschetz 特異点を “唯一つ” 持つファイバーとして定義されるが，ここでは複数の Lefschetz 特異点を持つことを許容する.

する変形が存在するならば，それらの消滅サイクルに沿った右手捻り Dehn ツイストの合成として $[f]$ の Dehn ツイスト積表示が得られることになる．こうして得られる Dehn ツイスト積表示を **geometric presentation** と呼ぶ．周期的写像類の geometric presentation を得る上で問題となるのは次の 2 つである．

(1) 星型特異ファイバーが複数の Lefschetz ファイバーへと分裂するような変形が存在するのはいつか？あるいは常に存在するのか？

(2) 星型特異ファイバーが複数の Lefschetz ファイバーへ分裂するとき，その消滅サイクルをいかにして一つの一般ファイバー上に記述するか？

石坂 [Is] は実際に double covering method を用いて，超楕円的な周期的写像類（超楕円的対合と可換な周期的写像類）に対する geometric presentation を与えた．一方，我々ははがし変形を用いてアプローチするため，非超楕円的な退化を含めたより多くの周期的写像類に対する geometric presentation が得られることが期待される．(2) に関しては，はがし変形の下での消滅サイクルを実際に記述する理論は整備できている[*3]が，紙面の都合上詳細は [O2] に託すことにする．

最後に，はがし変形による分裂族の存在性から示される (1) に関する結果を紹介しよう．その前に，周期的写像類に対するある意味での「基底」を次で定義する．

定義 4.1. $\mathscr{P}_g\,(\subset \mathrm{MCG}_g)$ を Σ_g の周期的写像類からなる集合とする．$\mathscr{P}_g$ の部分集合 $R_g = \{[f_1],[f_2],\dots,[f_k]\}$ が **root set** であるとは，次の 2 条件をみたすときをいう．

- 任意の $[g] \in \mathscr{P}_g$ は，$[f_1],[f_2],\dots,[f_k]$ のいずれかの冪となっている．
- $[f_1],[f_2],\dots,[f_k]$ は，互いにほかの冪になっていない．

つまり，周期的写像類 $[f]$ の Dehn ツイスト積表示が得られると，$[f]$ の冪で表される周期的写像類 $[f]^k$ の Dehn ツイスト積表示も自動的に得られることになるため，実際は全ての周期的写像類を考察する必要がないのである．

定理 4.2 ([O2])**.** $g = 1,2,\dots,5$ に対して，ある *root set* R_g が存在し，R_g に含まれる任意の**既約な**周期的写像類 $[f]$ は *geometric presentation* をもつ．即ち，$[f]$ を位相モノドロミーにもつ *Riemann* 面の退化に対し，特異ファイバーを *Lefschetz* ファイバーに分裂させるような分裂族が存在する．

注意 4.3. 適当な root set をとり，それに含まれる任意の周期的写像類が geometric presentation を持つならば，全ての周期的写像類の Dehn ツイスト積表示が得られたことになる．一方，この定理によって Dehn ツイスト積表示は得られるのは**既約な周期的写像類の冪で表される全ての周期的写像類**であって，全ての周期的写像類という訳ではない．しかしながら，この結果から表示の得られたものは，以下の通り，周期的写像類のうちの大部分を占めていることがわかる．

[*3] ただし，具体的な消滅サイクルの表示自体は，種数の低い（正確には周期の小さい）場合には *Monomie* [Ah] を用いることで成功しているが，高種数の場合は計算機上の問題でうまくいっていないものもある．

種数	1	2	3	4	5
周期的写像類の数	**7**	**17**	**47**	**72**	**76**
root set の周期的写像類の数	2	4	9	12	13
root set の既約な周期的写像類の数	2	3	7	7	5
既約な周期的写像類の冪で表される写像類の数	**7**	**16**	**45**	**64**	**56**

参考文献

[Ah] K. Ahara, *Monomie*, Software (`http://www.math.meiji.ac.jp/~ahara/`)

[AhAw] K. Ahara, and I. Awata, *Subordinate fibers of Takamura splitting families for stellar singular fibers*, J. Math. Soc. Japan **60** (2008), no. 4, 983–1007

[ArAs] T. Arakawa, and T. Ashikaga, *Local splitting families of hyperelliptic pencils I*, Tohoku Math. J. (2) **53** (2001), no. 3, 369–394

[De] M. Dehn, *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Das arithmetische Feld auf Flächen, Acta Math. **69** (1938), no. 1, 135–206 (in German)

[Hi] S. Hirose, *Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4*, Osaka J. Math. **47** (2010), no. 2, 385–421

[Ho] E. Horikawa, *Local deformation of pencil of curves of genus two*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **64** (1988), no. 7, 241–244

[Is] M. Ishizaka, *Presentation of hyperelliptic periodic monodromies and splitting families*, Rev. Mat. Complut. **20** (2007), no. 2, 483–495

[MM] Y. Matsumoto, and J. M. Montesinos-Amilibia, *Pseudo-periodic Maps and Degeneration of Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math. **2030** Springer-Verlag, 2011

[Mo] B. Moishezon, *Complex Surfaces and Connected Sums of Complex Projective Planes*, Lecture Notes in Math. **603**, Springer-Verlag, 1977

[Ni] J. Nielsen, *Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen*, Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **15** nr. 1 (1937) (in German); English translation: *The structure of periodic surface transformations* in Collected Papers **2** Birkhäuser (1986)

[O1] T. Okuda, *Singular fibers in barking families of degenerations of elliptic curves*, Preprint (arXiv:math.GT/1205.1592)

[O2] T. Okuda, *Dehn-twist presentations of periodic mapping classes and splitting of singular fibers*, In preparation

[Ta,II] S. Takamura, *Towards the classification of atoms of degenerations, II — Linearization of degenerations of complex curves*, RIMS Preprint, 1344 (2001)

[Ta,III] S. Takamura, *Towards the classification of atoms of degenerations, III — Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves*, Lecture Notes in Math. **1886**, Springer-Verlag, 2006

数式処理における数学と世界最速への挑戦：終結式の計算を例に

横山 俊一（Shun'ichi Yokoyama）[1]
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 / JST CREST

概要　数式処理とは, 代数・幾何・解析および関連する様々な数学を駆使し, 更に計算機の力を合わせることによって世の中の役に立つものを生み出す分野である. 本講演では自身の研究のうち, 多変数多項式を成分に持つ終結式（resultant）を計算するための Magma における最速パッケージの開発と, その基盤となる行列計算の高速実装の現状について概説する. 併せて, 終結式計算の様々な適用例（特に産業界への応用）についても紹介する.

1　数式処理の世界

数式処理という分野は symbolic computation や computer algebra などと英訳されるように, 基本的にはあらゆる数学的事象を計算機上で「記号的」「代数的」に取り扱い, それを適切に処理するための学問である. いわゆる**数値計算**（numerical computation）とは異なる意味で用いられるので, まずはじめに注意しておく.

計算機の近年の進歩は目覚ましく, 3 年前には不可能であった計算が現在は可能であるという話も珍しくない. それに伴ってソフトウェアの開発も進み, 特に数学業界においても汎用利用可能な数式処理システムが数多く誕生した. 例えば Wolfram Mathematica や MathWorks Matlab などは一度は使ったことのある方も多いかもしれない. これに加えて近年はオープンソース化の流行りに乗って, 統合システム Sage などのプロジェクトや, 数多くの数学ソフトウェアを Debian OS と共に収録した MathLibre プロジェクトなども進展している. これにより, 数学研究に使えるような高度な計算も手軽に行えるようになった.

数式処理システムの進歩は, それを開発するデベロッパ（developer）と, それを使うユーザ（user）のインタラクションが欠かせない. ユーザはシステムを徹底的に使い込み, 専門知識をベースとしてあらゆる要望や開発のための数学的アイデア, 時にはバグの報告を行う. デベロッパはそれを元に改善を行い, 最新版へフィードバックを行う. このサイクルが早ければ早いほど, より便利なシステムへと成長していく[2]. デベロッパはいわば我々が数式処理システムを快適に使えるようにするための「縁の下の力持ち」であり, その作業は時に困難を極めるが, 開発を通して普段は見えてこない数学の力をのぞき見ることが出来る.

本稿では有償数式処理システム **Magma** [2] に注目する. Magma とはオーストラリアのシドニー大学を中心として開発が進められているもので, 名前の由来は代数的構造の magma（数学用語）から来ている[3]. 前身は Cayley というソフトウェアで, 1993 年から現在の Magma という名称に変更された. これまでに 4,000 本を超える論文引用数を誇り, 全世界で広く使用されている. このソフトは代数学の知識を前提として開発されているため, 学部程度の代数学の予備知識（群論・環論・体論）が無ければ使いこなすのは難しく, 従って数学の専門家向けのシステムとなっている. Magma は多くの分野をカバーしているが, 特に整数論・群論・符号理論の研究者のユーザが多く, また最近では暗号系の研究者（企業を含む）のユーザも拡大している.

[1] s-yokoyama@imi.kyushu-u.ac.jp

[2] 例えば Sage という数式処理システムにおいては, デベロッパとユーザの垣根を出来るだけ低くし, 気軽に開発に参画出来るようにするため, 初心者でも扱いやすいプログラミング言語 Python を採用している.

[3] よく「Magma は何の頭文字ですか？」と御質問頂くのですが, 略称ではありません.

以下本稿では, 多変数多項式の終結式を計算するためのビルトイン（組込み）関数である `Resultant` を数百倍以上高速化するための取り組みについて報告する. 2 章で終結式計算の概説を行い, 3 章で高速化の手法と他システムの実装状況を解説する. 4 章でベンチマークの結果を述べて, 5 章で幾つかの応用例（特に産業界への応用）を紹介する.

2 終結式とは

まず最初に終結式を定義する. 2 つの多項式 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$, $g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$ を用意し, それぞれの係数を用いてシルベスター行列

$$Syl_x(f,g) = \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & \\ & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_0 & & \\ & b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_0 \end{pmatrix}$$

を考える. これは $(m+n)$ 次の正方行列となっている.

定義 2.1. 行列式 $|Syl_x(f,g)|$ を, f と g の x に関する**終結式**（resultant）と呼び $Res_x(f,g)$ と書く.

例 2.2. $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $g(x) = b_1x + b_0$ の時 $Res_x(f,g) = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$ となる. これは Sarrus の公式ですぐに $a_2b_0^2 + a_0b_1^2 - a_1b_0b_1$ と計算出来る.

ここで最も重要な注意をしておく. 上記において a_i, b_j たちは係数, 即ちスカラであるから $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ などの元が代入される. 従って終結式もスカラとなる. このように真に一変数多項式を扱うケースであれば計算はそれほど難しくはない. 一方で実用においては, 係数を未知数としてそのまま残し, 所謂「公式」のようなものを前計算しておくことも多々ある[4]. その場合計算機においては, 係数も変数として扱うことになり, 結果 f, g は $\mathbb{Z}$ 係数の多変数多項式として処理される. このような場合の終結式計算は容易ではなく, 前者（一変数）が約 1000 次元のクラスでも高速に計算出来るのに対して, 後者は 30 次元程度でも計算不能に陥る. 以降本稿では f, g は一般係数多項式, 即ち $\mathbb{Z}$ 係数多変数多項式とみなす.

補足 2.3. 一般係数多項式の終結式は斉次多項式となる. 例えば先程の例 2.2 において, 終結式は 5 変数斉次多項式となっている.

さて定義からも明らかなように, 終結式の計算は行列式の計算である. 次章ではこの問題をどのように攻めるかについて述べていく.

[4] 勿論「公式」を前計算しておいて随時代入する方法が最適とは限らない. case by case の対応が肝要である. 純粋に数式処理の研究としてはこの手法は（計算効率から見ても）最悪の戦略である.

3 高速化戦略

行列式を計算するための戦略は複数存在する. 幾つか挙げると

1. 多項式（擬）剰余列による方法（Collins, [3]）
2. **行列式を経由した方法**
3. 補間法（木村）

などがあるが, 今回は汎用アルゴリズムを作るという観点から 2. を採用する. 即ち問題を「出来るだけ易しくした」行列式の計算問題に書き換えて, それを実際に求めるという手法をとる.

3.1 関孝和-Bézout の行列表現

問題となっている $(m+n)$ 次正方行列のサイズを小さくすることを試みる. 以降 $m > n$ としても一般性を失わない. まず最初に, 与えられた f, g に対し x についての新しい多項式を n 本用意する.

$$
\begin{aligned}
&(a_m x^{n-1} + \cdots + a_{m-n+1})x^{m-n} g - (b_n x^{n-1} + \cdots + b_1) f \\
&= (a_m b_0 - a_{m-n} b_n) x^{m-1} + (a_{m-1} b_0 - a_{m-n} b_{n-1} - a_{m-n-1} b_n) x^{m-2} + \cdots = 0 \\
&\cdots \\
&a_m x^{m-n} g - b_n f = (a_m b_{n-1} - a_{m-1} b_n) x^{m-1} + (a_m b_{n-2} - a_{m-2} b_n) x^{m-2} + \cdots = 0
\end{aligned}
$$

更に x についての多項式を $m-n$ 本用意する,

$$
\begin{aligned}
x^{m-n-1} g &= b_n x^{m-1} + b_{n-1} x^{m-2} + \cdots + b_0 x^{m-n-1} = 0, \\
\cdots &\quad , \\
g &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0 = 0.
\end{aligned}
$$

これを行列の形式で書けば

$$
A = \begin{pmatrix}
a_m b_0 - a_{m-n} b_n & \cdots & \cdots \\
\cdots & & \\
a_m b_{n-1} - a_{m-1} b_n & \cdots & \cdots \\
b_n & b_{n-1} & \cdots \\
 & b_n & \cdots \\
 & & \cdots
\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x^{m-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T, Av = 0
$$

となっている. この時次が成り立つ.

命題 3.1. $Res_x(f, g) = |A|$.

実はこの手法は固有ベクトルを求めるためのものであるが, 副産物として終結式の情報を保持している. 当初の行列式のサイズが $(m+n)$ 次であったのに対し, 関孝和-Bézout の行列式のサイズが $\max(m, n)$ 次まで落ちていることに注目されたい.

補足 3.2. Magma の従来実装 `Resultant` はこの手法ではなく, シルベスター行列がそのまま用いられている.

例 3.3. 先程の例 2.2 においては

$$Res_x(f,g) = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} \Longrightarrow Res_x(f,g) = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ -a_0 b_1 & a_2 b_0 - a_1 b_1 \end{vmatrix}$$

となっている.

3.2 多変数多項式を成分に持つ行列式の計算

次に行列式そのものの計算に移る. 知られている手法を列挙してみる：

1. **小行列式展開法**
2. 分母項が現れない Gauss 消去法（FFGE）
3. **Berkowitz の方法**
4. 補間法（Geddes-Czapor-Labahn の補間法 [4], 木村の補間法）
5. その他（Laplace 展開法, Fadeev の方法, etc.）

1. は大学の線形代数でも登場する余因子行列を用いた計算法である. 計算コストは行列のサイズを n とすると $O(2^n)$ であり exponential time となっている. 2. は Gauss 消去法の改良版であり, 計算途中に有理数係数が出現しないように工夫されている（何れもピボット選択は適宜行って良い）. 計算コストは $O(n^3)$ である. 3. は一番右下の成分を特別扱いすることで, 行列のサイズが大きい場合に比較的有効な方法となっているが, 計算コストは $O(n^4)$ となる. 4. については本稿では述べないが, このうち木村の補間法を用いて判別式計算の世界記録がマークされている（cf. [6]）.

今回は上記のうち 1. と 3. を採用する[5]. なお 1. に関しては Magma のビルトイン関数 `Determinant` に内包されており, 多変数多項式の入力に対しても良く働く. 3. は新しく Magma のユーザ言語で実装したものである.

補足 3.4. 実は上記のうち FFGE の実装も Magma に実装されているが, これについてはより優れた実装が Singular と呼ばれる数式処理システムに搭載されている.

補足 3.5. 今回は並列化については考慮しない. 並列化を前提とするならば TRIP と呼ばれる数式処理システムを用いることが推奨される. これはマルチコアでの計算を行って初めてその性能を発揮出来るようにプログラミングされており, 多変数多項式の四則演算を直接的に行うものとしては世界最速のシステムである. 同様に, 四則演算を高速化するパッケージとしては Maple の sdmp パッケージが知られており, 1 コアあたりの処理速度で比較すると Singular のタイミングデータよりも高速となっている.

補足 3.6. TRIP や Maple's sdmp に比べると Magma は全ての点において優れている訳ではないが, 数式処理システムとして非常にバランスがとれており, 併用するビルトイン関数も高速である. 今回 Magma を採用したのは, その汎用性の高さからである.

[5] 一般に数式処理においてのスタンダードな実装はこの 2 つである. また補間法に関しては実装にあたって注意すべき点が多く, 下手をすると性能を十分に発揮できないことがある.

4 ベンチマーク

それではベンチマーク問題として, 一般係数多項式 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$ の判別式を計算する.

定義 4.1. $Disc_x(f) = (-1)^{m(m-1)/2}\frac{1}{a_m}Res_x(f, f')$ を f の**判別式**（discriminant）と呼ぶ.

補足 4.2. $m = 2$ の時は高校数学の判別式そのもので $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x, a, b, c]$ とすると $Disc_x(f) = b^2 - 4ac$ となる.

以下は $7 \leq m \leq 11$ に対して, Magma のビルトイン関数 `Resultant`, 関孝和-Bézout の行列表現に Berkowitz の方法の Magma での実装を合わせた関数 `BerkowitzResultant`, 関孝和-Bézout の行列表現に Magma のビルトイン関数 `Determinant` を合わせた関数 `SekiResultant` の 3 実装を比較したものである. 今回新たに実装した 2 実装に関しては, これ以外にも幾つかの高速化を施しているが, ここでは割愛する. 全ての計算は Magma ver. 2.18-5 on Windows 7 64bit / Intel Core i7-2630QM 3.30GHz / 8GB Memory の環境で行った. なお計算に際し, 並列化処理や特別なライブラリの導入等は一切行っていない.

Deg	#Terms	Built-in (sec)	Type BR (sec)	**Type SR** (sec)
7	1103	2.387	0.047	**0.026**
8	5247	15.460	0.281	**0.047**
9	26059	204.174	3.120	**0.390**
10	133881	3201.349	46.207	**3.994**
11	706799	$\geq$ 10hrs	907.372	**48.064**

Magma の従来実装に比べて, 数百倍の高速化が実現されている.

5 終結式計算の応用

終結式を高速に計算出来ることは様々な応用を持つ. ここでは例として最適化への応用と, コンピュータグラフィックス（CG）への応用を紹介する.

5.1 最適化への応用

4 章でベンチマーク問題として取り扱った判別式計算は, 高校数学で学ぶ通り「実根がどれくらいあるのか」をはかる尺度である. 例えば 2 次方程式の判別式が正・0・負であることが, 実根が 2 個・1 個（重根）・0 個存在することに対応しているのであった. このような「実根探索」の手法は, 数式処理における（パラメトリック）最適化の核となるアルゴリズムにおいて欠かせない. 例えば, 近年様々なシーンで援用されている限量記号消去法（QE: Quantifier Elimination）を用いた最適化は, 制御系や商品開発・シミュレーションにおけるロバスト解の探索に用いられている（cf. [1]）. 因みに QE のアルゴリズムは膨大な計算量（double exponential）が要求されており, その効率化が期待されているが, 多変数多項式の四則演算の高速化は, QE の核となる CAD（Cylindrical Algebraic Decomposition）アルゴリズムの一部（projection part と lifting part のうち前者）の高速化に対応している.

5.2 コンピュータグラフィックス（CG）への応用

コンピュータグラフィックス（CG）という用語は現在では広く知られている. コンピュータを用いて作成された画像一般のことで, 写実的（フォトリアリスティック）なものからアニメーションのような非写実的（ノンフォトリアリスティック）なものまで様々である. 実は CG を作成するにあたって様々な数学的道具が用いられており, 線形代数学・微分積分学は勿論のこと, Lie 群や Lie 環の理論, 位相幾何学, 数値解析（流体シミュレーション）など多岐にわたる.

3DCG において, 空間に存在する波（例えば光やその反射光の波）が伝播する様子を観察し, 写実的レンダリング（画像生成）を仮想的なシミュレーションによって得ようとする手法をレイトレーシング（ray tracing）と呼ぶ. この手法において, 効率的な終結式計算を援用するという手法が存在する（cf. [5]）. ここでは 4 次の多変数多項式の終結式計算が要求されている. ここ数年は他にも効率的な手法が多く提案されているが, 終結式の CG への利用に興味のある方は是非 [5] を御一読頂きたい.

おわりに

今回実装した Magma による多変数多項式の終結式計算パッケージは

`http://imi.kyushu-u.ac.jp/~s-yokoyama/Resultant.html`

に公開している. なお本稿で述べなかった専門家向けのテクニカルな話題に関しては, 近日電子出版予定の拙文 [7] を参照頂きたい. 使い方については例えば, 一般係数 9 次多項式の判別式（正確にはその終結式部分）を Type SR で計算する場合は以下のコマンドを実行すればよい. 1 行目の load は絶対パスで指定する.

```
> load "<directory>/resultant.m";
> _<x,a0,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9>:=PolynomialRing(Rationals(),11);
> f:=a9*x^9+a8*x^8+a7*x^7+a6*x^6+a5*x^5+a4*x^4+a3*x^3+a2*x^2+a1*x+a0;
> g:=Derivative(f,x);
> time SR:=SekiResultant(f,g,x);
```

各数式処理システムの詳細については以下を参照のこと. 最初の 2 つが有償, 残りの 3 つが無償のシステムとなっている.

- Magma: `http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/`
- Maple: `http://www.maplesoft.com/products/Maple/`
  （sdmp パッケージ：R. Pearce, `http://www.cecm.sfu.ca/~rpearcea/`）
- Sage: `http://www.sagemath.org/`
- Singular: `http://www.singular.uni-kl.de/`
- TRIP: `http://www.imcce.fr/Equipes/ASD/trip/trip.php`

謝辞

今回このような素晴らしい講演の機会を頂き有難うございました. 本研究集会「第 10 回数学総合若手研究集会」（MCYR10）の世話人の皆様に心より御礼申し上げます. また本稿の成果は木村欣司氏（京都大学情報科学研究科）の協力によるものです. 重ねて感謝致します.

参考文献

[1] 穴井宏和, 横山和弘, QE の計算アルゴリズムとその応用：数式処理による最適化, 東大出版 (2011).

[2] W. Bosma, J. Cannon and C. Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, Journal of Symbolic Computation, **24** (1997), 235-265.

[3] G. E. Collins, *Subresultants and Reduced Polynomial Remainder Sequences*, Journal of ACM **14** (1967), 128-142.

[4] K. O. Geddes, S. R. Czapor and G. Labahn, *Algorithms for Computer Algebra*, Springer (1992).

[5] J. T. Kajiya, *Ray tracing parametric patches*, Proceedings of the 9th annual conference on computer graphics and interactive techniques (New York, NY, USA, 1982), SIGGRAPH '82, ACM, pp. 245-254.

[6] K. Kimura, *Computing the longest polynomial in the world -general discriminant formula of degree 17-*, Proceedings of "Development of Computer Algebra Research and Collaboration with Industry (IMI-DCAR'13)" (2013), pp. 128-137.

[7] 横山俊一, Magma による多変数多項式の終結式計算の高速化について, 第 10 回「代数学と計算」報告集として電子出版予定.

Shun'ichi Yokoyama
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University
744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, Japan
E-mail Address: s-yokoyama@imi.kyushu-u.ac.jp

※ 所属は講演時のものです.

群作用をもつゴッパ符号の構成法

名古屋工業大学大学院　工学研究科　博士課程（D1）
河田　貴久

概要

本稿では与えられた有限群 Γ の作用をもつ符号 $C^*_\Gamma(D,G)$ を構成し、その符号パラメータ $[n,k^*]$、伝送速度 $R:=k^*/n$ を評価する。また群不変性を利用した復号アルゴリズムを提示する。

1. はじめに

これまでシャノンの通信路符号化定理に基づく性質のよい符号の具体的構成を目標とした研究が行われ、特に数学的には関数体の拡大列（塔）を考えることで有理点を多数もつ符号が構成された。H.Maharaj[1] はクンマー被覆（$y^s=h(x)$）による関数体の拡大 $F/K(x)$ を考えるとき、任意の $Gal(F/K(x))$-不変因子 $G\in \mathrm{Div}(F)$ について Riemann-Roch 空間の直和分解

$$L(G)=\oplus_{i=0}^{s-1}L((G+i(y))|_{K(x)})y^i$$

を与えた。そしてこれを利用して代数幾何符号 $C_L(D,G)$ について考察し、各直和因子 $L((G+i(y))|_{K(x)})y^i$ に対する部分符号 $C_i\subset C_L(D,G)$ $(i=0,\cdots,s-1)$ についてもその符号パラメータを計算している。

他方、復号法についての考察も重要であり符号の性質を総合的に評価したい。そこで曲線 X に有限群 Γ が作用している状況を考えると、その群作用を利用して代数幾何符号を効率よく復号できることに着目する。例えばクンマー被覆 $y^s=h(x)$ は s 次巡回群の作用をもつため効率よく復号できるはずである。

本稿では曲線を射影直線 $\mathbb{P}^1$ に固定し与えられた有限群 Γ の作用をもつ符号 $C^*_\Gamma(D,G)$ を構成する。そして符号パラメータ $[n,k^*]$、伝送速度 $R:=k^*/n$ を評価し、さらに群不変性を利用した復号アルゴリズムを提示する。なお、提案する符号 $C^*_\Gamma(D,G)$ で Γ を s 次巡回群とした特殊な場合が [1] の部分符号 C_0 に対するゴッパ符号版 C^*_0（双対符号）である。

2. 符号理論の基本

まず、符号理論の基本的な内容について簡単にまとめる。

(1) 通信路について

符号理論では以下のモデルを考える。

1. 符号語を送信
2. 通信路上でノイズが発生
3. 記号列を受信

(2) 誤り訂正符号

ノイズが加わった後の受信語から送信語を復元できるようにするため、送信語の構成として本来送信したい内容（データ本体）と冗長部分に分ける。すなわち、1 ブロック＝情報記号（k ビット）＋パリティ検査記号（$n-k$ ビット）という構成とする。

定義 2.1（線形符号 C）

有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元ベクトル空間内の部分ベクトル空間

$$C\subset \mathbb{F}_q^n$$

を線形符号とよぶ。また n を C の符号長、$k = \dim_{\mathbb{F}_q} C$ を次元という。このとき C を $[n,k]$ 線形符号とよぶ。符号 C の各元 $c \in C$ を符号語と呼ぶ。

定義 2.2（伝送速度 R）

$[n,k]$ 線形符号 C に対し $R := k/n$ と定義し、これを C の伝送速度とよぶ。

(3) 最小距離と誤り訂正能力

定義 2.3（最小距離 $d(C)$）

符号 $C \subset \mathbb{F}_q^n$ に対し、以下に定義される値を C の最小距離とよぶ。

$$d(C) := \min_{0 \neq c \in C} \{wt(c)\} \ ; \ 0 \text{ 以外の符号語のハミング重みの最小値}$$

ただし $wt(c) := \#\{i | c_i \neq 0, c = (c_1, \cdots, c_n)\}$; 非ゼロ成分の数

定理 2.4

符号 C が t 個以下の誤りを訂正可能

$$\Leftrightarrow t \leq (d-1)/2$$

証.

任意の 2 つの符号語 $c, c' \in C$ のハミング距離 $d(c,c')$ について $d(c,c') := wt(c-c') \geq d(C)$ が成立する。

$$S(c) := \{y \in \mathbb{F}_q^n \mid d(y,c) < d(C)/2\} \ ; \ \text{半径 d/2 のハミング球}$$

と定義すればその中にある符号語は c のみである。このとき任意の受信語 $y = c + e \in \mathbb{F}_q^n$ に対し $y \in S(c)$（ハミング球 $S(c)$ に含まれる）$\Leftrightarrow wt(e) < d(C)/2$ となる。したがって、誤りの個数 $t \leq (d(C)-1)/2$ ならば

$$\begin{array}{lll} \psi : \mathbb{F}_q^n & \to & C \\ y & \mapsto & \psi(y) := c \ ; \ y \in S(c) \text{ のとき} \end{array}$$

により符号語 c を推定できる。□

(4) 符号の例

例 2.1. パリティ検査符号 $C \subset \mathbb{F}_2^8 : [8,7]$-符号

パリティ検査行列 H、および符号 C が次で定義される符号をパリティ検査符号とよぶ。

$$\begin{cases} H = (11111111) \ ; \ 1 \times 8 \text{ 行列}, \\ C = \{c \in \mathbb{F}_2^8 \mid c^t H = 0\} \end{cases}$$

このとき $c \in C \Leftrightarrow c_1 + \cdots + c_8 = 0$（偶数パリティ）である。パリティ検査符号は誤り検出のみ可能（位置の特定はできない）。ただし、訂正能力 $t = (d-1)/2 = 0$ 個、最小距離 $d(C) = rankH + 1 = 2$

例 2.2. ハミング符号 $C \subset \mathbb{F}_2^7 : [7,4]-$ 符号

パリティ検査行列 H、および符号 C が次で定義される符号をハミング $[7,4]-$ 符号とよぶ。

$$\begin{cases} H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ 3 \times 7 \text{ 行列}, \\ C = \{c \in \mathbb{F}_2^7 \mid c^t H = 0\} \end{cases}$$

受信語 $r = c + e$ に対し $s := r^t H$（シンドローム）と定義する。このとき $s = e^t H$ となる。このハミング $[7,4]-$ 符号 C について、訂正能力 $t = (d-1)/2 = 1$ 個、最小距離 $d(C) = rankH + 1 = 4$ である。

そこで各 1 ビット誤り e についてシンドロームの値を計算すると次のようになる。したがってシンドロームを計算すれば誤り位置を特定できる $c = r - e_i$ ； $s = s_i$のとき により復号可能である。

誤り e	シンドロームの値
$e_1 = [1000000]$	$s_1 = [001]$ (2 進数 1)
$e_2 = [0100000]$	$s_2 = [010]$ (2 進数 2)
$e_3 = [0010000]$	$s_3 = [011]$ (2 進数 3)
$e_4 = [0001000]$	$s_4 = [100]$ (2 進数 4)
$e_5 = [0000100]$	$s_5 = [101]$ (2 進数 5)
$e_6 = [0000010]$	$s_6 = [110]$ (2 進数 6)
$e_7 = [0000001]$	$s_7 = [111]$ (2 進数 7)

3. 代数幾何符号について

本章では [2] にしたがい、代数幾何符号の一般的な事柄について簡単に説明する。

(1) 代数幾何符号の定義

X:非特異代数曲線、$g(X)$:X の種数、$\mathbb{F}_q$:位数 q の有限体とする。また $D, G \in \mathrm{Div}(X)$ は X 上の因子で次の条件をみたすものとする。$\mathrm{supp}(D) \cup \mathrm{supp}(G) \subset X(\mathbb{F}_q), \mathrm{supp}(D) \cap \mathrm{supp}(G) = \phi$ および次の強代数幾何符号 (Strongly Algebraic Geometric) の条件、すなわち以下をみたすとする。

【SAG 条件】 $2g(X) - 2 \ < \ \deg(G) \ < \ n = \deg(D)$

ただし、$D = \sum_{P \in X} a_P \ P \ (a_P \in \mathbb{Z})$ とかくとき $\mathrm{supp}(D) := \{P \in X \mid a_P \neq 0\}$ を因子 D の台（サポート）という。

定義 3.1（Riemann-Roch 空間 $L(G)$）

$$L(G) := \{f \in \mathbb{F}_q(X) \mid (f) + G > 0\} \cup \{0\}$$

を G の Riemann-Roch 空間と呼ぶ。これは関数体 $\mathbb{F}_q(X)$ の部分ベクトル空間となる。ただし (f) は f の主因子である。

定義 3.2（評価写像 ev）

$D = P_1 + \cdots + P_n$ とするとき以下の線形写像 ev を定義する。これを評価写像とよぶ。

$$\begin{array}{rccl} ev: & L(G) & \to & \mathbb{F}_q^n \\ & f & \mapsto & ev(f) := (f(P_1), \ \cdots, \ f(P_n)) \end{array}$$

この評価写像 ev を使い次の 2 種類の符号を定義する。

定義 3.3（代数幾何符号 $C_L(X, D, G), \ C_L^*(X, D, G)$）

1) リード・ソロモン符号

$C_L(X, D, G) := ev(L(G)) \subset \mathbb{F}_q$

2) 幾何学的ゴッパ符号

$C_L^*(X, D, G) := ev(L(G))^* \subset \mathbb{F}_q$ （通常の内積 (,) に関する $C_L(X, D, G)$ の双対符号）

4. 群不変ゴッパ符号 $C_\Gamma^*(D, G)$ の構成

以上の準備の下、曲線を射影直線 $\mathbb{P}^1$ に限定し有限群 Γ に対する不変性をもつ幾何学的ゴッパ符号の

構成法について説明する。その符号パラメータ、訂正能力についても説明する。

(1) 基本的設定

$k = \mathbb{F}_{p^\infty}$、$X = Y = \mathbb{P}^1$:射影直線、$\Gamma$:有限群とし、$\Gamma$ が Y に作用しているとする。また $\pi : Y \to X$（被覆）; $\Gamma \subset Deck(Y/X)$ とする。

定義 4.1（分岐指数 $e(Q/P)$）

$w = \pi(z)$、任意の $Q \in Y$ に対し $P = \pi(Q)$ とおくとき

$$w - w(P) \in O_Q^\times \ (z - z(Q))^e \text{ とかける。}$$

このとき、非負整数 $e(Q/P) := e$ を π の $Q \in Y$ における分岐指数とよぶ。

さらに $E := \{Q \in Y \mid e_Q > 1\}$: π の分岐点全体とし、（付加条件）$\pi|_{Y-E}$ は $|\Gamma|$ 重被覆を課す。そして X 上の 2 つの因子 $D, G \in \mathrm{Div}(X)$ を次の形にとる。$D := P_{(1)} + \cdots + P_{(\nu)},\ G := Q_{(1)} + \cdots + Q_{(\mu)},\ \mathrm{supp}(D) \cup \mathrm{supp}(G) \subset \pi(Y - E),\ 2\nu - \mu \geq 1$

定義 4.2（Conorm 写像）

X 上の因子 D に Y 上の因子 $\mathrm{con}(D)$ を対応させる写像

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{con}: & \mathrm{Div}(X) & \to & \mathrm{Div}(Y) \\ & D = \displaystyle\sum_{P \in R(X)} a_P P & \mapsto & \mathrm{con}(D) := \displaystyle\sum_{P \in R(X)} a_P \sum_{Q/P \in R(Y)} e(Q/P) Q \end{array}$$

を conorm 写像と呼ぶ。

(2) 符号 $C_\Gamma^*(D, G)$ の構成法

X 上の因子 $D, G \in \mathrm{Div}(X)$ をとり、$\mathrm{con}(D) := P_1 + \cdots + P_n \in \mathrm{Div}(Y)$ とする。このとき Y 上の幾何学的ゴッパ符号 $C_\Gamma^*(D, G) \subset \mathbb{F}_q^n$ を次で定義する。

定義 4.3（Γ 不変性をもつ符号 $C_\Gamma(D, G),\ C_\Gamma^*(D, G)$）

Riemann-Roch 空間 $L(G) \subset k(X)$ 上での評価写像を考える。

$$\begin{array}{rccl} ev: & L(G) & \to & \mathbb{F}_{q^d}^n \\ & f & \mapsto & ev(f) := (f(P_1), \cdots, f(P_n)) \end{array}$$

このとき、次の 2 種類の符号を定義する。

1) リード・ソロモン符号

$$C_\Gamma(D, G) := C_L(Y, \mathrm{con}(D), G) \ \subset \mathbb{F}_{q^d}^n$$

2) 幾何学的ゴッパ符号

$C_\Gamma^*(D, G) := C_L^*(Y, \mathrm{con}(D), G) \subset \mathbb{F}_{q^d}^n$（通常の内積 (,) に関する $C_L(Y, \mathrm{con}(D), G)$ の双対符号）

定義 4.4（$C_\Gamma^*(D, G)$ のパリティ検査行列 H_Γ^*）

Riemann-Roch 空間 $L(G)$ の基底 $\{\varphi_i\}_{0 \leq i \leq \mu}$ に関する C_Γ^* のパリティ検査行列を次で定義する。

$$H_\Gamma^* := (\varphi(P_j))_{0 \leq i \leq \mu,\ 1 \leq j \leq n}$$

ただし、$z : Y = \mathbb{P}^1$ の座標とするとき $\varphi_i(z) := 1/(\pi(z) - Q(i))$

(3) 主定理

$\pi : Y \to X$ の分岐点を除いた像全体についてその $\mathbb{F}_q$ 有理点の数を $a = |X(\mathbb{F}_q) - \pi(E)$ とかく。特

に $a \equiv 2\ (mod\ 3)$ のときを考え、$a = 3m + 2$（m は正整数）とする。

定理 4.1.（符号パラメータ $[n,\ k^*,\ d^*]$）

D, G :X 上の因子で $\nu + \mu = a,\ 2\ \nu - \mu \geq 1$ をみたすものをとり、Γ 不変な幾何学的ゴッパ符号 $C^*_\Gamma(D, G)$ について考える。このとき $C^*_\Gamma(D, G)$ の符号パラメータは次で与えられる。

1) 符号長 $n = (m + 1)\ |\Gamma|$

2) 次元 $k^* = (m + 1)\ (\ |\Gamma| - 1)$

3) 最小距離 $d^* = m + 2$

定理 4.2.（訂正能力 t）

この幾何学的ゴッパ符号 $C^*_\Gamma(D, G)$ の訂正能力は以下となる。

$t = m + 1$ (Γ-軌道数)

5. Γ 不変版 SV アルゴリズムについて

まず通常の SV アルゴリズム [4] について説明する。非特異代数曲線 X 上の一般のゴッパ符号 $C^*_L(X, D, G)$ に対する受信語 $r \in \mathbb{F}_q^n$ を以下の手順 (P1)〜(P4) で復号する。

(P1) 準備（補助因子）

まず $2t - 1 \leq \mu = \deg(G)$ をみたす最大の整数 $t > 0$ に対し補助因子 $A, B; A + B < G \in \mathrm{Div}(X)$ で $\deg(A) = t,\ \deg(B) = t - 1$ となるものを選択する。

(P2) シンドローム $S(r)$ 算出

次に受信語 r に対し、$(t + 1,\ t)$ 行列 $S(r)$ を求める。ここに補助因子 A, B の Riemann -Roch 空間を $L(A) = \mathrm{span}\ \{\psi_j\}_{j=1}^{t+1},\ L(B) = \mathrm{span}\ \{\chi_k\}_{k=1}^{t}$ と表示するとき $S_{jk}(r) := \sum_{l=1}^{n} \psi_j(P_l)\chi_k(P_l)\ r_l$ と定義される。

(P3) 誤りロケータ Θ

シンドローム行列 $S(r)$ に対し連立 1 次方程式 ${}^tS(r)\ x = 0$ を解き、$\Theta := \sum_{j=1}^{t+1} x_j\psi_j \in L(A)$ とおく。この Θ を受信語 r の誤りロケータとよぶ。

(P4) 誤り位置算出

誤りロケータ $\Theta = 0$ の根が受信語 r の誤り位置（の候補）となる。そのため符号化に利用した点 $\mathrm{supp}(D) = \{P_j\}_{j=1}^{n}$ の座標を Θ に代入する。

$\mathrm{supp}(D)$	$\Theta(P_j)$
P_1	$\Theta(P_1)$
P_2	$\Theta(P_2)$
$\vdots$	$\vdots$
P_n	$\Theta(P_n)$

それでは Γ 不変性をもつ符号 C^*_Γ に対する SV アルゴリズムについて説明する。変更点は (P1)、(P4) のみである。

(P1) の変更点：

符号 $C^*_\Gamma = C^*_L(Y,\ \mathrm{con}(D),\ G)$ は Y 上の符号として定義されるが、G は X 上の因子である ; $G \in \mathrm{Div}(X)$。したがって $A,\ B$（補助因子）も X 上の因子を選択する。その次数 $t = \deg(A),\ t - 1 = \deg(B)$

は Y 上の因子とみたとき Γ-軌道数である。すなわち $\deg(\mathrm{con}(A)) = t\ |\Gamma|,\ \deg(\mathrm{con}(B)) = (t-1)\ |\Gamma|$ である。

(P4) の変更点：

誤りロケータ $\Theta \in L(A)$ は X 上の関数であり、有限群 Γ の作用で不変である。したがって Y の同一の Γ 軌道上で Θ の値は一致する。符号化に利用する因子 $\mathrm{con}(D)$ について $\mathrm{supp}(\mathrm{con}(D)) = \{P_j\}_{j=1}^{n}$ には ν 個の Γ 軌道が存在する為、誤りロケータ Θ への $\{P_j\}_{j=1}^{n}$ の代入の最大回数は $\nu = n/|\Gamma|$ 回に低減される。

例. $\Gamma = D_{2s}$ **；２面体群（**$s = 3$**）のとき**

実際に Γ 不変性をもつ符号 C_Γ^* を構成し、Γ 不変版 SV アルゴリズムを適用して復号を行う具体的な例を説明する。$Y = \mathbb{P}^1$ の座標を z とするとき $\Gamma =< a, b >$; $a(z) := -1/z,\ b(z) := \zeta z\ (\zeta^3 = 1)$ とする。これは $\Gamma \simeq D_6$（2 面体群と同型）である。Γ は $Y = \mathbb{P}^1$ 上に $\Gamma \times Y \to Y$ で作用する。このとき $\pi(z) := z^3 - 1/z^3$ を考える。Γ 不変性をもつ符号 $C_\Gamma^*(D, G)$ を構成するため X 上の因子 D, G を選択する。連立 1 次方程式

$$\begin{cases} \nu + \mu = 5, \\ 2\,\nu - \mu = 1 \end{cases}$$

をみたす組として $(\nu, \mu) = (2, 3)$ がとれるので以下のように $D := P_{(1)} + P_{(2)},\ G := Q_{(1)} + Q_{(2)} + Q_{(3)} \in \mathrm{Div}(X)$ と選択する。（X 上の $\mathbb{F}_q$ 有理点を $3m + 2 = 5$ 個利用 ; $m = 1$ の場合である。）有限体は標数 $p = 7$ の拡大体を考えることにし、X, Y それぞれについて $X(\mathbb{F}_7) : \mathbb{F}_7$ 有理点、$Y(\mathbb{F}_{7^4}) : \mathbb{F}_{7^4}$ 有理点を考える。$\mathbb{F}_{7^4}^{\times} =< \alpha >$; $\alpha^{2400} = 1$ とする。

$\mathbf{Y}(\mathbb{F}_{7^4})$						$\mathbf{X}(\mathbb{F}_7)$
$\mathrm{con}(D)$						D
$\alpha^{450},$	$\alpha^{750},$	$\alpha^{1250},$	$\alpha^{1550},$	$\alpha^{2050},$	$\alpha^{2350},$	$P_{(1)} = 1,$
$\alpha^{50},$	$\alpha^{350},$	$\alpha^{850},$	$\alpha^{1150},$	$\alpha^{1650},$	$\alpha^{1950},$	$P_{(2)} = -1$
$\mathrm{con}(G)$						G
$\alpha^{400},$	$\alpha^{800},$	$\alpha^{1200},$	$\alpha^{1600},$	$\alpha^{2000},$	$\alpha^{2400},$	$Q_{(1)} = 0,$
$\alpha^{150},$	$\alpha^{250},$	$\alpha^{950},$	$\alpha^{1050},$	$\alpha^{1750},$	$\alpha^{1850},$	$Q_{(2)} = 3,$
$\alpha^{550},$	$\alpha^{650},$	$\alpha^{1350},$	$\alpha^{1450},$	$\alpha^{2150},$	$\alpha^{2250},$	$Q_{(3)} = -3$

このとき $X = \mathbb{P}^1$ の座標を w とすれば $G \in \mathrm{Div}(X)$ の Riemann-Roch 空間は $L(G) = \mathrm{span}\ \{\varphi_i\}_{i=0}^{\mu=3}$; $\{\varphi_i\} = \{1,\ \frac{1}{w},\ \frac{1}{w-3},\ \frac{1}{w+3}\}$ と表わせる。パリティ検査行列 H_Γ^* は次式で与えられる。

$$H_\Gamma^* = \begin{pmatrix} H_0 & H_0 & H_0 & H_0 & H_0 & H_0 \end{pmatrix}\ ;\ H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

したがってパリティ検査式 $c\ {}^tH = 0$ を解くことで符号 C_Γ^* は $[n, k^*] = [12, 10]$ 符号、$C_\Gamma^*(D, G) = \mathrm{span}_{\ \mathbb{F}_{7^4}}\{e_1 - e_3,\ e_1 - e_5,\ e_1 - e_7,\ e_1 - e_9,\ e_1 - e_{11},\ e_2 - e_4,\ e_2 - e_6,\ e_2 - e_8,\ e_2 - e_{10},\ e_2 - e_{12}\}$ となることが分かる。ただし、$\{e_i\}_{i=1}^{12} : \mathbb{F}_{7^4}^{n=12}$ の標準基底である。以下では、次の受信語を受信した

ときの Γ 不変版 SV アルゴリズムによる復号例を説明する。

受信語 $r = (\alpha^{1300}\ \alpha^{1418}\ \alpha^{1332}\ 0\ 0\ \alpha^{1075}\ \alpha^{210}\ 0\ 0\ \alpha^{1992}\ -2\ 0)$

$$\begin{cases} \text{符号語} & c = (\alpha^{1250}\ \alpha^{1418}\ -\alpha^{1250}\ 0\ 0\ -\alpha^{4675}\ 0\ 0\ 0\ -\alpha^{3192}\ 0\ 0), \\ \text{誤りベクトル} & e = (3\ 0\ \alpha\ 0\ 0\ 0\ \alpha^{210}\ 0\ 0\ 0\ -2\ 0) \end{cases}$$

上で説明した $(P1)$〜$(P4)$ の手順に沿って復号を行う。

$(P1)$ 準備（補助因子）

補助因子 A, B ; $A + B < G$ を $A = Q_{(1)} + Q_{(2)},\ B = Q_{(3)}$ と選択する。このとき Riemann -Roch 空間は $L(A) = \text{span}\ \{\psi_j\}_{j=1}^{3},\ L(B) = \text{span}\ \{\chi_k\}_{k=1}^{2}$ となる。ただし、$\{\psi_j\} = \{1,\ \varphi_1,\ \varphi_2\}$, $\{\chi_k\} = \{1,\ \varphi_3\}$。

$(P2)$ シンドローム算出

この場合 $t = 2$ のため 3×2 行列であり、実際に計算すれば以下となる。

$$S(r) = \begin{pmatrix} \alpha^{267} & \alpha^{1067} \\ \alpha^{267} & \alpha^{1067} \\ \alpha^{667} & \alpha^{1467} \end{pmatrix}$$

$(P3)$ 誤りロケータ Θ

連立 1 次方程式 ${}^tS\ x = 0$ の解空間は $\{x_1,\ x_2\}$ で張られるベクトル空間である。これに対応して誤りロケータは $\{\Theta_1,\ \Theta_2\}$ で張られる解空間となる。ただし $x_1 = {}^t(1, 0, 2),\ x_2 = {}^t(0, 1, 2),\ \Theta_1 = \frac{w-2}{w+3},\ \Theta_2 = \frac{3(w-1)}{w^2-2}$。

$(P4)$ 誤り位置算出

誤りロケータ空間 $\text{span}\ \{\Theta_1, \Theta_2\}$ の基底 $\Theta_1,\ \Theta_2$ に対し $\Theta_1 = 0,\ \Theta_2 = 0$ の共通根を $\text{supp}(\text{con}(D)) = \{P_j\}_{j=1}^{12}$ からさがす。このとき Θ_1, Θ_2 が $\Gamma = D_{2s}$ 不変であることを利用すれば $\{P_j\}_{j=1}^{12}$ の Γ 軌道の代表元 $\{P_1,\ P_2\}$ だけを代入すればよい。実際の代入結果は以下のようになる。

$\text{supp}(\text{con}(D)) = \{P_j\}_{j=1}^{12}$	$\Theta_1(P_j)$	$\Theta_2(P_j)$
$\Gamma(P_1) :\ P_1,\ P_3,\ P_5,\ P_7,\ P_9,\ P_{11}$	0	0
$\Gamma(P_2) :\ P_2,\ P_4,\ P_6,\ P_8,\ P_{10},\ P_{12}$	-3	2

したがって、誤り位置は P_1 の Γ 軌道上にあることが分かった。実際、この復号例の最初に与えた受信語 r は符号語 c に $P_1,\ P_3,\ P_7,\ P_{11}$ の位置に非ゼロ成分を持つベクトル e と和をとって得られたベクトルだから、これは正しい。

6. まとめ

本稿で構成した群不変性をもつ符号 C_Γ^* についてその伝送速度 $R^* := k^*/n$ は定理 4.1 で求めた符号パラメータ $[n, k^*, d^*]$ より $R^* = 1 - 1/|\Gamma|$ である。またこの符号 C_Γ^* は定理 4.2 より Γ 軌道の意味で誤り位置をすべて特定可能であり、訂正可能な Γ 軌道数は $t = (a-2)/3$ であった。これは符号化に利用する 2 つの因子を $\text{con}(D) \in \text{Div}(Y),\ G \in \text{Div}(X)$（1 つは Y 上の、他方は X 上の因子）とすることで得られた。したがって一般の線形符号についてはシングルトン限界 $d \le n(1 - R + 1/n)$ より伝送速度 R と訂正能力はトレードオフの関係にあるが、今回構成したゴッパ符号 C_Γ^* では伝送速度 R^* は有限群の位数 $|\Gamma|$、訂正能力 t は有限体 F_q の位数で決まることが分かる。（ただし、t は Γ 軌道数。）

さらに、シャノンの通信路符号化定理に基づく符号を構成するには $R < C$（通信路容量）となるよう有限群 Γ の位数 $|\Gamma|$ を調整し、有限体 $\mathbb{F}_q$ の位数を $q \to \infty$ として符号長 n を大きくする必要がある。

このように構成した符号 C_{Γ}^{*} について符号長 n を大きくしたとき復号誤り率 P_{err} が実際にゼロに近づくかどうかについては調べていない。今後そのような符号の具体例を見つけることができれば、効率よく復号可能できかつ性質のよい符号が得られることになる。

参考文献

[1] H.Maharaj "Code construction on fiber products of Kummer covers", IEEE Trans. Inform. Theory 50 (2004), no. 9, 2169-2173

[2] J.H.van.Lint "Introduction to coding theory Third edition", Graduate Texts in Mathematics, 86. Springer-Verlag, Berlin, 1999

[3] S.A.Stepanov "Codes on algebraic curves", Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 1999

[4] O.Pretzel "Codes and algebraic curves" Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 8. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998

[5] 桂利行著 " 代数幾何入門" 共立出版, 1998

[6] シュティヒテノス著 " 代数関数体と符号理論" 共立出版, 2013

距離核ポテンシャルの最大点と体の中心

坂田 繁洋 (首都大学東京理工学研究科)

1 序：研究の背景

1.1 解析的背景

自然現象を数学的に理解するための 1 つの手段として, 数学者は偏微分方程式論を発展させてきた。また, 楕円型の偏微分方程式の解を求めるための 1 つの手段として, ポテンシャル論を発展させてきた。そのような背景から偏微分方程式の解やポテンシャルは自然科学的意味をもつ関数と言える。関数について研究を行う際, そのグラフの形状を調べたいと思うことは自然な欲求であろうと思われる。(少なくともこのような問題意識で偏微分方程式やポテンシャルを研究している数学者は多くいる。) 本稿では, 特に, 距離核ポテンシャルとよばれる関数のグラフの形状について考える。関数のグラフの形状を調べる際, 臨界点の存在・位置・個数が重要な情報になるが, (退化しているものも含めて) すべての臨界点について考察することは, 非常に難しい。そのため, 特に, 距離核ポテンシャルの最大点について研究を行う。

上記のような問題意識の下で行われた研究結果を少し紹介する。$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ をコンパクトな台をもつ, 恒等的に零でない有界な非負可測関数とする。関数

$$Hf(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \exp \quad \frac{r^2}{4t} \quad f(y)dy,\ x \in \mathbb{R}^m,\ t > 0,\ r = |x \quad y| \tag{1.1}$$

は全空間 $\mathbb{R}^m$ における熱方程式

$$\frac{\partial Hf}{\partial t}(x,t) = \Delta Hf(x,t),\ x \in \mathbb{R}^m,\ t > 0 \tag{1.2}$$

をみたし, f が連続である点で

$$\lim_{t \to 0^+} Hf(\ ,t) = f \tag{1.3}$$

をみたす。すなわち, 時刻 0 での熱分布が f で与えれられたとき, 関数 $Hf(x,t)$ は時刻 t における点 x の熱量を表す。

1990 年に Chavel と Karp は, [CK] で, 関数 Hf の空間最大点 (**ホットスポット**) の集合

$$\mathcal{H}_f(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, Hf(x,t) = \max_{\in \mathbb{R}^m} Hf(\xi,t) \right\} \tag{1.4}$$

の漸近挙動について以下のことを示した：

定理 1.1 ([CK])

(1) 任意の時刻 t において, ホットスポットは必ず存在し, それらのすべては f の台の凸包 (f の台を含む (包含関係に関して) 最小の凸集合) に含まれる。

(2) ホットスポットの集合 $\mathcal{H}_f(t)$ は時間無限大で f の重心の 1 点集合に (Hausdorff 距離に関して) 収束する。

(彼らは, より一般に, Riemann 多様体上の熱方程式に対して, ホットスポットを考察しているが, ここでは, 上記の事柄が成り立つ Euclid 空間の場合に限って述べる。)

神保秀一先生と坂口茂先生は, [JS] で, [CK] では有限時間の発展におけるホットスポットの個数 (特に, 一意性) が考察されていないことを指摘し, 関数 $Hf(\ ,t)$ の Hessian を計算することで, 次を述べた：

定理 1.2 ([JS]) 時刻 t が不等式 $t \geq (\operatorname{diam}\operatorname{supp} f)^2/2$ をみたすならば, $Hf(\ ,t)$ のグラフは f の台の凸包で上に凸になり, したがって, ホットスポットは 1 点に定まる。

1.2 幾何的背景

凸幾何学という**凸体** (convex body, $\mathbb{R}^m$ の有界な凸領域の閉包) の幾何学的量 (体積や表面積など) を研究対象とする分野がある。その分野で, Shepard により次の問題が提起された：

問題 1.3 ([Sh]) Ω_1 と Ω_2 を原点対称な凸体とする。任意の $v \in S^{m\ 1}$ に対して,

$$\mathrm{Vol}_{m\ 1}\left(\Omega_1 \middle| v^{\perp}\right) < \mathrm{Vol}_{m\ 1}\left(\Omega_2 \middle| v^{\perp}\right) \tag{1.5}$$

が成り立つならば,

$$\mathrm{Vol}\,(\Omega_1) < \mathrm{Vol}\,(\Omega_2) \tag{1.6}$$

といえるか？ここで, $\Omega_j|v^{\perp}$ は, Ω_j のベクトル空間 $v^{\perp}$ への正射影の像を表す。

問題 1.3 に対して, Petty と Schneider は, 独立に, 反例を挙げ, 射影体を導入することで肯定的な解を与えた。

定義 1.4 ([P, Sch]) Ω を凸体とする。与えられた方向に関して, 原点から最も離れた Ω の接平面と原点との距離を表す関数

$$h\ \ (v) = \max_{y\in} y\ \ v,\ v \in S^{m\ 1} \tag{1.7}$$

を Ω の**支持関数** (support function) という。Ω の**射影体** (projection body) $\Pi\Omega$ とは,

$$h_{\Pi}\ \ (v) = \mathrm{Vol}_{m\ 1}\left(\Omega \middle| v^{\perp}\right),\ v \in S^{m\ 1} \tag{1.8}$$

から一意に決まる体のことである。

定理 1.5 ([P, Sch]) Ω_1 を射影体, Ω_2 を凸体とする。任意の $v \in S^{m\ 1}$ に対して,

$$\mathrm{Vol}_{m\ 1}\left(\Omega_1 \middle| v^{\perp}\right) \leq \mathrm{Vol}_{m\ 1}\left(\Omega_2 \middle| v^{\perp}\right) \tag{1.9}$$

が成り立つならば,

$$\mathrm{Vol}\,(\Omega_1) \leq \mathrm{Vol}\,(\Omega_2) \tag{1.10}$$

が成り立つ。また, 等号は Ω_1 と Ω_2 が平行移動を除いて一致するときに限る。

Busemann と Petty は, [BP] で, 問題 1.3 の双対的問題を提起した：

問題 1.6 ([BP]) Ω_1 と Ω_2 を原点対称な凸体とする。任意の $v \in S^{m\ 1}$ に対して,

$$\mathrm{Vol}_{m\ 1}\left(\Omega_1 \cap v^{\perp}\right) < \mathrm{Vol}_{m\ 1}\left(\Omega_2 \cap v^{\perp}\right) \tag{1.11}$$

が成り立つならば,

$$\mathrm{Vol}\,(\Omega_1) < \mathrm{Vol}\,(\Omega_2) \tag{1.12}$$

といえるか？

問題 1.6 に対して, Larman と Rogers は, [LR] で, 12 次元以上の場合に確率論を用いて反例を挙げた。Lutwak は, [L] で, 交差体を導入することで肯定的な解を与えた。

定義 1.7 ([L]) **星体** (star body, $\mathbb{R}^m$ の有界な星形領域の閉包) Ω に対して, 集合

$$\mathrm{Ker}\,\Omega = \{p \in \Omega \,|\forall q \in \Omega,\ \overline{pq} \quad \Omega\} \tag{1.13}$$

を Ω の**核** (kernel) という。Ω を原点を核に含むような星体とする。与えられた方向に関して, 原点から最も離れた Ω の点と原点との距離を表す関数

$$\rho \ (v) = \max\{a \geq 0 \,|av \in \Omega\}\ ,\ v \in S^{m\ \ 1} \tag{1.14}$$

を Ω の**半径関数** (radial function) とよぶ。半径関数が連続である星体 Ω の**交差体** (intersection body) $I\Omega$ とは

$$\rho_{I\ \ }(v) = \mathrm{Vol}_{m\ \ 1}(\Omega \cap v)\ ,\ v \in S^{m\ \ 1} \tag{1.15}$$

から一意に決まる体のことである。

定理 1.8 ([L]) Ω_1 を交差体, Ω_2 を半径関数が連続な星体とする。任意の $v \in S^{m\ \ 1}$ に対して,

$$\mathrm{Vol}_{m\ \ 1}\left(\Omega_1 \left| v^{\perp}\right.\right) \leq \mathrm{Vol}_{m\ \ 1}\left(\Omega_2 \left| v^{\perp}\right.\right) \tag{1.16}$$

が成り立つならば,

$$\mathrm{Vol}\,(\Omega_1) \leq \mathrm{Vol}\,(\Omega_2) \tag{1.17}$$

が成り立つ。また, 等号は Ω_1 と Ω_2 が一致するときに限る。

このような歴史的経緯から交差体という凸幾何学で重要な役割を担った体に対して, Moszynska により, [M] で, 次の (素朴な) 疑問が提起された：

問題 1.9 ([M]) 与えられた星体に対して, 原点をどこにおくべきか？

この問題は, 交差体の定義が原点の取り方に依存することによる。すなわち, 星体が与えられると, 原点の取り方によって, その交差体の形は変わるが, 何らかの意味で交差体の形の良し悪しを定義したいという心から生まれた問題である。その疑問に対して, Moszynska は α 次 $(0 < \alpha < m)$ の x に関する**双対内在的体積** (dual intrinsic volume)

$$\tilde{V}^{(\alpha)}(x) = \int_{S^{m-1}} \rho \quad {}_x(v)^{\alpha} d\sigma(v),\ x \in \mathrm{Ker}\,\Omega \tag{1.18}$$

を最大にする点 (**半径的中心** (radial center)) を原点にすべきだとし, その一意性に関して考察した。

簡単な式変形 (極座標を用いた変数変換) により

$$\tilde{V}^{(\alpha)}(x) = \alpha \int r^{\alpha\ \ m} dy,\ r = |x \quad y| \tag{1.19}$$

がわかる。右辺は Ω が星形でなくとも $x \in \mathbb{R}^m$ に対して定義できる関数 (**Riesz ポテンシャル**) であるから, より一般に, **体** (body, $\mathbb{R}^m$ の有界な (星形とは限らない) 開集合の閉包) Ω に対して, 関数

$$V^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \mathrm{sign}(m \quad \alpha) \displaystyle\int r^{\alpha\ \ m} dy & (0 < \alpha \neq m), \\ \displaystyle\int \log r dy & (\alpha = m), \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^m,\ r = |x \quad y| \tag{1.20}$$

の最大点について, 特に一意性について, 考察しようという研究が, 例えば, [O1] などで見られ, 次が知られる：

定理 1.10　(1) ([M]) $0 < \alpha \leq 1$ で Ω が凸ならば, 半径的中心は一意に定まる。

(2) ([O1]) $\alpha \geq m+1$ ならば, Ω が凸でなくとも半径的中心は一意に定まる。

(3) ([O2]) $1 < \alpha < m+1$ で Ω が凸集合の十分大きい半径による平行体として得られるならば, 半径的中心は一意に定まる。

2　主結果

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ をコンパクトな台をもつ, 恒等的に零でない有界な非負可測関数とする。狭義単調減少な関数 $k : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ を積分核とするポテンシャル

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}^m} k(r) f(y) dy,\ x \in \mathbb{R}^m,\ r = |x \quad y|\,, \tag{2.1}$$

または時間依存型ポテンシャル

$$Kf(x,t) = \int_{\mathbb{R}^m} k(r,t) f(y) dy,\ x \in \mathbb{R}^m,\ t > 0,\ r = |x \quad y|\,, \tag{2.2}$$

を考える。ただし, 積分核 k に条件を付け, Kf が $\mathbb{R}^m$ 全体で連続 (時には C^1 級) であるものとする。(条件式が長くなるため, ここでは詳細を省く。)

本稿の主結果は, ポテンシャル Kf の言葉で解析的背景 (定理 1.1, 1.2) と幾何的背景 (定理 1.10) を眺め, それらに進展を与えたことである。

2.1　解析的結果

定理 1.1(1) と定理 1.2 は, いずれも積分核が熱核でなくとも, 距離 r に関する狭義単調性や凸性が仮定されさえすれば成り立つことがわかる。それをポテンシャル Kf の言葉で述べると次のようになる：

定理 2.1 ([Sak2])

(1) ポテンシャル Kf は最大値をもち, それを与える点たちのすべては f の台の凸包に含まれる。

(2) k が区間 $(0, \operatorname{diam} \operatorname{supp} f)$ で (一変数関数として) 上に凸ならば, Kf は (多変数関数として) f の台の凸包で上に凸になる。したがって, このとき, Kf の最大点は一意に決まる。

証明 (1) Kf を f の台の凸包に制限した関数は, コンパクト集合上の連続関数だから, 最大値をもつ。(Kf の連続性は初めに仮定してあったことに注意する。) f の台の凸包に含まれない任意の点 p は Kf の最大値を与えないことを示す。

p と f の台の凸包との距離を与える点を p' とおく。p' を通る超平面で線分 $\overline{pp'}$ と直交するものがとれて, f の台に含まれる任意の点 y に対して, $|p' \quad y| < |p \quad y|$ が成り立つ。よって, 積分核 k が狭義単調減少であることから結論を得る。

(2) Kf が f の台の凸包で上に凸であることを示すために, 2 点 x と x' を f の台の凸包からとる。

$$Kf\ \left(\frac{x+x'}{2}\right) > \int_{\mathbb{R}^m} k\ \left(\frac{|x \quad y| + |x' \quad y|}{2}\right)\ f(y)dy \geq \frac{Kf(x) + Kf(x')}{2}$$

が成り立つ。ここで, 1 つ目の不等号は k が狭義単調減少であることを, 2 つ目の不等号は k が上に凸であることを用いた。 □

定理 1.1(2) の結果の本質は, 積分核が r^2 の関数であったことである。これは, r^2 の距離核ポテンシャルで最も簡単なもの

$$\mathbb{R}^m \ni x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} r^2 f(y)dy \in \mathbb{R}^m \tag{2.3}$$

の臨界点が f の重心

$$G_f = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)ydy \Big/ \int_{\mathbb{R}^m} f(y)dy \tag{2.4}$$

であることに帰着される。

定理 2.2 ([Sak2]) ある関数 $\bar{k}$, ψ_1, ψ_2 が存在して, 次が成り立つとき, ポテンシャル $Kf(\ ,t)$ の最大点の集合は時間無限大で f の重心の 1 点集合に (Hausdorff 距離に関して) 収束する：

- $k(r,t) = \bar{k}\ \ r^2\psi_1(t) + \psi_2(t)\ \ $ と表せる。
- 時間無限大で $\psi_1(t)$ は 0 に収束し, $\psi_2(t)$ は収束する (その極限を a とおく)。
- $\bar{k}$ は C^2 級で, $\bar{k}'(a) \neq 0$, $\bar{k}''$ は有界である。

注意 2.3 定理 2.2 において,

$$\bar{k}(s) = e^{\ \ s},\ \psi_1(t) = \frac{1}{4t},\ \psi_2(t) = 0 \tag{2.5}$$

とおけば, 熱核 (の x に関係する部分) が得られる。

2.2 幾何的結果

Ω を体とする。ポテンシャル $K\chi\ \ $ は簡単のため $K\ \ $ と略記する。定理 2.1(2) から定理 1.10(2) が従う。定理 1.10(1) は, ポテンシャル $K\ \ $ の言葉で表すよりもさらに一般的な定理が [M] で示されているため, その詳細は省く。定理 1.10(3) の一般化はまだされていない。

ポテンシャル $K\ \ $ の最大点に関する幾何的背景から $K\ \ $ の最大点を体 Ω の ***k*-中心**とよぶことにする。本稿では, k-中心の位置を Ω の凸包の内部に小さく絞り込めることを紹介する。

定義 2.4 ([O1, BMS]) 方向 $v \in S^{m\ \ 1}$ と実数 b を固定する。方向 v に関して高さが b 以上である Ω の点の集合を $\Omega^+_{v,b}$ とおく。超平面 $\{p \in \mathbb{R}^m \,|p\ \ v = b\}$ に関する折り返しを $\mathrm{Refl}_{v,b}$ と表す。方向 v に関して高さ b を下げるごとに, $\Omega^+_{v,b}$ を折り返していき, その像が Ω からはみ出す直前の高さ

$$l(v) = \min\left\{a \in \mathbb{R}\,\middle|\forall b \geq a,\ \mathrm{Refl}_{v,b}\left(\Omega^+_{v,b}\right)\ \ \Omega\right\} \tag{2.6}$$

に対して,

$$Uf(\Omega) = \heartsuit(\Omega) = \bigcap_{v\in S^{m-1}} \{p \in \mathbb{R}^m \,|p\ \ v \leq l(v)\} \tag{2.7}$$

とおく。これを**折りたたまれない極小領域** (minimal unfolded region, [O1]) または**心臓** (heart, [BMS]) とよぶ。

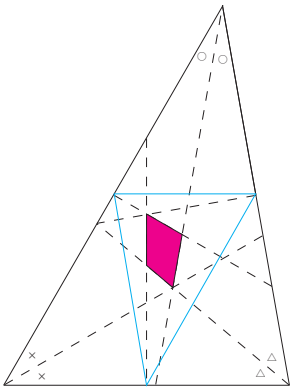


図 1: 鋭角三角形の心臓

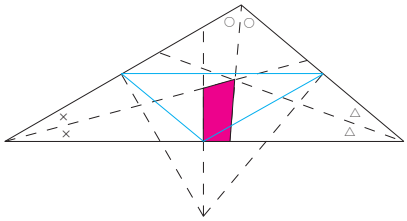


図 2: 鈍角三角形の心臓

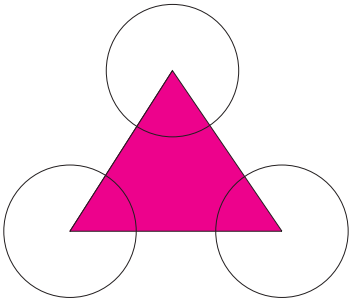


図 3: 3 枚の円板の心臓

定理 2.5 ([Sak2]) すべての k-中心は Ω の心臓に含まれる。

証明 方針は Alexandrov の折り返し原理に基づく。Ω の凸包には含まれるが, Ω の心臓には含まれない点は k-中心になりえないことを示す。

心臓の外部から点 x をとる。ある方向 v が存在して, $x \quad v > l(v)$ が成り立つ。$b = (x \quad v + l(v))/2$ とおく。$x' = \mathrm{Refl}_{v,b}(x)$ とおく。このとき,

$$\begin{aligned} K \quad (x) \quad K \quad x' &= \left(\int_{\substack{+ \\ v,b}} + \int_{\mathrm{Refl}_{v,b}(\substack{+ \\ v,b})} + \int_{\setminus(\substack{+ \\ v,b} \cup \mathrm{Refl}_{v,b}(\substack{+ \\ v,b}))} \right) k\left(|x \quad y|\right) dy \\ &\quad \left(\int_{\mathrm{Refl}_{v,b}(\substack{+ \\ v,b})} + \int_{\substack{+ \\ v,b}} + \int_{\setminus(\substack{+ \\ v,b} \cup \mathrm{Refl}_{v,b}(\substack{+ \\ v,b}))} \right) k \quad \left|x' \quad y\right| \quad dy \\ &> 0 \end{aligned}$$

がわかる。 □

注意 2.6 [BM] でも同様の主張が示されているが, そこで扱われているポテンシャルの積分核は $r = 0^+$ での収束を仮定している。(本稿では仮定していない。例えば, Riesz ポテンシャル $r^{\alpha \quad m}$ $(0 < \alpha < m)$ の場合がそれに相当する。) また, 凸体のみを扱っている。それらの点に関して, 上記定理の価値がある。

凸体の半径的中心の一意性問題において, $1 < \alpha < m + 1$ の場合に未解決問題が多く含まれる。例えば, 2 次元の場合で, 頂角の大きさが $36°$ である二等辺三角形の半径的中心の一意性は示されていなかった。これは, ポテンシャルの 2 階微分が Ω の凸包全体で負にならないからである。そこで, 心臓の幾何を用いて, 二等辺三角形を含む形で次のような進展を与えた：

定理 2.7 ([Sak3]) $\omega : [0,1] \to [0,+\infty)$ を区分的に C^1 級な関数で, $s \mapsto \omega(s)^{m+1}$ は上に凸とする。積分核 k は C^1 級で, $k'(r)/r$ は単調増加とする。このとき, 体

$$\Omega = \left\{ y = \quad y_1, y' \quad \in [0,1] \quad \mathbb{R}^{m \quad 1} \,\middle|\, \left|y'\right| \leq \omega(s) \right\} \tag{2.8}$$

に対して, ポテンシャル $K \quad$ は心臓で上に凸になり, k-中心が一意に定まる。

系 2.8 ([Sak3]) Ω を定理 2.7 と同じものとする。$1 < \alpha < m + 1$ に対して, Ω の半径的中心の一意性が成り立つ。

証明の概略 Stokes の定理より

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_1^2}(\lambda,0) = \int_{\partial} \frac{k'\left(\sqrt{(\lambda - y_1)^2+|y'|^2}\right)}{\sqrt{(\lambda - y_1)^2+|y'|^2}}(\lambda - y_1)\, e_1 \cdot n(y)d\sigma(y)$$

$$= \lambda\sigma_{m-2} S^{m-2}\int_0^{\omega(0)} \frac{k'\left(\sqrt{\lambda^2+r^2}\right)}{\sqrt{\lambda^2+r^2}} r^{m-2}dr$$

$$+ \frac{\sigma_{m-2} S^{m-2}}{m-1}\int_0^1 \frac{k'\left(\sqrt{(\lambda - s)^2+\omega(s)^2}\right)}{\sqrt{(\lambda - s)^2+\omega(s)^2}}(\lambda - s)\, d\omega(s)^{m-1}$$

$$(\lambda - 1)\sigma_{m-2} S^{m-2}\int_0^{\omega(1)} \frac{k'\left(\sqrt{(\lambda-1)^2+r^2}\right)}{\sqrt{(\lambda-1)^2+r^2}} r^{m-2}dr$$

と表せる。1 つ目と 3 つ目の境界積分は明らかに負であるから, 2 つ目の境界積分が負であることを示せばよい。

$$a = \min\left\{ s\in[0,1] \,\middle|\, \omega(s) = \max_{0\le\tau\le 1}\omega(\tau)\right\},\ b = \max\left\{ s\in[0,1] \,\middle|\, \omega(s) = \max_{0\le\tau\le 1}\omega(\tau)\right\}. \tag{2.9}$$

とおくと, 心臓は線分

$$\left\{ (y_1,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m-1} \,\middle|\, \frac{a}{2}\le y_1\le\frac{1+b}{2}\right\}. \tag{2.10}$$

に含まれるから, $a/2\le\lambda\le(1+b)/2$ に対して, 2 つ目の境界積分が負であることを示せばよい。この注意と定理の仮定を用いると結論を得る。 □

注意 2.9 $\omega(s) = s^p$ の場合を考える。$\omega(s)^{m+1}$ が上に凸であるための必要十分条件は $0\le p\le 1/(m-1)$ である。したがって, 3 次元の円錐に対して, 半径的中心の一意性は含まれていない。これは, 回転体の側面の境界積分への寄与が負であることを示すという証明の方針による。Riesz ポテンシャル $V^{(3/2)}$ に対して, その事実を Maple で確かめると図 4 と図 5 のようになる。

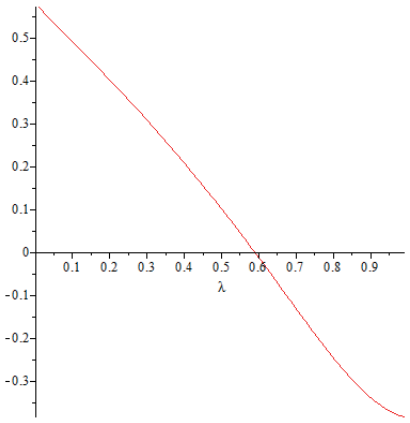


図 4: 円錐の側面の境界積分への寄与

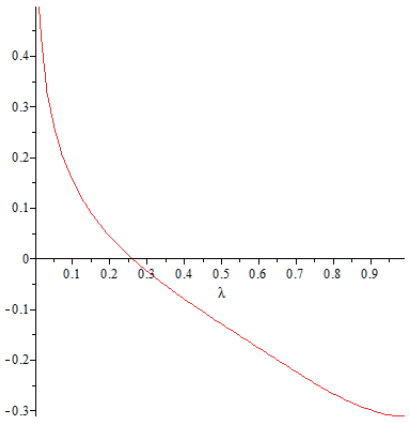


図 5: $\omega(s) = \sqrt{s}$ から得られる回転体の側面の境界積分への寄与

参考文献

[BMS] L. Brasco, R. Magnanini and P. Salani, *The location of the hot spot in a grounded convex conductor*, Indiana Univ. Math. J. **60** (2011), 633–660.

[BM] L. Brasco and R. Magnanini, *The heart of a convex body*, Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's (R. Magnanini, S. Sakaguchi and A. Alvino eds), Springer INdAM Series 2 (2013), 49–66.

[BP] H. Busemann and C. M. Petty, *Problems on convex bodies*, Math. Scand. **4** (1956), 88–94.

[CK] I. Chavel and L. Karp, *Movement of hot spots in Riemannian manifolds*, J. Analyse Math. **55** (1990), 271–286.

[JS] S. Jimbo and S. Sakaguchi, *Movement of hot spots over unbounded domains in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. **182** (1994), 810–835.

[LR] D. G. Larman and C. A. Rogers, *The existence of a centrally symmetric convex body with central sections that are unexpectedly small*, Mathematika **22** (1975), 164–175.

[L] E. Lutwak, *Intersection bodies and dual mixed volumes*, Adv. Math. **71** (1988), 232–261.

[M] M. Moszynska, *Looking for selectors of star bodies*, Geom. Dedicata **81** (2000), 131–147.

[O1] J. O'Hara, *Renormalization of potentials and generalized centers*, Adv. in Appl. Math. **48** (2012), 365–392.

[O2] J. O'Hara, *Uniqueness of radial centers of parallel bodies*, arXiv:1109.5069.

[P] C. M. Petty, *Projection bodies*, Proc. Coll. Convexity, Copenhagen (1965), 234–241.

[Sak1] S. Sakata, *Extremal problems for the central projection*, J. Geom. **103** (2012), no. 1, 125–129.

[Sak2] S. Sakata, *Movement of centers with respcet to various potentials*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[Sak3] S. Sakata, *Experimental investigation on uniqueness of a center of a body*, preprint.

[Sch] R. Schneider, *Zu einem problem von Shephard über die projection konvexer körper*, Math. Z. **101** (1967), 71–82.

[Sh] G. C. Shephard, *Shadow systems of convex bodies*, Israel J. Math. **2** (1964), 229–236.

Shigehiro Sakata
Department of Mathematics and Information Science, Tokyo Metropolitan University
1-1 Minami Osawa, Hachiouji-Shi, Tokyo 192-0397, Japan
sakata-shigehiro@ed.tmu.ac.jp
http://tmubdell.math.se.tmu.ac.jp/sakata/

パラレルセッション
会場Ａ

Convergence Conditions of Mixed States and their von Neumann Entropy in Continuous Quantum Measurements

布田 徹*　北海道大学大学院 理学院 数学専攻

概要

射影作用素の族による量子測定を連続的に適切に行うことで，ユニタリチャンネルをトレースノルムの意味で任意の精度で近似することができる．特に応用として量子ゼノン効果について触れる．無限次元の場合はフォン・ノイマンエントロピーは連続であるとは限らないが，ある条件の下で，上述のように近づけられる状態間のエントロピーの差を任意に小さくすることができる．

1　はじめに

量子系の時間発展は主に二種類に分類出来る．一つは，系のハミルトニアン H によって生成される強連続 1 パラメータユニタリ群 $\{e^{-itH}\}_{t\in\mathbb{R}}$ *で記述されるユニタリな時間発展である．ハミルトニアン H が時間に関して不変である場合，$\{e^{-itH}\}_{t\in\mathbb{R}}$ によって記述される時間発展は，系の初期状態を決定すれば一意的である．考察下の量子系が閉じている限り，時間発展はこのタイプのものである．もう一方の時間発展は測定行為によるものであり，こちらは過去の状態から未来の状態を確率的に予測する．方や一意的，方や確率的であり，未来の状態に対する予測としては測定行為によるものの方が明らかに弱い．しかし，予測が確率的であるにも関わらず，特定の量子測定を連続的に行うと，系の状態が初期状態に留まり続ける場合がある．この効果は，「飛んでいる矢は止まっている」と主張する有名なゼノンのパラドックスとの類似から，量子ゼノン効果と呼ばれる [6].

論文 [2] において，純粋状態に対する量子ゼノン効果の生起条件と，量子ゼノン効果を含むさらに一般的な数学的構造が調べられた．簡単に内容を述べると，状態が初期状態に留まっているか否かの測定を連続的に行うことにより，初期状態が系のハミルトニアンの定義域に含まれる場合，必ず量子ゼノン効果が生起する．一方で，初期状態が系のハミルトニアンの定義域に含まれない場合，量子ゼノン効果が起こるとは限らず，初期状態の選び方によっては生存確率を任意に小さくすることができる．さらに，測定の方法を “滑らかに” 変化させることにより，特定の初期状態を “滑らかに” 別の状態に変化させることもできる（量子ゼノン効果はこの操作の特別な場合と考えられる）.

本研究 [4] では，上述した論文 [2] の結果を，一般の密度作用素で表される混合状態に拡張し，連続測定によるフォン・ノイマン (v.N.) エントロピーの挙動を調べた．量子系が有限次元の場合，v.N. エントロピーはトレースノルムに関して連続であるが，無限次元の場合，一般には連続であるとは限らない．したがって，連続測定により混合状態をトレースノルムの意味で “滑らかに” 変化させることができたとしても，v.N. エントロピーまでそうなるとは限らない．そこで，連続測定によって v.N. エントロピーも連続的に変化するような十分条件を示した．

* E-mail: t-fuda@math.sci.hokudai.ac.jp

* ただし，本稿では $\hbar := \frac{h}{2\pi}$（h はプランク定数）が 1 となる単位系を用いる．

2 混合状態に対する連続測定

2.1 数学的準備

上で述べた混合状態に対する連続測定を議論するための数学的な準備を行う．$\mathcal{H}$ を量子系 $\mathcal{S}$ の純粋状態を表す可分な複素ヒルベルト空間であるとし，その内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と表すことにする．内積は左側について共役線形，右側について線形であるとし，内積によって定まるノルムを $\|\cdot\|$ とする．$\mathcal{H}$ の次元を d とする．$\mathfrak{B}(\mathcal{H}),\mathfrak{C}(\mathcal{H}),\mathfrak{T}(\mathcal{H}),\mathfrak{S}(\mathcal{H}),\mathfrak{U}(\mathcal{H})$ をそれぞれ $\mathcal{H}$ 上の有界作用素，コンパクト作用素，トレースクラス作用素，密度作用素，ユニタリ作用素の全体からなる集合とする．量子系 $\mathcal{S}$ の混合状態は $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ の元で表される．また，トレースノルムを $\|\cdot\|_1 := \mathrm{Tr}|\cdot|$ とする．今，量子系 $\mathcal{S}$ のハミルトニアンが時間に依存しない自己共役作用素 H で表されているとする．$D(H)$ で H の定義域を表すことにする．$\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ への写像を次のように二つ定義する．

1. （**ユニタリチャンネル**）$\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 U に対して，
$$\mathcal{E}_U\rho := U\rho U^*,\ \forall\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$
特に，ユニタリ作用素 e^{-itH} $(t\in\mathbb{R})$ に対しては，$\mathcal{E}_t := \mathcal{E}_{e^{-itH}}$ と略記しよう．
2. （**射影チャンネル**）$\mathfrak{P} := \{P_n\}_n$ を $P_m \perp P_n$ $(m\neq n), I=\sum_n P_n$ を満たす $\mathcal{H}$ 上の射影作用素の族とする．このとき，
$$\mathcal{E}_{\mathfrak{P}}\rho := \sum_n P_n\rho P_n,\ \forall\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$

量子系 $\mathcal{S}$ の状態 $\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ を任意に一つ固定する．
$$\rho=\sum_{n=1}^{d}\lambda_n|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| \tag{2.1}$$
を ρ のシャッテン分解 (の一つ) とする．ただし，式 (2.1) においては λ_n は多重度も込めて考え，$\lambda_n=0$ の場合も含めて $\{\Psi_n\}_{n=1}^d$ が $\mathcal{H}$ の完全正規直交系 (CONS) となるようにしておく．この表し方においては $\lambda_n\geq\lambda_{n+1}$ であるとは限らないことに注意．

以下，特に断りの無い限り ρ,λ_n,Ψ_n は上で定めたものとする．

任意に時刻 $\tau>0$ を一つ固定する．分解 (2.1) に対し，$\{\Psi_n(t)\}_{n=1}^d$ を $\Psi_n(0)=\Psi_n$ $(1\leq\forall n\leq d)$ を満たす，時刻パラメータ $t\in[0,\tau]$ を持つ $\mathcal{H}$ の CONS であるとし，$\mathfrak{P}(t) := \{|\Psi_n(t)\rangle\langle\Psi_n(t)|\}_n$ とする．$n\in\mathbb{N}$ を任意に一つ固定すると，$\Psi_n(\cdot)$ は区間 $[0,\tau]$ 上の $\mathcal{H}$-値関数である．

Δ を区間 $[0,\tau]$ の任意の分割で $\Delta: 0=t_0<t_1<\cdots<t_{N-1}<t_N=\tau$ であるものとし，$k=1,\cdots,N$ に対して $\Delta_k := t_k-t_{k-1}, |\Delta| := \max_{1\leq k\leq N}\Delta_k$ とおく．$\rho_\Delta(\tau)\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ を次のように定義する：
$$\begin{aligned}\rho_\Delta(\tau) :=& \mathcal{E}_{\mathfrak{P}(t_N)}\circ\mathcal{E}_{\Delta_N}\circ\mathcal{E}_{\mathfrak{P}(t_{N-1})}\circ\mathcal{E}_{\Delta_{N-1}}\circ\\ &\cdots\circ\mathcal{E}_{\mathfrak{P}(t_1)}\circ\mathcal{E}_{\Delta_1}\rho.\end{aligned} \tag{2.2}$$

$\rho_\Delta(\tau)$ は，物理的には Δ の各分点 $t_1,\cdots,t_N$ において，それぞれ射影作用素の族 $\mathfrak{P}(t_1),\cdots,\mathfrak{P}(t_N)$ による量子測定を行ったときの時刻 τ における状態である．$\rho_\Delta(\tau)$ は分解 (2.1) の仕方に依存していることに注意．

$|\Delta|\to 0$ としたときの $\rho_\Delta(\tau)$ の挙動を調べる．

直接計算により，次式がわかる：
$$\rho_\Delta(\tau)=\sum_k\lambda_{\Delta,k}\,|\Psi_k(\tau)\rangle\langle\Psi_k(\tau)|\,. \tag{2.3}$$

ただし，
$$\lambda_{\Delta,k} := \sum_{k_0,\cdots,k_{N-1}}\lambda_{k_0}\prod_{j=1}^{N}\left|\langle\Psi_{k_j}(t_j),e^{-i\Delta_j H}\Psi_{k_{j-1}}(t_{j-1})\rangle\right|^2. \quad (k_N=k) \tag{2.4}$$

2.2 各点収束性

次の定理は，各 $\lambda_{\Delta,k}$ が収束するための十分条件を与える．

定理 2.1　ある $k\in\mathbb{N}$ が存在し，以下の条件を満た

すと仮定する：

$$\forall\lambda\in[0,\tau],\quad \Psi_k(\lambda)\in D(H), \tag{2.5}$$
$$\xi_k := \sup_{0\le\lambda\le t}\|H\Psi_k(\lambda)\|<\infty, \tag{2.6}$$
$$\eta_k := \sup_{\substack{\lambda,\nu\in[0,t]\\ \lambda\neq\nu}}\frac{\|\Psi_k(\lambda)-\Psi_k(\nu)\|}{|\lambda-\nu|}<\infty, \tag{2.7}$$
$$\lim_{|\Delta|\to0}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Re}\,\langle\Psi_k(t_j)-\Psi_k(t_{j-1}),\Psi_k(t_{j-1})\rangle=0. \tag{2.8}$$

このとき, $\lim_{|\Delta|\to0}\lambda_{\Delta,k}=\lambda_k$. が成り立つ.

系 2.2　ある $k\in\mathbb{N}$ が存在し，以下の条件を満たすとする：

$$\Psi_k(\cdot):[0,\tau]\to\mathcal{H}\text{ は強微分可能}, \tag{2.9}$$
$$\forall\lambda\in[0,\tau],\quad \Psi_k(\lambda)\in D(H), \tag{2.10}$$
$$\xi_k<\infty, \tag{2.11}$$
$$\sup_{0\le\lambda\le\tau}\|\Psi_k'(\lambda)\|<\infty. \tag{2.12}$$

このとき, $\Psi_k(\cdot)$ は定理 2.1 の仮定 (2.5)–(2.8) を満たす．ゆえに，$\lim_{|\Delta|\to0}\lambda_{\Delta,k}=\lambda_k$ が成り立つ.

例 2.3　A を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする．ある $k\in\mathbb{N}$ が存在し，以下の条件を満たすと仮定する：

$$\Psi_k\in D(A)\cap\bigcap_{0\le\lambda\le t}D(He^{-i\lambda A}), \tag{2.13}$$
$$\sup_{0\le\lambda\le t}\|He^{-i\lambda A}\Psi_k\|<\infty, \tag{2.14}$$
$$\forall\lambda\in[o,\tau],\ \Psi_k(\lambda)=e^{-i\lambda A}\Psi_k. \tag{2.15}$$

このとき，系 2.2 の仮定 (2.9)–(2.12) が満たされることがわかり，したがって定理 2.1 の仮定 (2.5)–(2.8) が満たされる．ゆえに，$\lim_{|\Delta|\to0}\lambda_{\Delta,k}=\lambda_k$ が成り立つ.

2.3　トレースノルム収束性

分解 (2.1) で与えられる ρ に対して, $\rho(t)\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ を

$$\rho(t):=\sum_n\lambda_n|\Psi_n(t)\rangle\langle\Psi_n(t)|,\quad\forall t\in[0,\tau] \tag{2.16}$$

と定義する．次の定理は $\rho_\Delta(\tau)$ が $\rho(\tau)$ にトレースノルムの意味で収束するための十分条件を与える.

定理 2.4　$\lambda_k>0$ なる任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して定理 2.1 の仮定 (2.5)–(2.8) が満たされているとする．このとき，次式が成り立つ：

$$\lim_{|\Delta|\to0}\|\rho_\Delta(\tau)-\rho(\tau)\|_1=0. \tag{2.17}$$

系 2.5　$\lambda_k>0$ なる任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して系 2.2 の仮定 (2.9)–(2.12) が満たされているとすると，$\lim_{|\Delta|\to0}\|\rho_\Delta(\tau)-\rho(\tau)\|_1=0$.

系 2.6　A を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする．$\lambda_k>0$ なる任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して系 2.3 の仮定 (2.13)–(2.15) が満たされているとすると，$\lim_{|\Delta|\to0}\|\rho_\Delta(\tau)-\rho(\tau)\|_1=0$.

系 2.6 により，特に $d<\infty$ の場合，任意の初期状態 $\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ に対して測定の方法を工夫することによって，集合 $\{U\rho U^*\mid U\in\mathfrak{U}(\mathcal{H})\}$ 内の任意の状態に，任意の精度で（トレースノルム $\|\cdot\|_1$ の意味で）近づけることができる．つまり，任意のユニタリチャンネルを連続測定によって近似できることがわかる.

2.4　量子ゼノン効果への応用

$\lambda_k>0$ なる任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $\Psi_k\in D(H)$ かつ $\Psi_k(\lambda)=\Psi_k$ $(\forall\lambda\in[0,\tau])$ であるとする．これは，例 2.3 において $A=0$ とした場合に相当するから，$\lambda_k>0$ なる任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して定理 2.1 の仮定 (2.5)–(2.8) が満たされることがわかる．したがって, 定理 2.4 により $\lim_{|\Delta|\to0}\|\rho_\Delta(\tau)-\rho(\tau)\|_1=0$ が成り立つ．この場合，$\rho_\Delta(\tau)$ に含まれる各射影チャネルは常に射影作用素の族 $\{|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\}_k$ に対する射影チャネルであり，(初期状態 ρ に依存した) ある同じ種類の観測を間断なく行うと，状態 ρ が固定されることを意味する．これは量子ゼノン効果である.

3　v.N. エントロピーの連続性

関数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ を $\varphi(\lambda):=-\lambda\log\lambda$ により定義する．ただし，$\varphi(0):=0$ であるとする．φ は連続な凹関数であり，劣加法的である．$S(\rho)$ を $\rho\in\mathfrak{S}$ に対する v.N. エントロピーとする．i.e. $S(\rho):=\mathrm{Tr}\varphi(\rho)$.

$d < \infty$ のとき，Fannes の不等式により $\rho_1, \rho_2 \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ に対して $\|\rho_1 - \rho_2\|_1 \leq 1/e$ ならば

$$|S(\rho_1) - S(\rho_2)| \leq \|\rho_1 - \rho_2\|_1 \log d + \varphi(\|\rho_1 - \rho_2\|_1).$$

したがって，v.N. エントロピーのトレース・ノルムに関する連続性がわかる．

しかし，$d = \infty$ のとき，一般に v.N. エントロピーはトレースノルム $\|\cdot\|_1$ に関して下半連続（i.e. $\lim_{n\to\infty} \|\rho_n - \rho\|_1 = 0 \Longrightarrow S(\rho) \leq \liminf_{n\to\infty} S(\rho_n)$）であるが，連続とは限らない．

以下では，$\dim \mathcal{H} = \infty$ であるとする．

前節までで考察した $\rho_\Delta(\tau), \rho$ に対し，$S(\rho_\Delta(\tau)) \to S(\rho)$ となるための十分条件は，次の定理 3.1 で与えられる．

定理 3.1　任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して (2.5)–(2.7) が成り立ち，$\lambda_k > 0$ なる任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して (2.8) が成り立つと仮定する．さらに，以下の条件が満たされていると仮定する：

$$\xi_k \to 0, \quad \eta_k \to 0 \ (k \to 0), \tag{3.1}$$

$$S(\rho) < \infty, \tag{3.2}$$

$$\sum_k \varphi(\xi_k^2) < \infty, \quad \sum_k \varphi(\eta_k^2) < \infty. \tag{3.3}$$

このとき，次式が成り立つ：

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(\rho_\Delta(\tau)) = S(\rho(\tau)) = S(\rho). \tag{3.4}$$

注意 3.2　$H \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ の場合，$\xi_k \to 0$, $\sum_k \varphi(\xi_k^2) < \infty$ より $\varphi(H^2) \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$ がわかる．

例 3.3　物理量 A がハミルトニアン H に関する保存量であるとし，かつ $A, H \in \mathfrak{C}(\mathcal{H})$ であるとする．さらに，次の条件が満たされているとする：

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall \lambda \in [0,\tau],\ \Psi_k(\lambda) = e^{-i\lambda A}\Psi_k,\ S(\rho) < \infty,$$
$$\sum_k \varphi(\|H\Psi_k\|^2) < \infty,\ \sum_k \varphi(\|A\Psi_k\|^2) < \infty.$$

このとき，定理 3.1 の仮定をすべて満たす．ゆえに，$S(\rho_\Delta(\tau)) \to S(\rho)$ $(|\Delta| \to 0)$ が成り立つ．

特に $A = 0$ とすると，次がわかる：

$$H \in \mathfrak{C}(\mathcal{H}),\ \Psi_k(\lambda) = \Psi_k\ (\forall k \in \mathbb{N},\ \forall \lambda \in [0,\tau]),$$
$$S(\rho) < \infty,\ \sum_k \varphi(\|H\Psi_k\|^2) < \infty$$
$$\Longrightarrow \lim_{|\Delta|\to 0} S(\rho_\Delta(\tau)) = S(\rho).$$

参考文献

[1] A. Arai, Mathematical Principles of Quantum Statistical Mechanics, Kyoritsu Shuppan, 2008. (in Japanese).

[2] A. Arai and T. Fuda, Some mathematical aspects of quantum Zeno effect, *Lett. Math. Phys.* **100** (2012), 245–260.

[3] M. Fannes, A continuity property of the entropy density for spin lattice systems, *Comm. Math. Phys.* **31** (1973), 291–294.

[4] T. Fuda, Convergence Conditions of Mixed States and their von Neumann Entropy in Continuous Quantum Measurements, arXiv:1312.2028.

[5] E. H. Lieb and M. B. Ruskai, Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy (with an appendix by B. Simon), *J. Math. Phys.* **14** (1973), 1938–1941.

[6] B. Misra and E. C. G. Sudarshan, The Zeno's paradox in quantum theory, *J. Math. Phys.* **18** (1977), 756–763.

[7] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[8] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics Vol. I, Academic Press, New York, 1972.

[9] H. Umegaki and M. Ohya, Quantum Mechanical Entropy, Kyoritsu Shuppan, 1984. (in Japanease).

[10] J. von Neumann, Die Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932. Reprint:1981.

[11] A. Wehrl, Three theorems about entropy and convergence of density matrices, *Rep. Math. Phys.* **10** (1976), 159–163.

Differentiation in Locally Convex Spaces and its Application to Asymptotic Analysis of the Partition Function of an Abstract Bose Field Model

Yuta Aihara

Department of Mathematics, Hokkaido University

I. An Asymptotic Formula For The Partition Function

Let $\mathscr{H}$ be a real separable Hilbert space, and A be a strictly positive self-adjoint operator acting in $\mathscr{H}$. We denote by $\{\mathscr{H}_s(A)\}_{s\in\mathbb{R}}$ the Hilbert scale associated with A. For all $s \in \mathbb{R}$, the dual space of $\mathscr{H}_s(A)$ can be naturally identified with $\mathscr{H}_{-s}(A)$.

We denote by $\mathscr{I}_1(\mathscr{H})$ the ideal of the trace class operators on $\mathscr{H}$. Let $\gamma_0 > 0$ be fixed. We assume the following.

Assumption I. $\quad A^{9-\gamma_0} \in \mathscr{I}_1(\mathscr{H})$.

Under Assumption I, the embedding mapping of $\mathscr{H}$ into

$$E := \mathscr{H}_{-\gamma_0}(A)$$

is Hilbert-Schmidt. Hence, by Minlos' theorem, there exists a unique probability measure μ on $(E, \mathscr{B})$ such that the Borel field $\mathscr{B}$ is generated by $\{\phi(f) | f \in \mathscr{H}_{\gamma_0}\}$ and

$$\int_E e^{i\phi(f)} d\mu(\phi) = e^{-\|f\|^2_{\mathscr{H}}/2}, \quad f \in \mathscr{H}_{\gamma_0},$$

where $\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$ denotes the norm of $\mathscr{H}$.

The complex Hilbert space $L^2(E, d\mu)$ is canonically isomorphic to the boson Fock space over $\mathscr{H}$, which is called the Q-space representation of it. We denote by $d\Gamma(A)$ the second quantization of A and set

$$H_0 = d\Gamma(A).$$

Then for all $\beta > 0$, $e^{-\beta H_0} \in \mathscr{I}_1(L^2(E, d\mu))$ [2].

Definition 1.1. *A mapping V of a Banach space X into a Banach space Y is said to be polynomially continuous if there exists a polynomial P of two real variables with positive coefficients such that*

$$\|V(\phi) - V(\psi)\| \leq P(\|\phi\|, \|\psi\|)\|\phi - \psi\|, \quad \phi, \psi \in X.$$

Let V be a real valued function on E. We assume the following.

Assumption II. *The function V is bounded from below, 3-times Fréchet differentiable, and V, V', V'', V''' are polynomially continuous.*

For $\hbar > 0$, we define $V_\hbar$ by

$$V_\hbar(\phi) := V(\sqrt{\hbar}\,\phi), \quad \phi \in E.$$

and set

$$H_\hbar := H_0 \dot{+} \frac{1}{\hbar} V_\hbar,$$

where $\dot{+}$ denotes the quadratic form sum.
Under Assumption I, II, for all $\beta > 0$, $e^{-\beta H_\hbar} \in \mathscr{I}_1(L^2(E, d\mu))$ [2].

Then we can prove the following asymptotic formula [1].

Theorem 1.2. *For all $\beta > 0$,*

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{Tr} e^{-\beta\hbar H_\hbar}}{\mathrm{Tr} e^{-\beta\hbar H_0}} \\
= &\int_E \exp\left(-\beta V\left(\sqrt{\frac{2}{\beta}} A^{-1/2}\phi\right)\right) d\mu(\phi) \\
&-\frac{\beta^3\hbar^2}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{E^2} d\mu(\phi)d\mu(\psi)\exp\left(-\beta V\left(\sqrt{\frac{2}{\beta}} A^{-1/2}\phi\right)\right) \\
\times\ &V''\left(\sqrt{\frac{2}{\beta}} A^{-1/2}\phi\right)\left(A^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}\pi m}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{n,m}e_n\right), A^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}\pi m}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{n,m}e_n\right)\right) \\
&+o(\hbar^2)
\end{aligned}$$

as $\hbar \to 0$.

II. For Higher Order Approximation Of The Partition Function

To prove that the partition function is C^∞, we consider the following Fréchet space instead of fixing $\gamma > 0$

$$\mathscr{E} := \bigcap_{\gamma \geq \gamma_0} \mathscr{H}_\gamma(A).$$

Then we can see that

$$\mathscr{E}' = \bigcup_{\gamma \geq \gamma_0} \mathscr{H}_{-\gamma}(A).$$

Considering the image of the measure μ by the embedding from E to $\mathscr{E}'$, we can see that there exists a unique probability measure $\widetilde{\mu}$ on $(\mathscr{E}', \widetilde{\mathscr{B}})$ such that the Borel field $\widetilde{\mathscr{B}}$ is generated by $\{\phi(f) | f \in \mathscr{E}\}$ and

$$\int_{\mathscr{E}'} e^{i\phi(f)} d\widetilde{\mu}(\phi) = e^{-\|f\|^2_{\mathscr{H}}/2}, \quad f \in \mathscr{E}.$$

Then we can see that $L^2(\mathscr{E}', d\widetilde{\mu})$ is canonically isomorphic to $L^2(E, d\mu)$, or

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}_{\mathbb{C}}) \simeq L^2(E, d\mu) \simeq L^2(\mathscr{E}', d\widetilde{\mu}).$$

In what follows, we consider the case that V is defined on $\mathscr{E}'$. Here we need the notion of differentiability in locally convex spaces. We can regard differeniability or differentiation in locally convex spaces as a kind of mathematical structure. We sketch out the structure we need here.

Let E, F, G, H be Hausdorff locally convex spaces. We denote by $L(E, F; G)$ the linear space of all bounded bilinear mappings from $E \times F$ to G, and by $L({}^nE; G)$ be the linear space of all bounded multi linear mappings from E^n to G, into which we introduce the topology of uniformly convergence on bounded subsets of E^n. .

(1)For each differentiable mapping f from E to F, the mapping Df from E to $L(E, F)$ is defined.

(2)For all $f \in L(E, F)$, $Df \equiv f$.

(3)For all mappings f from E to F which have the constant value, $Df \equiv 0$.

(4)We have the following Leibniz's rule.

Let f be a differentiable mapping from E to F, g be a differentiable mapping from E to G, and $L \in L(F, G; H)$. Then we have

$$D\{L(f, g)\}(x)(h) = L((Df)(x)(h), g(x)) + L(f(x), (Dg)(x)(h)), \quad x, h \in E.$$

(5)We have the following rule on the composition of differentiable mappings.

Let f be a differentiable mapping from E to F and g be a differentiable mapping from F to G. Then $g \circ f$ is differentiable and satisfies the following formula.

$$D(g \circ f)(x) = (Dg)(f(x)) \circ (Df)(x), \quad x \in E.$$

(6)Let E, F be normed spaces and f be a mapping from E to F. Then f is differentiable if and only if f is Fréchet differentiable.

For example, Silva Differentiability or Silva differentiation satisfies all the properties stated above [3].

We use a structure of differentiation in locally convex spaces which satisfies the properties stated above. We introduce the weak dual topology into $\mathscr{E}'$. We assume the following.

Assumption III. *V is C^∞, bounded from below, and for all $n \in \mathbb{N}$ and $\gamma \geq \gamma_0$, $(V|_{\mathscr{H}_{-\gamma}(A)})^{(n)}$ is polinomially continuous.*

Then we can apply some propositions in the framework of Banach spaces in [1] and prove that the partition function is C^∞ in $\hbar$.

REFERENCES

[1] Y. Aihara, Semi-classical asymptotics in an abstract Bose field model, *IJPAM* **85** (2013), 265-284.

[2] A. Arai, Trace formulas, a Golden-Thompson inequality and classical limit in Boson Fock space, *J. Funct. Anal.* **136** (1996), 510-546.

[3] J.F. Colombeau, "Differential Calculus and Holomorphy," North-Holland, 1982.

非自己共役なハミルトニアンに対する力学の構成と，その応用について

二口 伸一郎[1]　(北海道大学)

概 要

本講演では，ヒルベルト空間上の**非有界**かつ**非自己共役**な作用素に対する，シュレーディンガー方程式とハイゼンベルク方程式の解の構成方法を紹介します．この方法は，量子電磁力学のローレンツゲージにおける力学の構成に使用できるほか，対称作用素の自己共役性の判定にも応用可能です．

このテクニカルレポートでは，様々な分野の方に興味を持って頂けるように，できるだけ平易な説明を心掛けます．この研究は，北海道大学 PD 臼井耕太[2]氏との共同研究です．

キーワード：シュレーディンガー方程式，time-ordered exponential，自己共役性，量子電磁力学

1　はじめに，モチベーション

量子論において，時間発展の存在は理論を定義する上で不可欠な要素です．

もし，時間発展の生成子 H（ハミルトニアンと呼ばれる）が，ヒルベルト空間上の自己共役作用素であるならば，何も問題はありません．なぜなら，自己共役作用素 H からは，作用素解析を用いてユニタリ作用素からなる群 $\{e^{-itH}\}_{t\in\mathbb{R}}$ が一意的に作れるからです．もっと詳しく言うと，時刻ゼロの状態 ψ に対して，時刻 t の状態を $\psi(t) := e^{-itH}\psi$ で定めれば，シュレーディンガー方程式：

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -iH\psi(t), \quad t\in\mathbb{R}, \quad \psi(0) = \psi, \tag{1.1}$$

が一意に満たすからです．したがって，時間発展の存在のために数学屋が調べればよいことはもっぱら，ハミルトニアン H の自己共役性の判定に帰着します．

しかしながら，物理学で扱われる H に，自己共役ではなく，正規 (normal) ですらないものが存在します．したがって作用素解析は使えませんので，時間発展を記述する群 e^{-itH} が存在するかどうかは全く非自明です．常識的な量子論の観点からするとかなり異常な事態ですが，その例のいくつかが物理学の中で極めて重要な位置を占めるために，無視するわけにいきません．例として，ローレンツゲージにおける量子電磁力学を後でご紹介します．**この研究の目的は，自己共役でないハミルトニアンに対する時間発展を実際に構成し，解析することです．**

今回採用した解決策は，簡単に言うと，「相互作用描像での時間発展を作っておいて，それをシュレーディンガー描像に翻訳する」，です．描像とは何ぞや？という方のために，用語のすべてを解説する余裕はありませんが，概要を説明します．時間発展の生成子である H は，しばしば

$$H = H_0 + H_1 \tag{1.2}$$

のように 2 つの項で表されます．H_0 は自由ハミルトニアンといって，時間発展を含む色々な性質がよくわかっているものです．H_1 は相互作用ハミルトニアンといって，よくわからない時間発展を引き起こすものです．H_0 はよくわかっているので，当然，時間発展を記述する群 $\{e^{-itH_0}\}_{t\in\mathbb{R}}$ が得られているものとします．まず最初に，

$$H_1(t) := e^{itH_0}H_1e^{-itH_0}, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{1.3}$$

[1]Email: futakuchi@math.sci.hokudai.ac.jp
[2]Email: kouta@math.sci.hokudai.ac.jp

とおきます．そして，物理学において time-ordered exponential と呼ばれる級数：

$$U(t,t') = 1 + (-i)\int_{t'}^{t} d\tau_1\, H_1(\tau_1) + (-i)^2 \int_{t'}^{t} d\tau_1 \int_{t'}^{\tau_1} d\tau_2\, H_1(\tau_1)H_1(\tau_2) + \dots. \tag{1.4}$$

を定義します．厳密に構成するときには，積分の意味や，この級数が収束するかどうかが大問題になりますが，適切な条件下では，この級数はちゃんと数学的な意味をもち，次の微分方程式の解であることがわかります：

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,t') = -iH_1(t)U(t,t'). \tag{1.5}$$

この微分方程式が，相互作用描像における時間発展を記述するものです．(ちなみに，(1.4) の級数はこの微分方程式を逐次積分で解いて得られるものです)．一方，全ハミルトニアンに関する時間発展作用素 e^{-itH} が存在するならば，この $U(t,t')$ を用いて

$$e^{itH_0}e^{-itH} = U(t,0), \quad \text{i.e.} \quad e^{-itH} = e^{-itH_0}U(t,0) \tag{1.6}$$

と表されることが知られています．我々の直面している状況では，e^{-itH} が存在するかどうかわかりませんでしたので，このような表示ができるとは限りませんが，(1.6) から察するに，「相互作用描像の時間発展 $U(t,t')$ が先に作れれば，シュレーディンガー描像の時間発展 e^{-itH} が作れるはず」．これから紹介する結果は，このような考察に基づくものです．

2　主結果

$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間，H_0 を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素，H_1 を $\mathcal{H}$ 上稠密に定義された閉作用素とし，ハミルトニアン H を

$$H := H_0 + H_1, \tag{2.1}$$

で定めます．H_1 は対称作用素でなくとも構いません．用いる仮定は次の通りです．

仮定 1. *$\mathcal{H}$ 上の，ある作用素 A が存在して，次の 4 条件を満たす：*

(I) A は自己共役かつ非負（*i.e.* $A \geq 0$）である．

(II) A と H_0 は強可換である．

(III) H_1 とその共役作用素 H_1^* は $A^{1/2}$ に相対有界である．ただし $A^{1/2}$ は作用素解析によって定める．

(IV) A に対応する 1 次元スペクトル測度を $E_A(\cdot)$ $(\cdot \in \mathcal{B}^1)$ で表す．このとき，ある定数 $b > 0$ が存在して，すべての $L \geq 0$ に対し，$H_1\big(\mathrm{Ran}(E_A([0,L]))\big) \subset \mathrm{Ran}(E_A([0,L+b]))$，$H_1^*\big(\mathrm{Ran}(E_A([0,L]))\big) \subset \mathrm{Ran}(E_A([0,L+b]))$ が成立する．

ここで，A は何らかの物理量であることを想定した作用素です．典型例としては，場の量子論における粒子数を想定しています．条件 (IV) がややこしい形をしていますが，かなり乱暴に説明するなら，「1 回の相互作用につき，A の値は b しか増えない」ということを主張しています．

いま，部分空間 $D \subset \mathcal{H}$ を

$$D := \bigcup_{L \geq 0} \mathrm{Ran}E_A([0,L]) \tag{2.2}$$

で定めます．先ほどの粒子数としての A で説明するならば，D は粒子数が有限であるような状態からなる部分空間を意味します．我々の結果の中核は次の定理です．

定理 1. 仮定 *1* の下で，各 $t, t' \in \mathbb{R}$, $\xi \in D$ に対して，級数：

$$U(t,t')\xi := \xi + (-i)\int_{t'}^{t} d\tau_1\, H_1(\tau_1)\xi + (-i)^2 \int_{t'}^{t} d\tau_1 \int_{t'}^{\tau_1} d\tau_2\, H_1(\tau_1)H_1(\tau_2)\xi + \cdots \tag{2.3}$$

は絶対収束する．ただし，積分は強積分の意味でとる．さらに，次が成立する：

(i) 各 $\xi \in D$ に対し，$U(t,t')\xi$ は強 C^1-級であり，微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,t')\xi = -iH_1(t)U(t,t')\xi, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}U(t,t')\xi = iU(t,t')H_1(t')\xi. \tag{2.5}$$

を満たす．

(ii) $W(t) := e^{-itH_0}U(t,0)$ $(t \in \mathbb{R})$ とおく．このとき，各 $\xi \in \mathrm{Dom}(H_0) \cap D$ に対して，ベクトル値関数 $t \mapsto \xi(t) := W(t)\xi$ は，初期値問題としてのシュレーディンガー方程式：

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = -iH\xi(t), \quad \xi(0) = \xi, \tag{2.6}$$

の解である．

この結果は前節での考察をそのまま厳密にしたものです．$W(t)$ がまさに (1.6) で与えられるべき e^{-itH} に相当するもので，望ましい微分方程式を満たしていることが (2.6) からわかります．ハイゼンベルク方程式の解も，この $W(t)$ を用いて構成されます．詳しい結果については [2] を参照下さい．

実は，自己共役でない作用素から時間発展を構成するやり方は他にも，(1) レゾルヴェント評価による方法，(2) Trotter-Kato の積公式，(3) 全解析ベクトルを用いた方法，など，いくつかの方法があるのですが，後述の例はそれらの適用が不可能であるか極めて困難であったために，今回の手法を研究した次第です．

3 応用例 1：ローレンツゲージにおける量子電磁力学

あまり余白がないので短く紹介します．量子電磁力学というのはゲージ場の量子論のひとつで，詳しいことはさておき，ローレンツゲージの下で量子化されたハミルトニアンは

$$H := \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} : \Big(\underbrace{-\frac{1}{2}\pi_\mu\pi^\mu + \frac{1}{2}\partial_j A_\mu \partial^j A^\mu + \overline{\psi}(\boldsymbol{\gamma}\cdot(-i\nabla) + M)\psi}_{H_0 \text{ part}} + \underbrace{e\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi}_{H_1 \text{ part}} \Big) : \tag{3.1}$$

で与えられます．ローレンツゲージは相対論的共変性をもち，大変便利なのですが，状態空間の中に負のノルムの状態が絶対に現れてしまいます．これはとんでもない異常事態ですので，まともな量子論にするための措置として，「ゲージ場 $A_\mu(t,\mathbf{x})$ の 4 次元発散 $\partial_\mu A^\mu(t,\mathbf{x})$ の正振動部分で消える状態だけを物理的な状態として採用せよ」という Gupta-Bleuler's method[3]がよく知られています．我々はこれを数学にしたいのですが，時刻 t におけるゲージ場 $A_\mu(t,\mathbf{x})$ がそもそも存在するかどうかが非自明です．通常，物理学では時刻 0 の場 $A_\mu(0,\mathbf{x})$ を用意したのちに，時刻 t における場を

$$A_\mu(t,\mathbf{x}) := e^{itH}A_\mu(0,\mathbf{x})e^{-itH} \tag{3.2}$$

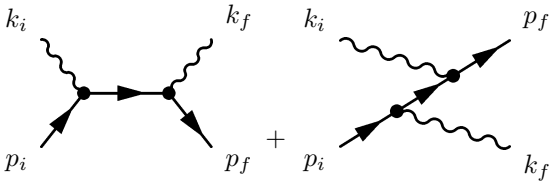
で定めます．我々の結果はこの e^{-itH} に相当する作用素を数学的に実現するものです．ただし，そのためには様々な cutoff（紫外切断や，空間切断）を導入して，まともなヒルベルト空間上で (3.1) のハミルトニ

[3] より包括的な方法として，中西-Lautrup の方法や，BRST 対称性を用いた方法があります．

アン H を表現する必要があります．そうすると，主結果で紹介した仮定 1 を満たすことがチェックできて，めでたく時間発展が得られます．

また，我々の結果の最大の利点は，(2.3) で与えた time-ordered exponential $U(t,t')$ がちゃんと収束していることです．time-ordered exponential は物理学において様々な摂動計算に用いられるもので，例えば，コンプトン散乱：

$$\langle k_{\mathrm{f}}; p_{\mathrm{f}}|S|k_{\mathrm{i}}; p_{\mathrm{i}}\rangle = \quad + \quad + \cdots \tag{3.3}$$



のような計算に用いられます．cutoff 入りの $U(t,t')$ からもこのような計算過程を，cutoff を外す極限で（ある程度は）再現できます．

ここで紹介したハミルトニアンに限らず，クーロンゲージにおける量子電磁力学 [5] や，他にもボソンの場に関して 1 次であるような模型であれば，$U(t,t')$ は構成可能です[4]．

4　応用例 2：自己共役性の判定

ヒルベルト空間上で，自己共役作用素と強連続ユニタリ群が 1 対 1 に対応していることはよく知られていて，その事実のひとつの現れとして，「対称作用素 H に対して，$\xi \in \mathrm{Dom}(H)$ を初期値とするシュレーディンガー方程式の解が常に存在するならば，H は自己共役である」という事実[5]がよく知られています．つまり，対称作用素に関しては，時間発展の存在は自己共役性と等価です．この意味で，我々の結果を通常の対称なハミルトニアンに対して適用することにより，自己共役性の判定に応用することが可能です．この方法は，加藤-レリッヒの定理や，交換子定理，ネルソンの解析ベクトル定理のような従来の方法では自己共役性が判定しづらいタイプの作用素に対して効果を発揮することがあります．詳細に関しては [3] を参照下さい．具体例として，Dirac-Maxwell ハミルトニアン [1] と呼ばれる特異な作用素の自己共役性を証明しています．

参考文献

[1] Asao Arai. A particle-field Hamiltonian in relativistic quantum electrodynamics. *J. Math. Phys.*, 41 (7): 4271-4283, 2000.

[2] Shinichiro Futakuchi and Kouta Usui. Construction of dynamics and time-ordered exponential for unbounded non-symmetric Hamiltonians. arXiv:1309.5194 [math-ph].

[3] Shinichiro Futakuchi and Kouta Usui. New criteria for self-adjointness and its application to Dirac-Maxwell Hamiltonian. arXiv:1310.5296 [math-ph].

[4] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, second edition, 1980.

[5] Toshimitsu Takaesu. On the spectral analysis of quantum electrodynamics with spatial cutoffs. I. *J. Math. Phys.*, 50(6): 062302, 28, 2009.

[4] 3 次以上の相互作用のある模型に対しては未解決です．

[5] 例えば，[4, p. 267] を参照．

準相対論的なPauli-Fierz模型の基底状態の存在について

日高建* （九州大学大学院数理学研究院）

1 はじめに

場の量子論で準相対論的なPauli-Fierz模型と呼ばれる模型について解説する．ここでは, ハミルトニアンの本質的スペクトルを特定し, 基底状態が存在することを述べる．ここで, 基底状態とはハミルトニアンのスペクトルの下限に対応する固有ベクトルのことである．

これまで, 様々な模型でスペクトルに関する数学的に厳密な研究がされてきた．特に, スペクトルの下限, 連続スペクトル, 共鳴現象などが調べられてきた．その一つが準相対論的なPauli-Fierz模型である．Pauli-Fierz模型はシュレーディンガー作用素 $-\frac{1}{2M}p^2+V$ に従う電子と量子輻射場 A がミニマル結合した非相対論的な量子電磁気学の模型であり, 全ハミルトニアン H_{PF} は $L^2(\mathbb{R}^d)\otimes\mathscr{F}$ 上の自己共役作用素として定義される．H_{PF} は次の形を持つ:

$$H_{PF}=\frac{1}{2M}\left(p\otimes\mathbb{1}-A\right)^2+V\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\mathrm{H_f}.$$

ここで,$\mathscr{F}$ は $\oplus^{d-1}L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のボソンフォック空間,$p=(-i\partial_{x_1},\cdots,-i\partial_{x_d})$ は電子の運動量作用素,V は外部ポテンシャル, $\mathrm{H_f}$ は自由場のハミルトニアンである．[BFS99, GLL01, Hir99] などにおいて,H_{PF} の基底状態の存在が証明されている．一方, 準相対論的なPauli-Fierz模型は, 量子輻射場 A と準相対論的なシュレーディンガー作用素 $\sqrt{p^2+M^2}+V$ に従う電子とがミニマル結合した模型であり, 形式的に全ハミルトニアンは

$$H=\sqrt{\left(p\otimes\mathbb{1}-A\right)^2+M^2}+V\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\mathrm{H_f}$$

と書ける．[KMS11, KM12] において, 静止質量 M が正の場合に H が基底状態をもつことは既に示されている．$M=0$ の場合も含めて基底状態の存在を示すことが目的である．

*email: t-hidaka@math.kyushu-u.ac.jp

2 準備

2.1 ボソンフォック空間

量子場を記述するために, ボソンフォック空間を導入する．複素ヒルベルト空間 $W = \oplus^{d-1} L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 3$ 上のボソンフォック空間 $\mathscr{F}$ は $\mathscr{F} = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n(W) = \oplus_{n=0}^{\infty} [\otimes_s^n W]$ で与えられる．ここで，$\otimes_s^n$ は n 重対称テンソル積を表し $\otimes_s^0 W = \oplus^{d-1}\mathbb{C}$ とする．$\otimes_s^n W$ を n 粒子空間という．$\mathscr{F}$ のベクトルは $(\Psi^{(0)}, \Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \cdots)$, $\Psi^{(n)} \in \otimes_s^n W$ と表せる．$\Omega = (1, 0, \cdots) \in \mathscr{F}$ をボソンフォック真空という．$f \in W$ によって均された（ボソン）生成作用素 $a^\dagger(f)$ と（ボソン）消滅作用素 $a(f)$ を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
&D\left(a^\dagger(f)\right) = \left\{ \Psi \in \mathcal{F} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} n \left\| S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)}) \right\|^2 < \infty \right\}, \\
&\left(a^\dagger(f)\Psi\right)^{(n)} = \sqrt{n} S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)}), n \geq 1, \quad \left(a^\dagger(f)\Psi\right)^{(0)} = 0, \\
&a(f) = (a^\dagger(f))^*.
\end{aligned}
$$

ここで，$D(T)$ は線形作用素 T の定義域を表す．$a(f)$ と $a^\dagger(f)$ は次の正準交換関係を満たす:

$$
[a(f), a^\dagger(g)] = (\bar{f}, g)_W, \qquad [a(f), a(g)] = 0 = [a^\dagger(f), a^\dagger(g)].
$$

$\tilde{f} = (0, \cdots, 0, \overset{r-\text{th}}{f}, 0, \cdots, 0) \in W$ に対して，$a^r(f) = a(\tilde{f})$ と表す．稠密に定義された W 上の可閉作用素 T に対して，第二量子化作用素 $d\Gamma(T)$ を

$$
d\Gamma(T) = \oplus_{n=0}^{\infty} \left[\otimes^n T^{(n)} \right]
$$

によって定義する．但し，$T^{(n)}$ は

$$
T^{(0)} = 0, \quad T^{(n)} = \overline{\sum_{k=1}^{n} 1 \otimes \cdots 1 \otimes \overset{k-\text{th}}{T} \otimes 1 \cdots \otimes 1 |_{\otimes_s D(T)}}
$$

である．T が下に有界な自己共役作用素のとき，$d\Gamma(T)$ も下に有界な自己共役作用素である．

2.2 準相対論的な Pauli-Fierz 模型

準相対論的な Pauli-Fierz 模型における状態ヒルベルト空間を $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathscr{F}$ とする．静止質量が $M \geq 0$ のとき準相対論的なシュレーディンガー作用素は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上で

$$
\sqrt{p^2 + M^2} + V
$$

によって与えられる．外部ポテンシャル V に以下の仮定をする．

Assumption 2.1 (A.1) V は非負で，$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty$ を満たす．

(A.2) V は二回微分可能で，$\mu = 1, ..., d$ に対して $\partial_\mu V$ と $\partial_\mu^2 V$ は有界である．

運動量 $k \in \mathbb{R}^d$ における光子 1 個のエネルギーを表す関数を $\omega(k)$ とし，以下の仮定をする．

Assumption 2.2 $\omega \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, $\nabla\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\inf_{k\in\mathbb{R}^d} \omega(k) = m > 0$, $\lim_{|k|\to\infty} \omega(k) = \infty$.

この仮定における $m > 0$ は光子の仮想的な質量を表す．自由場のハミルトニアン $\mathrm{H_f}$ は W 上の掛け算作用素 $\oplus^{d-1}\omega$ の第二量子化作用素として与えられる．従って，

$$\mathrm{H_f} = d\Gamma(\oplus^{d-1}\omega).$$

d 次元偏光ベクトル $e^r(k) = (e_1^r(k), ..., e_d^r(k))$ は，$k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ と $r = 1, ..., d-1$ に対して $e^r(k) \cdot e^s(k) = \delta_{rs}$ と $k \cdot e^r(k) = 0$ を満たすベクトルとして与えられる．$\hat{\varphi}$ を以下の仮定を満たす紫外切断関数とする．

Assumption 2.3 $\omega\sqrt{\omega}\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\hat{\varphi}(k) = \overline{\hat{\varphi}(-k)}$.

各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，量子輻射場 $A(x) = (A_1(x), ..., A_d(x))$ は $\mathscr{F}$ 上で次のように与えられる．

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^{d-1} \left\{ a^{\dagger r}\left(\frac{\hat{\varphi} e_\mu^r e^{-ik\cdot x}}{\sqrt{\omega}} \right) + a\left(\frac{\hat{\varphi}(-\cdot) e_\mu^r e^{ik\cdot x}}{\sqrt{\omega}} \right) \right\}.$$

$\hat{\varphi}(k) = \overline{\hat{\varphi}(-k)}$ ならば $A_\mu(x)$ は本質的に自己共役である． 自己共役拡大も同じ記号 $A_\mu(x)$ で表すことにする．$\mathscr{H}$ は $\int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \mathscr{F} \mathrm{d}x = L^2(\mathbb{R}^d; \mathscr{F})$ と同一視できる．この同一視の下で，自己共役作用素 $A_\mu = \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} A_\mu(x) \mathrm{d}x$ を定義する．ミニマル相互作用 $p \to p \otimes \mathbb{1} - A$ を導入して全ハミルトニアンを定義する．$(p \otimes \mathbb{1} - A)^2$ の本質的自己共役性について次のことが知られている．

Proposition 2.4 *Assumptions 2.2* と *2.3* を満たすとする．このとき， $D(p^2 \otimes \mathbb{1}) \cap C^\infty(\mathbb{1} \otimes N)$ 上で $(p \otimes \mathbb{1} - A)^2$ は本質的に自己共役である．ここで，$C^\infty(\mathbb{1} \otimes N) = \cap_{n=1}^\infty D(\mathbb{1} \otimes N^n)$ である．

$(p \otimes \mathbb{1} - A)^2$ の自己共役拡大も同じ記号で表す．スペクトル分解定理によって自己共役作用素 $\sqrt{(p \otimes \mathbb{1} - A)^2 + M^2}$ を定義する．準相対論的な Pauli-Fierz 模型は $\mathscr{H}$ 上で

$$H = \sqrt{(p \otimes \mathbb{1} - A)^2 + M^2} + V \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathrm{H_f},$$

$$D(H) = D(\sqrt{(p \otimes \mathbb{1} - A)^2 + M^2}) \cap D(V \otimes \mathbb{1}) \cap D(\mathbb{1} \otimes \mathrm{H_f}).$$

によって定義される．

$$\mathscr{H}_{\rm fin} = L.H.\{f \otimes \Omega,\, f \otimes a^\dagger(h_1)\cdots a^\dagger(h_n)\Omega | h_j \in C_{\rm c}^\infty(\mathbb{R}^d), j = 1, \cdots, n, n \geq 1\}.$$

とおく．

Theorem 2.5 *Assumptions 2.1-2.3* を満たすとする．このとき，H は下に有界な作用素で，$D(|p|) \cap D(V) \cap D(\mathrm{H_f})$ 上で自己共役，$\mathscr{H}_{\rm fin}$ 上で本質的に自己共役である．

3　主定理

H のスペクトルを $\sigma(H)$ で表す．H は下に有界な自己共役作用素だから $\sigma(H)$ は下に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合である．H の最低エネルギーを E とおく．すなわち，$E = \inf \sigma(H)$．

Theorem 3.1 *Assumptions 2.1-2.3* を満たすとする．$\sigma_{\rm ess}(H)$ を H の本質的スペクトルとする．このとき，すべての $M \geq 0$ に対して $\sigma_{\rm ess}(H) = [E + m, \infty)$ が成立する．

Theorem 3.1 より，H はすべての $M \geq 0$ に対して基底状態をもつことが分かる．

Corollary 3.2 *Assumptions 2.1-2.3* を満たすとする．このとき，すべての $M \geq 0$ に対して H の基底状態は一意的である．すなわち，

$$\dim \ker(H - E) = 1.$$

参考文献

[BFS99] V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation fields, *Commun. Math. Phys.* **207** (1999), 249–290.

[GLL01] M. Griesemer, E. H. Lieb and M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, *Invent. Math.* **145** (2001), 557–595.

[Hir99] F. Hiroshima, Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics II, *J. Math. Phys.* **41** (2000), 661-674.

[KMS11] M. Könenberg, O. Matte and E. Stockmeyer, Existence of ground states of hydrogen-like atoms in relativistic QED I: the semi-relativistic Pauli-Fierz operator *Rev. Math. Phys* **23** (2011), 375–407.

[KM12] M. Könenberg and O. Matte, Ground states of semi-relativistic Pauli-Fierz and no-pair Hamiltonians in QED at critical Coulomb coupling, arXiv:1106.1393.

電磁場中の粒子に対する散乱理論

川本 昌紀 (神戸大学理学研究科) [(1)]

平面 $\mathbf{R}^2$ に平行な時間に依存してもよい電場 $\mathbf{E}(t)$ と，その平面に直交する方向に定磁場 $\mathbf{B}$ が存在する場合に，電場と平行な平面 $\mathbf{R}^2$ 内を運動する荷電粒子に対する，散乱問題を考える．$\mathbf{B} = (0, 0, B) \in \mathbf{R}^3$, $B > 0$, $\mathbf{E}(t) = (E_1(t), E_2(t), 0) \in \mathbf{R}^3$ と書けば，$L^2(\mathbf{R}^2)$ 上の自由ハミルトニアンは,

$$H_0(t) = H_{0,L} \quad qE(t) \quad x, \quad H_{0,L} = (p \quad qA(x))^2/(2m) \tag{0.1}$$

で定義される．ここで，$m > 0$, $q \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, $x = (x_1, x_2)$, $p = (p_1, p_2) = (\ \ i\partial_{x_1}, \ \ i\partial_{x_2})$ はそれぞれ，荷電粒子の質量，電荷，位置，運動量であり，$E(t) = (E_1(t), E_2(t))$ である．また,

$$A(x) = (\ \ Bx_2/2, Bx_1/2)$$

は対称ゲージによるベクトルポテンシャルである．
時間に依存したハミルトニアン $A(t)$ に対して，初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t U_A(t,s) = A(t)U_A(t,s), \quad i\partial_s U_A(t,s) = \quad U_A(t,s)A(s) \\ U_A(s,s) = \mathrm{id} \end{cases}$$

を満たす $U_A(t,s)$ を $A(t)$ によって生成される propagator と呼ぶことにする．このとき，$H_0(t)$ によって生成される propagator $U_0(t,s)$ について，以下の Avron-Herbst 型の公式が導かれる．

定理 0.1 (Adachi-Kawamoto [AK])**.**

$$U_0(t,0) = e^{\ ia(t)} e^{ib(t)\cdot x} T(c(t)) e^{\ itH_{0,L}}, \quad T(c(t)) = e^{\ ic(t)\cdot qA(x)} e^{\ ic(t)\cdot p} \tag{0.2}$$

ここで，$b(t)$, $c(t)$, $a(t)$ はそれぞれ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} &= \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(\omega(t \quad s)) & \sin(\omega(t \quad s)) \\ \sin(\omega(t \quad s)) & \cos(\omega(t \quad s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} qE_1(s) \\ qE_2(s) \end{pmatrix} ds \\ c(t) = \frac{1}{m}\int_0^t b(s)ds, \quad a(t) &= \int_0^t \left\{ \frac{b(s)^2}{2m} + \frac{b(s) \quad qA(c(s))}{m} \right\} ds. \end{aligned} \tag{0.3}$$

を満たす.

注 0.2. この公式は，磁場が存在せず，電場のみが働く場合での Avron-Herbst の公式の拡張になっている．(see. e.g. [CFKS])

[(1)]Email: mkawa@math.kobe-u.ac.jp

電場の仮定として,

$$E(t) = (E_1(t), E_2(t)) = E_0(\cos(\nu t + \theta), \sin(\nu t + \theta)), \quad E_0 > 0,\ \nu \in \mathbf{R},\ \theta \in [0, 2\ )$$

とおく．このとき,

$$(t) = (E_2(t)/B, \quad E_1(t)/B)$$

とおけば，直接計算を行うことで,

$$\begin{cases} c(t) \quad E_0(\ (\cos(\ \ \omega t)),\ (\sin(\ \ \omega t)))/(\omega B) = t\ \ , & \nu = 0 \\ c(t) + E_0(\ (\cos(\ \ \omega t)),\ (\sin(\ \ \omega t)))/(\omega B) = \ \ t\ \ (t), & \nu = \ \ \omega \\ c(t) = \mathcal{O}(1), & \nu \in \mathbf{R}\backslash\{0, \ \ \omega\} \end{cases}$$

が分かる．ここで，$(\sin(t)) = \sin(t + \theta) \quad \sin\theta$，$(\cos(t)) = \cos(t + \theta) \quad \cos\theta$ とした．このことから，$\nu \in \{0, \ \omega\}$ の場合には，散乱状態が存在しうる事が予想される．
この系に対する波動作用素とその完全性を考えるために，摂動を加えたハミルトニアン $H(t) = H_0(t) + V$ について考える．ポテンシャル V の仮定 (V1), (V2) は以下のようなものとする：

(V1)：V は実数値関数，$V^{\mathrm{sing}}, V^{\mathrm{s}}, V^{\mathrm{l}}$ の和であり，$V^{\mathrm{sing}}, V^{\mathrm{s}}, V^{\mathrm{l}}$ はそれぞれ，以下の条件を満たす：
V^{sing} はサポートがコンパクトな関数で，$L^p(\boldsymbol{R}^2), 2 \le p < \infty$ を満たし，さらに，$|\nabla V^{\mathrm{sing}}| \in L^{2p/(p+1)}(\boldsymbol{R}^2)$ である．V^{s} は，$V^{\mathrm{s}} \in C^1(\boldsymbol{R}^2)$ で,

$$|V^{\mathrm{s}}(x)| \le C_0\langle x\rangle^{\ \rho_{\mathrm{s},0}}, \quad |(\nabla V^{\mathrm{s}})(x)| \le C_1\langle x\rangle^{\ \rho_{\mathrm{s},1}} \tag{0.4}$$

を満たす．ここで，$\rho_{\mathrm{s},0} > 1$, $\rho_{\mathrm{s},1} > 0$ であり，C_0 と C_1 は正の定数である．V^{l} は，$V^{\mathrm{l}} \in C^1(\boldsymbol{R}^2)$ で,

$$|V^{\mathrm{l}}(x)| \le \widetilde{C}_0\langle x\rangle^{\ \rho_{\mathrm{l}}}, \quad |(\nabla V^{\mathrm{l}})(x)| \le \widetilde{C}_1\langle x\rangle^{\ 1\ \ \rho_{\mathrm{l}}} \tag{0.5}$$

を満たす．ここで，$0 < \rho_{\mathrm{l}} \le 1$ であり，$\widetilde{C}_0$ と $\widetilde{C}_1$ は正の定数である．

(V2)：$V = V^{\mathrm{s}}$ であり，V^{s} は (0.4) 式に加え，$V^{\mathrm{s}} \in C^2(\mathbf{R}^2)$ で，$|\partial^\alpha V^{\mathrm{s}}(x)| \le C_2, |\ \ | = 2$ を満たす．ここで，C_2 は正の定数である．

注 0.3. この (V1), (V2) 仮定の下で，$H(t)$ によって生成される propagator $U(t, s)$ の存在を示す事が出来る．また，$U(t, s)$ の存在だけを言うなら，$V^{\mathrm{s}}, V^{\mathrm{l}}$ は，$L^\infty(\mathbf{R}^2)$ で十分である．

定理 0.4 ([AK])**.** V は，(V1) を満たし，さらに，$E(t) = E_0(\cos(\nu t + \theta), \sin(\nu t + \theta))$, $\nu \in \{0, \ \omega\}, \theta \in [0, 2\ )$ を満たすとする．この時，$V^{\mathrm{l}} = 0$ なら，波動作用素

$$W^{\pm} = \mathrm{s} \quad \lim_{t \to \pm\infty} U(t, 0)\ U_0(t, 0) \tag{0.6}$$

が存在する．さらに，$V^{\mathrm{l}} \neq 0$ なら，修正波動作用素

$$W_G^{\pm} = \mathrm{s} \lim_{t \to \pm\infty} U(t,0)\ U_0(t,0) e^{\ i \int_0^t V^l(c(s))ds} \tag{0.7}$$

が存在する．

定理 0.5 ([AK])**.** V は (V2) を満たすとし，さらに，$E(t)$　$E_0(\cos\theta, \sin\theta)$ とする．この時，$W^{\pm}$ は漸近的に完全である．すなわち，

$$\mathrm{Ran} W^{\pm} = L_c^2(H)$$

が成り立つ．ここで，$L_c^2(H)$ は H の連続スペクトル部分空間である．

注 0.6. $E(t) = E_0(\cos(\ \ \omega t + \theta), \sin(\ \ \omega t + \theta))$ の場合は，ポテンシャル V は，(V2) に加え，さらに球対称性の仮定 $V(x) = V(|x|)$ を加えることで，完全性が示される．

参考文献

[AK] T.Adachi and M.Kawamoto, Avron-Herbst type formula in crossed constant magnetic and time-dependent electric elds. Let, Math, Phys, **102** (2012),65-90.

[CFKS] H.L.Cycon, R.G.Froese, W.Kirsch and B.Simon, Schrodinger Operators with Application to Quantum Mech anics and Global Geometry, Texts and Monographs in Physics, Springer Study Edition, Springer-Verlag,Berlin,1987.

4次元Navier-Stokes方程式の解の爆発と正則性

高橋 剛（早稲田大学基幹理工学研究科）*

概 要

はじめに実解析学を用いたNavier-Stokes方程式研究について入門的な導入を行い, その後に主結果を述べる. 4次元Navier-Stokes方程式の初期値問題を扱い, 弱解研究の ϵ-regularity の手法を援用することで解の blow-up time における正則性条件を導く。

1 はじめに ～ミレニアム問題としてのNavier-Stokes方程式～

Navier-Stokes方程式とは水や空気といった流体の運動を支配する運動方程式であり, 以下の非線形偏微分方程式系として記述される（このSectionでは次元は $n = 3$ とする）.

$$\begin{aligned} u_t - \quad u + (u, \nabla)u + \nabla p = 0 \quad & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \mathrm{div} u = 0 \quad & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \qquad & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{1}$$

ここで, $u(x,t)$ は流速, $p(x,t)$ は圧力, $u_0(x)$ は初期速度である. この方程式は19世紀にNavierとStokesによって独立に提唱され, いまや飛行機や自動車が受ける空気抵抗, 天気予報, 体内の血液の流れなどさまざまな現象の記述に用いられており, その重要性からクレイ研究所によるミレニアム問題のひとつとして多くの数学者がその解明に取り組んでいる.

クレイ研究所によって提唱された問題は, **「任意の初期速度 $u_0(x)$ に対し上記の初期値問題が時間大域的な一意正則解 u, p を持つだろうか」**というものである. 次ページで詳しく述べるが, この初期速度を任意にとれるということが本質的である. さらに, 偏微分方程式論の言葉を用いれば初期値問題の**適切性 (well-posedness)**, つまり、解の存在, 解の一意性と正則性, 初期値に対する解の連続依存性についての研究も重要な研究対象である. Navier-Stokes方程式研究については70年ほど前にフランスの数学者 J. Leray によって先鞭がつけられ、その後藤田宏, 加藤敏夫ら日本人研究者を中心として研究が進められてきたが, 問題の完全解決への道のりはまだ長く, 既知の解析法の直接的な組み合わせ・延長では難しいだろうといわれている.

以下に, クレイ研究所のサイト (http://www.claymath.org/prizeproblems/navierstokes.htm) からFe ermanによるコメント [4] を引用する. ミレニアム問題の詳細については, このサイトを参照していただきたい. 問題設定が簡潔にまとめられている.

> Fluids are important and hard to understand. There are many fascinating problems and conjectures about the behavior of solutions of the Euler and Navier-Stokes equations. Since we don't even know whether these solutions exist, our understanding is at a very primitive level. Standard methods from PDE appear inadequate to settle the problem. Instead, we probably need some deep, new ideas. CHARLES L. FEFFERMAN[4]

*〒 169-8555 新宿区大久保 3-4-1 早稲田大学基幹理工学研究科数学応用数理専攻 e-mail: go-taka@asagi.waseda.jp

2　実解析的手法による Navier-Stokes 方程式研究

以下, 次元は n　2 とする. 近年の Navier-Stokes 方程式研究の手法としては, 計算機数学・数値シュミレーションを活用した研究が盛んであるが, 本稿ではあくまでも理論的に, 実解析学の手法を用いた研究を紹介する. 大きく分けて, 実解析学的 Navier-Stokes 方程式研究には, **弱解の一意正則性理論, 強解の延長理論とふたつのアプローチがある.**

2.1　弱解の正則性と一意性

Navier-Stokes 方程式のみならず一般に偏微分方程式論においては, 滑らかな解を探す前に「弱解」という超関数の意味で方程式を満たす解を考察するという手法が広く用いられる. Navier-Stokes 方程式の弱解は, 以下のように定義される.

Definition 2.1 (Weak Solution) 初期値 $u_0(x)$ は $L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid divf = 0\}$ に属するとする. u が Navier-Stokes 方程式の初期値問題 (1) の弱解であるとは, u が超関数の意味で方程式を満たし, $u \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))$ を満たすことをいう.

弱解についての研究に先鞭をつけたのは Leray[8] であり, $n = 3$ における時間大域的な弱解の存在を証明した. ここでは初期値の大小に制限が加えられていないが, 得られた解が滑らかかどうか, さらには一意かどうかはいまだ未解決である. そのため Leray 以降この**弱解の一意性と正則性を証明することが弱解研究の主要テーマ**となり, Serrin による一意正則性条件など様々な研究がされてきたが, ここではページ数の都合上**正則点 (regular point)** の議論のみを紹介する.

$(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$ が弱解 u の正則点であるとは, (x,t) の近傍で u が有界になることをいう. 局所的な有界性がわかると解の正則性の議論に繋がるため, 正則点となるための条件や, 正則点とならない点全体の集合 (特異点集合) の Hausdor　測度を評価する研究がなされてきた. 代表的ものは Ca　arelli-Kohn-Nirenberg[1] であり, 彼らは **suitable weak solution** という局所的エネルギー不等式を満たす弱解を考察し, (x,t) が正則点となるための十分条件を示し, それを用いることで特異点集合の 1 次元 Hausdor　測度がゼロになることを示した. 最後に, 後述する筆者の主結果と関連のある結果 [12] を一つあげておく.

Theorem 2.1 (Seregin-Sverak[12]) $n = 3$, u を (1) に対する *suitable weak solution* とする. この時, ある正の数 ϵ が存在して, 以下が成立する. $z_0 = (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times (0,T)$ について

$$\limsup_{r \to 0} \sup_{t_0 - r^2 \ t \ t_0} \frac{1}{r} \int_{B(x_0,r)} |u(x,t)|^2 dx < \epsilon$$

を満たすならば, z_0 は 正則点である.

2.2　時間局所的な強解の延長可能性

弱解は任意の初期値に対して時間大域的に得られているが, その一意正則性を示すのは容易ではない. そこで**最初から一意正則性な解を考察し, どんな初期値を取ってくれば解が時間大域的に構成できるかを議論するのが強解理論である**. 現在の強解研究の基礎となるのが, 加藤 [6] によって示された以下の結果である.

Theorem 2.2 (Kato[6]) $u_0 \in L^n_\sigma(\mathbb{R}^n)$ とする. この時 $T > 0$ があり, $u \in C([0,T);L^n(\mathbb{R}^n))$ を満たす (1) の解 u が一意に存在する, さらに $\|u\|_{L^n}$ が十分小ならば $T = \infty$ ととれる.

ここで得られた解は滑らかな古典解となる（Giga[5]）ため, 解の一意正則性が成立するが, 解を時間大域的に構成するためには初期値についての条件がある. そのため, これ以降は時間 T を超えて解が延長できるための十分条件についての研究が進められている.

Navier-Stokes 方程式のミレニアム問題としての定式化, さらには弱解・強解といった実解析学的なアプローチの詳細については [7],[9] などを参照してもらいたい. これまでの研究の流れと今後の課題や問題点が簡潔にまとめられている.

3 主定理

本稿では, 次の 4 次元 Navier-Stokes 方程式の初期値問題を考察する.

$$\begin{aligned} u_t - \quad u + (u, \nabla)u + \nabla p = 0 \quad & \mathbb{R}^4 \times (0, T) \\ \mathrm{div} u = 0 \quad & \mathbb{R}^4 \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) \qquad & \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

ここで, 初期値 u_0 は $C^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^4)$ の $L^2(\mathbb{R}^4) \cap L^4(\mathbb{R}^4)$ における閉包に属するとする.

Theorem 3.1 (Main Theorem) u を上記の初期値問題に対する古典解とする. この時, ある正の数 ϵ が存在して, 以下が成立する. $z_0 = (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^4 \times T$ について

$$\limsup_{r \to 0} \sup_{T - r^2 \ t < T} \frac{1}{r^2} \int_{B(x_0, r)} |u(x, t)|^2 dx < \epsilon$$

を満たすならば, z_0 は正則点である.

Remark 3.1 ここでは 4 次元の古典解について議論したが, 3 次元の古典解についても同様な結果を得ることが出来る. この Main Theorem は, 前節で述べた suitable weak solution に対する正則点の議論を古典解の blow-up argument に援用したものである. 4 次元の Navier-Stokes 方程式の弱解に関する研究はあまり多くなく, Dong-Du[2] は上記定理と同じ条件設定のもとで blow-up time T での正則性条件を証明し, 時刻 T での特異点集合の 2 次元 Hausdor 測度がゼロであることを示している. また, 最近 Dong-Gu[3] は 4 次元での suitable weak solution について考察し, 正則性条件及び特異点集合の 2 次元 Hausdor 測度がゼロとなることを示しており, これは Ca arelli-Kohn-Nirenberg の 4 次元版の結果といえる.

Remark 3.2 Theorem3.1 で得られた結果は、若干条件を変えることで強解の延長定理に応用することが出来る。これは、定理で与えられた条件が、解のある種の Morrey norm と密接に関わっていることから導かれる。時間があれば、強解の正確な定義とともに、講演で紹介したい。

参考文献

[1] L. Ca arelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-stokes equations.* Comm. Pure Appl. Math. **35**(1982), 771-831

[2] H. Dong, D. Du, *Partial regularity of solutions to the four-dimensional Navier-Stokes equations at the first blow-up time*, Comm. Math. Phys. **273** (2007), no. 3, 785-801

[3] H. Dong, X. Gu, *Partial regularity of solutions to the four-dimensional Navier-Stokes Equations.* arXiv: 1302. 1433vl [math. AP] 6 Feb 2013

[4] C. Fe erman, *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equations.* Millennium Prize Problems, Clay Mathematical Institute, 2000

[5] Y. Giga, *Solutions for semilinear parabolic equations in Lp and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system.* J. Di erential Equations, **61** (1986), 186-212 .

[6] T, Kato, *Strong L_p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^n$ with applications to weak solutions.* Math. Z., **187** (1984), 471-480

[7] 小薗英雄, ナヴィエーストークス方程式　クレイ懸賞問題のいま　数学セミナー 2010 年 2 月号特集より

[8] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visquex emplissant l'espace*, Acta Math., **63** (1934), 193-248.

[9] 宮川鉄朗, Navier-Stokes 方程式,「応用解析ハンドブック」シュプリンガー・ジャパン　(2010)

[10] V. Sche er, *Hausdorff measure and the Navier-Stokes equations.* Commun. Math. Phys. **55** (1977), 97-112

[11] V. Sche er, *The Navier-Stokes equations in space dimension four.* Commun. Math. Phys. **61** (1978), 41- 68

[12] G. Seregin and V. Sverak, *Navier-Stokes equations with lower bounds on the pressure*, Arch. Ration. Mech. Anal., **163** (2002), 65-86.

外力項付き曲線短縮方程式に対するCapillary自由境界値問題

可香谷隆 (北海道大学大学院理学院数学専攻)

1 背景

物質の異なる 2 相が交わらずに共存している現象は, 今日科学, 工学など様々な分野で取り上げられている. 2 相が交わらずに共存している故, 2 相を隔てる曲面が存在し, その曲面を相境界又は界面と呼ぶ. 界面と極小曲面は深い関わりを持つ. 例えば, シャボン玉がなぜ球状になるのかという問題を考える. この場合シャボン玉の表面が界面であり, 物理的には「界面の囲む図形の体積を一定にしたとき, その表面積を最小にする図形はどのようになるか.」という等周問題の解, つまり極小曲面がシャボン玉の形状であると考えられる. 極小曲面において, 3 つの界面が交わる点においては, それぞれの界面が成す角度が一定である. 例えば, 図 1 は 4 つの点 A,B,C,D を結ぶ最小の長さを持つ曲線が描かれている. 曲線を界面として見ると, 点 E,F において, 3 つの界面が交わっており, それぞれの界面が成す角が全て 120 度になっている. このように界面, 極小曲面, 角度の保存は深い関わりを持つ. また, 界面が時間とともにどのように動くかという問題に, 様々な分野の研究者の関心が向けられるようになった. ここで, 動く界面を $\Gamma(t)$ と置き, 向き付け可能で界面上の各点で法線ベクトルが定義できるとする. このとき, 界面上の各点における速度ベクトル V は界面上の各点の曲がり具合, 平均曲率 H を使い, 界面の動く様子を $V = H$ で書き表すことができる.

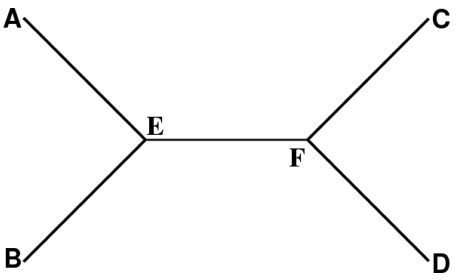


図 1: 4 点を結ぶ極小曲線

本講演では 2 次元上の界面を考え, 錐上に媒質が存在する物理現象が例として挙げられる. また, 界面がグラフ表示でき, $\{u(x,t); x \in I(t) \subset \mathbf{R}\} = \Gamma(t)$ とする. このとき界面の速度ベクトルと曲率は u を使い, $V = \dfrac{u_t}{\sqrt{1+u_x^2}}$, $H = \dfrac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{\frac{3}{2}}}$ と書き表せる. さらに, 表面張力により界面の境界における錐との成す角が時間によらず一定に保存される (図 2 参考, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ については後に説明する). 一般に錐と界面が接している点は時間によらず固定されているとは限らない. そこで, 我々は自由境界値問題, つまり錐と界面が接している点が時間によって変化している問題を考えなければならない. この問題は例えば Chang, Guo, Kohsaka[8] により研究され, 局所存在性や漸近挙動について考察されている. この問題をさらに発展させ, 外力項 F が存在し, $V = H + F$ となる方程式を考える. 特に, 2 つの相が気体で, F が定数の場合等圧変化のモデルであり, $F = \dfrac{\text{constant}}{\int u(x,t)dx}$ の場合は等温変化のモデルとなる.

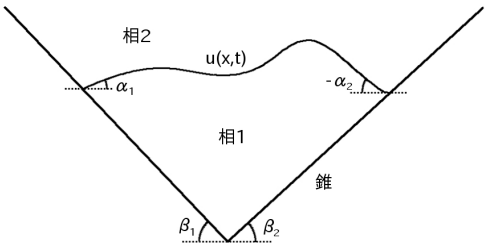


図 2: 錐上に存在する 2 相

2　方程式

方程式は以下のようになる.

$$\begin{cases} u_t = (a(u_x))_x + f(x,u,u_x), & -\xi_1(t) < x < \xi_2(t), t > 0, \\ u_x(-\xi_1(t),t) = \tan\alpha_1, & t > 0, \\ u(-\xi_1(t),t) = \xi_1(t)\tan\beta_1, & t > 0, \\ u_x(\xi_2(t),t) = \tan\alpha_2, & t > 0, \\ u(\xi_2(t),t) = \xi_2(t)\tan\beta_2, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & -\xi_{01} \le x \le \xi_{02} \\ \xi_1(0) = \xi_{01}, \quad \xi_2(0) = \xi_{02}. \end{cases} \tag{1}$$

ただし,

$$\begin{cases} a \in C^{2,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}), \quad a(0) = 0, \quad a'(x) > 0 \ \text{ for } x \in \mathbb{R}, \\ \beta_i \in [0, \frac{\pi}{2})(i = 1,2), \quad \alpha_1 \in (-\beta_1, \frac{\pi}{2}), \quad \alpha_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \beta_2), \\ u_0 \in C^{1+\alpha}[-\xi_{01}, \xi_{02}], \ \ \xi_{01}, \xi_{02} > 0, \\ f \in C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{2}$$

$a = \arctan$ とすると, 先に述べた曲率流となる. さらに, $f = \text{constant}\sqrt{1+u_x^2}$ とすれば等圧変化, $f = \dfrac{\text{constant}}{\int u(x,t)dx}\sqrt{1+u_x^2}$ とすれば等温変化のモデルとなっている. $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ は図示すると図 2 のように表せ, 時間によらず一定と仮定している. 未知関数は $u(x,t), \xi_1(t), \xi_2(t)$ であり, $u(x,t)$ は界面, $\xi_1(t), \xi_2(t)$ は共に自由境界の端点を表している.

3　主結果

Theorem 3.1. *$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha, \xi_{01}, \xi_{02}, v_0, a, f$ に依存した $T > 0$ が存在し, 方程式 (1), (2) は時刻 T まで解 $u(x,t), \xi_1(t), \xi_2(t)$ を持つ. さらに, $Q_1 = \{(x,t); -\xi_1(t) \le x \le \xi_2(t), t \in [0,T]\}$, $Q_2 = \{(x,t); -\xi_1(t) \le x \le \xi_2(t), t \in (0,T]\}$ とすると,*

$$u \in C^{1,0}(Q_1) \cap C^{2,1}(Q_2),$$
$$\xi_i \in C[0,T] \cap C^1(0,T].$$

証明の方針. $f = 0$ の場合は先に述べた Chang, Guo, Kohsaka[8] により証明されており, この証明を参考に解析半群を用いて証明した (解析半群については Lrunardi[3], Pazy[4], Yagi[5] を参照).

step1

方程式 (1) の Dirichlet 条件の式を両辺時間微分をし, ξ_i の微分方程式に変換する. また, 自由境界を処理するために, $v(y,t) = u(-(1-y)\xi_1(t) + y\xi_2(t), t)$ と置き直すことにより, $x \in [-\xi_1(t), \xi_2(t)] \Leftrightarrow y \in [0,1]$ の関係から領域の端点を固定することができ, v, ξ_1, ξ_2 の方程式が導出できる.

step2

定数 $K, T > 0$ を用いて求めたい解 (v, ξ_1, ξ_2) の組が入る関数空間上の部分集合 $\mathcal{D}$ を, ノルムが K 以下, 最大存在時間 T となるよう定義する. $(w, \zeta_1, \zeta_2) \in \mathcal{D}$ を用いて v の方程式を初期値で線形化し, 新たな方程式をたてる (線形化については Lunardi[3], Section8 参照).

step3

step2 で導出した方程式が任意の (w, ζ_1, ζ_2) に対して解 (v, ξ_1, ξ_2) が存在し, 十分大きな K と十分小さな T に対して $(v, \xi_1, \xi_2) \in \mathcal{D}$ になることを示す. ここで, $\Phi(w, \zeta_1, \zeta_2) = (v, \xi_1, \imath_2)$ とすれば Φ が中への写像となっている.

step4

さらに十分小さな T に対しては, Φ が縮小写像となることがわかるので, $\Phi(v, \xi_1, \xi_2) = (v, \xi_1, \xi_2)$ となる定点 (v, ξ_1, ξ_2) が存在し, この定点が step1 で導出した方程式の解となっている.

step5

step1 の逆をたどれば方程式 (1), (2) の解を構成できる. □

Remmark 3.2. 今日, 非線形の方程式を解析半群を用いて解くために様々な手法が確立されてきた. 本講演で扱う方程式は準線形であり, 準線形を解析半群を用いて解く際にポイントとなるのは, *step2* で用いた求めたい解 (v, ξ_1, ξ_2) の組が入る関数空間である. 特殊な関数空間を用いることにより, 準線形の項をうまく処理することができる (Lunardi[3], Section8 参照). 線形の方程式, 半線形の方程式で解析半群を用いる手法については, 例えば Lunardi[3](Section5), Fila[6](section2.3 pp36–45) 等で述べている.

4 今後の課題

既存の結果である Chang, Guo, Kohsaka[8] では外力項がない場合, さらに漸近挙動について考察されている. 例えば, 図 1 の相 1 の体積変化は α_1, α_2 によって変わる. 二つの値が等しい場合には体積一定となり, α_1 の方が大きい場合は増大, α_2 の方が小さい場合は減少していく. 外力項がついた場合でも同様の考察することが今後の課題の一つとなる.

また, 漸近凸性も今後の課題の一つである. この問題の考察は Chang, Guo, Kohsaka[8] や Chen, Guo[7] ではされていないが, 図 1 において界面が下に凹んでいる場合, 曲率の効果で凹んでいる場所でグラフが上に持ち上がる. 結果として, 時間発展により界面は凸性をもつグラフに漸近することが期待される.

さらには, 本講演では錐上の 2 相を仮定したが, 錐の形状を一般化し例えば半球の上の 2 相や, さらに一般化した多様体上の 2 相を考察するのもおもしろい問題となる.

以上のようにまだ分からない問題が多数存在する. 自由境界値を含む曲率の問題は近年注目を浴びており, 多くの研究者が取り組んでいる. 執筆者もこの問題における今後の発展に寄与したいと考えている.

参考文献

[1] A. Giga, 界面ダイナミクス – 曲率の効果, Technical Report Series of Department of Mathematics, Hokkaido University. **56** (1998).

[2] A. Giga, Y. Chen, 動く曲面を追いかけて, 日本評論社. (1996).

[3] A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser. (1995).

[4] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, Applied Mathematical Sciences. **44** (1992).

[5] A. Yagi, 放物型発展方程式とその応用 (上), 岩波書店, (2011).

[6] M. Fila, 非線形熱方程式の爆発問題入門 – Marek Fila 氏講義録 –, Lecture Note in Mathematical Sciences The University of Tokyo. **10** (2011).

[7] X. Chen, J. Guo, *Motion by curvature of planar curves with end points moving freely on a line*, Mathematische Annalen. **350** (2011), no.2, pp 277–311.

[8] Y. Chang, J. Guo, Y. Kohsaka, *On a two-point free boundary problem for a quasilinear parabolic equation*, Asymptotic Analysis. **34** (2003), pp 333–358.

時空間に非一様な消散項を持つ非線形波動方程式の大域解の存在と時間減衰評価

広島大学理学研究科　渡辺 朋成

1　序

$d \geq 2$ とする. さらに $\mathcal{O}$ を原点を含む境界が滑らかな星型有界領域として $\Omega = \mathbb{R}^d/\mathcal{O}$ と定める. 次の非線形消散型波動方程式の外部問題を考える.

$$\text{(DW)} \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \triangle u + B(t,x)\partial_t u = F(\partial u, \partial\nabla u) & (t,x) \in [0,\infty)\times\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x) & x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0 & (t,x) \in [0,\infty)\times\partial\Omega, \end{cases}$$

ここで $u = (u^1, u^2, \cdots, u^d)$, $\nabla = (\partial_{x_1}, \cdots, \partial_{x_d}), \partial = (\partial_t, \nabla)$ とする.

この方程式は, 消散型波動方程式と呼ばれ, 波動現象を表す波動方程式に, 消散(摩擦) の効果を考えたものである. $B(t,x)\partial_t u$ の部分が消散の効果を表す項であり, 消散項と呼ぶ. 今回, 摩擦の効き具合を表現する係数 $B(t,x) = (B_{pq}(t,x))_{p,q=1,\cdots,d}$ が, 時空間によって次のような条件の下で変化する場合を考える.

(B0) B_{pq} はそれぞれ $\mathcal{B}^\infty([0,\infty)\times\Omega)$ に属す. ここで $\mathcal{B}^\infty$ は滑らかで微分まで含めて有界な関数全体である.

(B1) $B(t,x)$ は $[0,\infty)\times\Omega$ 上で非負 (固有値がすべて非負) である.

(B2) $\partial_t B(t,x)$ は $[0,\infty)\times\Omega$ 上で非正 (固有値がすべて非正) である.

(B3) 次を満たす $b_0 > 0$ と $R > 0$ が存在する.

$$\sum_{p,q=1}^{d} B_{pq}(t,x)\eta_p\eta_q \geq b_0|\eta|^2 \quad (t \in [0,\infty), |x| \geq R, \eta \in \mathbb{R}^d).$$

(B3) の条件は, 簡単に言うと『無限遠方では消散効果が効いている』という意味である. 続けて, 非線形項 F については次の仮定をおく. 以下 $\partial_0 = \partial_t, \partial_j = \partial_{x_j}$.

$$F(\partial u, \partial\nabla u) = \left(\tilde{F}_i(\partial u) + \sum_{j=1}^{d} \sum_{0\leq a,b\leq d} c_{ij}^{ab}(\partial u)\partial_a\partial_b u_j \right)_{i=1,\cdots,d},$$

$$c_{ij}^{ab} = c_{ji}^{ba}, \tag{1}$$

ある $p_l \geq 2$ $(l = 1, 2)$ が存在して次を満たす:

$$|D_\xi^\alpha \tilde{F}_i(\xi)| \leq C_{\alpha,p_1}|\xi|^{\max\{0,p_1-|\alpha|\}} \quad (\xi \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d+1},\ \ |\alpha| \leq L-1), \tag{2}$$

$$|D_\xi^\alpha c_{ij}^{ab}(\xi)| \leq C_{\alpha,p_2}|\xi|^{\max\{0,p_2-1-|\alpha|\}} \quad (\xi \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d+1},\ \ |\alpha| \leq L-1). \tag{3}$$

上の条件は簡単に言うと, F は原点の付近で二次以上の多項式であり, さらに二階微分を含む項に対してはある対称性 (1) をもつということを意味する.

$B = 0$ の場合, つまり消散効果が存在しない場合, (DW) は非線形波動方程式となる. この場合一般に, 初期値をどんなに小さく, 滑らかにして時間大域解が存在せず, 解が有限時間で爆発してしまう例が存在することが知られている. 本研究では, 消散効果を考えることにより, そのような現象が起きなくなることを示した. それが次の定理である.

Theorem 1.1. $L \geq [d/2] + 3$ とする. 次を満たす十分小さな $\delta > 0$ が存在する. $L-1$ 次の整合条件を満たす初期値 $(u_0, u_1) \in H^L(\Omega) \times H^{L-1}(\Omega)$ が

$$\|u_0\|_{H^L(\Omega)} + \|u_1\|_{H^{L-1}(\Omega)} \leq \delta,$$

を満たすならば, (DW) は時間大域的な解を $\bigcap_{j=0}^{L-1} C^j([0,\infty); H^{L-j}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \bigcap C^L([0,\infty); L^2(\Omega))$ 上で一意に持つ.

定理 1 によって, (DW) は時間大域的に解を持つことがわかった. 消散型波動方程式についての研究は盛んに行われているが, この中でよく知られている事実として, 解は時間遠方で減衰する性質を持つということである. 今回我々が考える, 中心に消散効果が無い係数関数 B ついての研究には Nakao [3] や Ikehata [1] が存在するが, 特に線形・準線形の場合, Ikehata は [1] において初期値にある付加条件を加えることで, 減衰評価として $\|u(t)\|_{L^2}^2 = O((1+t)^{-1}), E(u(t)) = O((1+t)^{-2})$ を得ている. ここで $E(u(t))$ は u のエネルギーである. 従って (DW) の解も, 時間大域的には $u \equiv 0$ に近づいていくことが予想される. これに対応する結果が, 次の減衰評価である.

Theorem 1.2. Theorem 1.1 の仮定に加え, (u_0, u_1) と B に次の **(H1)** と **(H2)** を仮定する.

(H1) $\|d_0(\cdot)\{B(0)u_0 + u_1\}\|_{L^2(\Omega)} < \infty$.

(H2) $\displaystyle\int_0^\infty \|d_0(\cdot)\partial_t B(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds < \infty$,

ここで $d_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は次で定める.

$$d_0(x) = \begin{cases} |x| & (d \geq 3), \\ |x|\log(A|x|) & (d = 2). \end{cases} \tag{4}$$

A は $\inf_{x\in\Omega} A|x| \geq 2$ を満たす適当な定数である.

さらに $d = 2$ の場合は, 初期値の台がコンパクトであること, すなわち

(H3) $^\exists M$ *s.t.* $\mathrm{supp}u_0 \cup \mathrm{supp}u_1 \subset \{x \in \Omega : |x| \leq M\}$

を仮定する.

この時, (DW) の時間大域解 u に対して次の減衰評価が成立する.

$$\sum_{\mu=0}^{L-1} \|(\partial_t^\mu u(t), \partial_t^{\mu+1} u(t))\|^2_{H^{L-\mu}(\Omega)\times H^{L-\mu-1}(\Omega)} \le E_0(1+t)^{-1}, \tag{5}$$

$$\|(\nabla u(t), \partial_t u(t))\|^2_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \le E_0(1+t)^{-2}, \tag{6}$$

ここで E_0 は (u_0, u_1) $(d=2$ の場合はさらに初期値の台の半径 $M)$ による定数.

2 エネルギー評価

ここでは, エネルギー評価について説明する. 偏微分方程式では, 解 $u(t,x)$ の持つある量についての評価（アプリオリ評価）がわかれば, 時間大域解の存在を示せることがある. 今回も次で定めるエネルギーが, 時間が経っても増えないことを評価することで, 時間大域解を構成することにする.

$$E(v(t)) = \frac{1}{2}\{\|\partial_t v(t)\|^2_{L^2} + \|\nabla v(t)\|^2_{L^2}\}, \qquad Z(v(t)) = \sum_{m=0}^{L-1} Z_m(v(t)),$$

$$Z_m(v(t)) = \sum_{\mu=0}^{L-1-m} \|\nabla \partial_t^\mu v(t)\|^2_{H^m} + \|\partial_t^{\mu+1} v(t)\|^2_{H^m} \quad (0 \le m \le L-1).$$

さらに関数空間 $X_{\delta,T}$ を

$$X_\delta^T = \left\{ \begin{array}{c} v \in \bigcap_{j=0}^{L-1} C^j([0,T); H^{L-j} \cap H_0^1) \bigcap C^L([0,T); L^2) : \\ \|v(t)\|^2_{L^2} + Z(v(t)) \le \delta^2 \quad (0 \le t \le T) \end{array} \right\}$$

で定める. このエネルギーに対して, 次の補題が成立する.

Lemma 2.1. $u \in X_\delta^T$ を (DW) の局所解とする. 十分小さな $\delta > 0$ が存在して, 次が成立する.

$$\|u(t)\|^2_{L^2} + Z(u(t)) + \int_0^t Z(u(s))ds \le \|u(0)\|^2_{L^2} + Z(u(0)) \qquad (t \in [0,T]).$$

3 スケール変換と楕円型評価

補題 2.1 を証明するために, 次のスケール変換を導入する. u を (DW) の解として, 任意の $\lambda > 0$ について v を $v(t,x) = \dfrac{1}{\lambda} u(\lambda t, \lambda x)$ と定めると, v はつぎの初期境界値問題 $(\mathrm{DW})_\lambda$ の解である.

$$(\mathrm{DW})_\lambda \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t^2 - \triangle + B_\lambda(t,x)\partial_t)v = F_\lambda(\partial v, \partial\nabla v) & [0,\infty)\times\Omega_\lambda, \\ v(0,x) = v_0(x), \quad \partial_t v(0,x) = v_1(x) & x \in \Omega_\lambda, \\ v(t,x) = 0 & (t,x) \in [0,\infty)\times\partial\Omega_\lambda, \end{array} \right.$$

ここで $\Omega_\lambda = \{x : \lambda x \in \Omega\}$, $B_\lambda(t,x) = \lambda B(\lambda t, \lambda x), v_0(x) = \lambda^{-1}u_0(\lambda x), v_1(x) = u_1(\lambda x)$, $(F_\lambda)_i(\partial v, \partial\nabla v) = (\tilde{F}_\lambda)_i(\partial v) + \sum_{j=1}^{d}\sum_{0\le a,b\le d} c_{ij}^{ab}(\partial v)\partial_a\partial_b v_j$ かつ $\tilde{F}_\lambda(\partial v) = \lambda\tilde{F}(\partial v)$ である. この時 B_λ は次の性質を持つ.

$$\|\nabla^b B_\lambda\|_{L^\infty([0,\infty)\times\Omega_\lambda)} \le \lambda^{|b|+1}\|\nabla^b B\|_{L^\infty([0,\infty)\times\Omega)} \qquad \cdots(*).$$

$(*)$ はすなわち, λ を小さくとることにより, 消散係数の微分の大きさを無視できるということである.

高階エネルギーの消散効果を導出する際に境界の項が邪魔になるが, それは次の補題により解決される.

Lemma 3.1. 任意の $\lambda > 0$ に対して $\delta = \delta(\lambda)$ と C_λ として次を満たすものが存在する. $(\mathrm{DW})_\lambda$ の局所解 $v \in X_\delta^T$ は次の評価を満たす.

$$Z(v(t)) \le C_\lambda Z_0(v(t)) \quad (t \in [0,T)),$$

$$Z(v(t)) \le C_\lambda Z_{L-1}(v(t)) \quad (t \in [0,T)).$$

補題 3.1 の証明の方針は [2] を参考にした. 証明には次の楕円型評価を用いる.

Lemma 3.2 (Elliptic estimate)**.** $C_\lambda > 0$ が存在して $\varphi \in H^m(\Omega_\lambda)\cap H_0^1(\Omega_\lambda)(m \in \mathbb{Z}, m \ge 2)$ に対し次が成立する.

$$\sum_{|\alpha|=m}\|\nabla^\alpha\varphi\|_{L^2(\Omega_\lambda)} \le C_\lambda(\|\triangle\varphi\|_{H^{m-2}(\Omega_\lambda)} + \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_\lambda)}).$$

補題補題 3.1 を用いれば, 補題 2.1 を証明するためには時間についての高階エネルギーである Z_0 について考えれば良いことがわかる.

References

[1] R. Ikehata, Fast decay of solutions for linear wave equations with dissipation localized near infinity in an exterior domain, J. Differential Equations 188 (2003), 390-405.

[2] H.Kubo, Almost global existence for nonlinear wave equations in an exterior domain in two space dimensions, arXiv:1204.3725

[3] M. Nakao, Decay and Global Existence for Nonlinear Wave Equations with Localized Dissipations in General Exterior Domains, New Trends in the Theory of Hyperbolic Equations Operator Theory: Advances and Applications Volume 159, 2005, pp 213-299.

[4] T. Watanabe, Global existence and decay estimates for the nonlinear wave equations with space-time dependent dissipative term, preprint

A MEAN VALUE PROPERTY FOR POLYCALORIC FUNCTIONS

佐野　めぐみ (大阪市立大学・理・修士課程１年)

1. 研究の動機と導入

harmonic な関数（方程式 $\Delta u(x) = 0$ を満たす関数）は平均値の性質を持つことはよく知られている (ただし $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ とする). すなわち U は $\mathbf{R}^N$ の領域, $u \in C^2(U)$ を harmonic とすると, 任意の N 次元ボール $B_R(x) \subset U$ に対して, 以下の等式が成立する.

$$\frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u(y)dy = u(x) \tag{1}$$

この事実 (1) は一般化でき, polyharmonic な関数（方程式 $\Delta^m u(x) = 0\,(m \in \mathbf{N})$ を満たす関数）も平均値の性質を持つことがわかる（[2]）. すなわち $u \in C^{2m}(U)$ を polyharmonic とすると, 任意の N 次元ボール $B_R(x) \subset U$ に対して, 以下の等式が成立する.

$$\frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u(y)dy = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Delta^k u(x)}{4^k(\frac{N}{2}+1)_k k!} R^{2k} \tag{2}$$
$$\text{where } (a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1) \text{ for } k \in \mathbf{N}.$$

一方で, caloric な関数（方程式 $(\partial_t - \Delta_x)u(x,t) = 0$ を満たす関数）も平均値の性質を持つ. すなわち, $U_T = U \times (0,T]$ とし, u が U_T 上で caloric であるとき, $(x,t) \in U_T$ における半径 r の任意の熱球 $E(x,t;r) \subset U_T$ に対して, 以下の等式が成立する.

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^N} \iint_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds \tag{3}$$

([1]: p.p 53-54 定理 3). (1) は (2) に一般化できたように, 我々は (3) の一般化ができるのではないかと考え, (3) の空間一次元での一般化が今回得られた主定理である.

2. 主結果

定理 1. 空間一次元 $N=1$, $(\partial_t-\Delta)u(x,t)$ は U_T 上で解析的な関数とする. このとき以下の等式が成立する.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4r}\iint_{E(x,t;r)}u(y,s)\frac{(x-y)^2}{(t-s)^2}dyds\\&=u(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}}{k!}\sum_{l=0}^{k-1}(\partial_t-\partial_x^2)^{k-l}(\partial_t)^l u(x,t)\times C_{l,k}\\&where\, C_{l,k}=\frac{(-1)^k 4}{(4\pi)^k(2k+1)^{k-1+\frac{5}{2}}}\begin{pmatrix}k-1\\ l\end{pmatrix}(2k)^l.\end{aligned}$$

注意 1. 特に u を *caloric* だとすると, $(\partial_t-\Delta)u(x,t)(=0)$ は明らかに U_T 上で解析的な関数である. 定理 *1* を使うことにより, 既存の結果 *(3)* の等式を得ることができる. したがって定理 *1* は *(3)* の空間一次元での一般化である.

系 1 (A mean value property for polycaloric functions)**.** 空間一次元 $N=1$, $(\partial_t-\Delta)u(x,t)$ は U_T 上で解析的な関数とする. このとき u が U_T 上で *polycaloric (i.e.*$(\partial_s-\partial_y^2)^m u(y,s)=0$, $(y,s)\in U_T$, $m\in\mathbf{N}$) であるとき, 任意の熱球 $E(x,t;r)\subset U_T$ に対して, 以下の等式が成立する.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4r}\iint_{E(x,t;r)}u(y,s)\frac{(x-y)^2}{(t-s)^2}dyds\\&=u(x,t)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{r^{2k}}{k!}\sum_{l=0}^{k-1}(\partial_t-\partial_x^2)^{k-l}(\partial_t)^l u(x,t)\times C_{l,k}\\&+\sum_{k=m}^{\infty}\frac{r^{2k}}{k!}\sum_{l=k-m+1}^{k-1}(\partial_t-\partial_x^2)^{k-l}(\partial_t)^l u(x,t)\times C_{l,k},\\&\text{ただし } C_{l,k}=\frac{(-1)^k 4}{(4\pi)^k(2k+1)^{k-1+\frac{5}{2}}}\begin{pmatrix}k-1\\ l\end{pmatrix}(2k)^l.\end{aligned}$$

3. 定理 1 の証明の概略

定理 1 の証明は 3 つの補題から得られる. 簡単のため原点における熱球 $E(0,0;r)=E(r)$ で考える. 補題の前に少し準備をする.

$$\phi(r)=\frac{1}{r^N}\iint_{E(r)}u(x,t)\frac{|x|^2}{t^2}dxdt=\iint_{E(1)}u(ry,r^2s)\frac{|y|^2}{s^2}dyds. \tag{4}$$

$v(r) = u(x,t) = u(ry, r^2 s)$, $(y,s) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ とおく. 定理 1 は $\phi(r)$ のマクローリン展開により得られる. $\phi(r)$ を r で微分すると, 以下を得る.

$$\phi^{(n)}(0) = \iint_{E(1)} v^{(n)}(0) \frac{|y|^2}{s^2} dyds. \tag{5}$$

したがって, $v^{(n)}(0)$ を得られれば $\phi^{(n)}(0)$ を得られることがわかる. また以下では多重指数の標準的な記法を用いる; $y = (y_1, \cdots, y_N) \in \mathbf{R}^N$ と多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbf{N}_0^N$ に対して, $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdots y_N^{\alpha_N}$, また $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ と書く. 1つ目の補題は $v^{(n)}(0)$ の値について述べているが, この補題は空間次元が一般次元でも成立することに注意する.

補題 1 ($v^{(n)}(0)$). 任意の $k \in \mathbf{N}_0$ に対して, 以下を得る.

$$v^{(2k-1)}(0) = 0,$$

$$v^{(2k)}(0) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\beta|=k-j} (\partial_x^2)^\beta (\partial_t)^j u(0,0) \times A_{\beta,k}(y,s),$$

$$\text{ただし } A_{\beta,k}(y,s) = \frac{(2k)!}{(2\beta)! j!} y^{2\beta} s^j.$$

補題 1 より $v^{(2k)}(0)$ のみ考えればよいことがわかる. また以下の補題から空間一次元となっていることに注意する.

補題 2 (因数分解). 空間次元 $N = 1$ とする. このとき

$$v^{(2k)}(0) = \sum_{l=0}^{k} (\partial_t - \partial_x^2)^{k-l} (\partial_t)^l u(0,0) \times B_{l,k}(y,s),$$

$$\text{ただし } B_{l,k} = (-1)^{k+l} \sum_{m=0}^{l} \begin{pmatrix} k-l+m \\ m \end{pmatrix} \times A_{k-l+m,k} \, (0 \le l \le k).$$

補題 2 と (5) より, 以下を得る.

$$\phi^{(2k)}(0) = \sum_{l=0}^{k} (\partial_t - \partial_x^2)^{k-l} (\partial_t)^l u(0,0) \times \iint_{E(1)} B_{l,k}(y,s) \frac{y^2}{s^2} dyds. \tag{6}$$

注意すべきは, (6) の右辺において $l = k$ のときは, 熱作用素 $(\partial_t - \partial_x^2)$ が u に作用しないことである. しかし $l = k$ の項は次の補題より, 消えることがわかる.

補題 3.

$$\tilde{C}_{l,k} = \iint_{E(1)} B_{l,k}(y,s) \frac{y^2}{s^2} dyds.$$

とおくと,

$$\tilde{C}_{l,k} = \frac{(2k)!(-1)^k 4}{k!(4\pi)^k (2k+1)^{k-1+\frac{5}{2}}} \begin{pmatrix} k-1 \\ l \end{pmatrix} (2k)^l \quad (0 \leq l \leq k-1),$$

そして $\tilde{C}_{k,k} = 0$ を得る.

これより定理 1 が証明される.

References

[1] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations (Second Edition)*, Amer. Math. Soc., Graduate Studies in Mathematics (2010).

[2] G. Lysik, *On the mean value property for polyharmonic functions*, Acta Math. Hungar. , **133** (1-2) (2011), 133-139.

E-mail address: m13saM0311@ex.media.osaka-cu.ac.jp

Sobolevの臨界指数を持つKirchhoff型方程式の正値解の存在について

内免 大輔　(大阪市立大学)*

1. Introduction

我々は以下のKirchhoff型方程式のDirichlet境界値問題を考える．

$$\begin{cases} -\left(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = \lambda u^q + u^5 \text{ in } \Omega, \\ u > 0 \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

ここで，$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とし，$a > 0$, $b \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$，さらに，$1 \leq q < 5$ とする．(P) の最大の特徴は主要項がKirchhoff型の非局所的な係数，$(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)$ を持つ点にある．このような型の非線形楕円型方程式は先に記述した通り，通例Kirchhoff型方程式と呼ばれる．それはKirchhoff[6] を始めとする，物理学者によって提唱された弦の自由振動を記述する波動方程式に由来する．例えば次のような方程式を挙げることができる [8].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(1 + \frac{Ea}{2T_0 L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{K_0}$$

ここで，$c^2 := T_0/m$，$u : [0, L] \to \mathbb{R}$ を弦の振幅とし，弦に付随する物理量をそれぞれ，m: 線密度，T_0: 初期張力，E: Young率，a: 断面積，L: 初期の長さとする．(K_0) は振動に際する，弦の長さの変化が引き起こす張力変化を考慮に入れたものとして知られている．これまで非線形振動の分野において (K_0) を用いた物理学的研究が多く行われてきた．さらに，物理学的な観点からだけでなく数学的な関心からもKirchhoff型準線形波動方程式，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = f(x, t, u) \tag{K_1}$$

の可解性に関する研究が近年に至るまで盛んに行われている [1]．ここで，$M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ は適当な関数とする．本講演で取り上げる問題 (P) は，(K_1) の定常方程式とみることができる．

2. Kirchhoff型方程式の変分解析

2005年，Alves-Corrêa-Ma[2] によって，以下のKirchhoff型方程式の解の存在についての研究が行われた．

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = f(x, u) \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_0}$$

ここで，M, f をそれぞれ，$\mathbb{R}^+$，$\Omega \times \mathbb{R}$ 上の連続関数とし，特に f は増大度に関する適当な条件を満たすものとする．特筆すべきは，彼らは (P_0) の解の存在を変分法を用

* 〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138 大阪市立大学理学研究科数物系専攻
e-mail: d12sax0J51@ex.media.osaka-cu.ac.jp

いて調べている点にある．彼らに従い，まず問題 (P_0) に対応する弱解を次の通り定義する．

定義 2.1. ある関数 $u \in H_0^1(\Omega)$ が任意の関数 $h \in H_0^1(\Omega)$ に対して，

$$M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla h dx - \int_\Omega f(x,u)h dx = 0$$

を満たすとき，u を *(P_0)* の弱解という．

通常の半線形楕円型方程式に対する正則性の定理を用いることにより，(P_0) の弱解は (P_0) の古典解であることが保証される．続いて (P_0) に対応したエネルギー汎関数を次のように定義する．

$$I(u) := \frac{1}{2}\hat{M}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) - \int_\Omega F(x,u)dx \ (u \in H_0^1(\Omega)).$$

ここで，$\hat{M}(t) := \int_0^t M(s)ds$，$F(x,t) := \int_0^t f(x,s)ds$ とする．このように I を定義することで，I は $H_0^1(\Omega)$ 上 well-defined であり，1 階連続 Fréchet 微分可能であることが確かめられる．さらに I の臨界点が (P_0) の弱解に対応することも容易に示すことができる．このように，(P_0) は変分法を用いて解析することが可能なのである．

3. Sobolev の臨界指数を持つ Kirchhoff 型方程式

2 章で紹介した定式化のもと，我々は変分法を用いて (P) の解の存在を調べる．ここで，(P) の方程式の右辺が臨界項 u^5 をもつことに注意する．一般に非線形楕円型方程式の変分解析において，方程式が臨界項を持つ場合，適切な Sobolev 空間の埋め込みの compact 性の欠如から，問題の取り扱いが難しくなることが知られている．よって臨界項を持つ問題 (P) の解の存在を調べることは非常に興味深い．ただし，$\lambda \leq 0$ で Ω が星形領域のとき，(P) は解を持たないことに注意するべきである．この事実は (P) に対応する Pohozaev の恒等式 [9] を用いることにより示される．従って，Brezis-Nirenberg[4] の結果で知られているように，臨界項に対し低次の摂動項を加えた非線形項，$\lambda u^q + u^5 (\lambda > 0)$ を考えることは自然である．ここで Brezis-Nirenberg の結果を思い出すことにする．彼らの問題は，(P) において $a = 1, b = 0$ とおいたものに対応する．彼らは 3 以上の一般次元領域で議論をしているが，我々の問題に合わせて 3 次元領域における結果のみを挙げることにする．それは次の 1-3 の通りである．

1. $q = 1, \Omega$ を球とする．このとき，(P) は $\lambda_1/4 < \lambda < \lambda_1$ のときに限り解を持つ．ここで，$\lambda_1 > 0$ は $-\Delta$ の Ω における第一固有値である．

2. $1 < q \leq 3$ とする．このとき，(P) は十分大きな $\lambda > 0$ に対して解を持つ．

3. $3 < q < 5$ とする．このとき，(P) は全ての $\lambda > 0$ に対して解を持つ．

本講演における我々の目標は上記 1-3 の結果を $a, b > 0$ の場合のものに拡張することにある．ここで，近年得られている (P) に対する解析結果をこの観点からみてみることにする．まず，Figueiredo[5] の結果により，結果 2 の拡張が可能であることが分かる．つまり，$1 < q \leq 3$, $a > 0$, $b \geq 0$ のとき，(P) は十分大きな $\lambda > 0$ に対して解を持つ．さらに，Xie-Wu-Tang[10] の結果により，結果 3 も拡張可能であることが分かる．つま

り，$a, b \geq 0$, $a + b > 0$ のとき，(P) は全ての $\lambda > 0$ に対して解を持つ．ここで彼らの結果は $a = 0$ であっても $b > 0$ であれば成立することを注意しておく． しかし，結果 1 に関する拡張結果はこれまでに得られていない．そこで本講演では特に上記結果 1 の拡張を試みる．

4. 主結果

結果 1 は 1-3 の中でも特に精密な解析を要する．このため，我々の問題を改めて設定し直すことにする．まず，$q = 1$ とする．また，Brezis-Nirenberg の結果との比較を明確にするために，$a = 1, \Omega$ を球とする．そして，$\lambda \in \mathbb{R}$ を与えられた定数とし，$b \geq 0$ をパラメーターとみる．ここで，先に挙げた結果 [5][10] では，a, b を与えられた定数とし，$\lambda > 0$ をパラメーターとみていたことに注意する．我々が考える問題は次の通りである．

Q. 与えられた各 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し，$b \geq 0$ がどの範囲にあれば (P) が解を持つか？

この問いに対する我々の解答は次の通りである．

定理 4.1 (N. 2013 [7]). $a = 1$, $b \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $q = 1$, さらに Ω を球とする．このとき以下の *(i)-(iv)* が成立する．ただし，$\lambda_1 > 0$ を $-\Delta$ の Ω 上の第一固有値とする．

(i) $\lambda \leq \lambda_1/4$ とする．このとき，全ての $b \geq 0$ に対して *(P)* は解を持たない．

(ii) $\lambda_1/4 < \lambda < \lambda_1$ とする．このとき，十分小さな $b \geq 0$ に対して，*(P)* は解を持つ．

(iii) $\lambda = \lambda_1$ とする．このとき，十分小さな $b > 0$ に対して，*(P)* は解を持つ．

(iv) $\lambda > \lambda_1$ とする．このとき，十分大きな $b > 0$ に対して *(P)* は解を持つ．

特筆すべきは，結果 (iii), (iv) である．上述の Brezis-Nirenberg の結果 1 によれば $a = 1$, $b = 0$ かつ $\lambda \geq \lambda_1$ のとき，(P) は解を持たない．しかし，定理 4.1 (iii), (iv) によれば，$b > 0$ が適当な範囲にある場合，$\lambda \geq \lambda_1$ であっても (P) は解を持ち得る．これまでの Kirchhoff 型方程式の変分解析では，Kirchhoff 型の非局所的係数が問題の解の存在を阻害したり，解の存在の証明を困難にしていると捉えられる結果がほとんどであった．これに対し我々の結果 (iii), (iv) は，それらとは逆に Kirchhoff 型摂動が解の存在を助けるという現象を捉えたものである．以下に定理 4.1 の証明の概要を述べる．

5. 定理の証明

本講演では Brezis-Nirenberg の結果の拡張として最も基本的な (ii), (iii) の証明の概要を述べることにする．2 章で紹介した問題の定式化に従い，(P) に対応するエネルギー汎関数を次の通り定義する．

$$I(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_+^2 dx - \frac{1}{6}\int_\Omega u_+^6 dx.$$

ここで，$\|\cdot\| := \left(\int_\Omega |\nabla \cdot|^2 dx\right)^{1/2}$, $u_+ := \max\{0, u\}$ とする．我々は I の非自明な臨界点の存在を証明すればよい．このために峠の定理 [3] を応用する．ここで峠の定理を以下に述べる．

定理 5.1 (峠の定理). X をノルム $\|\cdot\|$ についてのバナッハ空間，I を X 上の C^1 級汎関数とする．さらに I は次の *mountain pass geometry* を満たすものとする．つまり，$I(0)=0$ かつ

(a) $\exists \alpha, \rho > 0$ *s.t.* $I(u) \geq \alpha$ *for all* $u \in X$ *with* $\|u\| = \rho$,

(b) $\exists e \in X$ *s.t.* $\|e\| > \rho$ *and* $I(e) \leq 0$.

このとき，$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$ とし，*mountain pass level* を

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

と定義する．もし，I が *(PS)*$_c$ 条件を満たすならば，c は I の臨界値となる．

我々の問題 (P) に対応するエネルギー汎関数 I が mountain pass geometry を持つことは比較的容易に示すことができる．主たる困難は，エネルギー汎関数が PS 条件を満たすことを保証する際に生じる．ここで，PS 列と PS 条件の定義を述べる．

定義 5.2 ((PS)$_c$ 列). 関数列 $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ が $I(u_n) \to c$ かつ $I'(u_n) \to 0$ *in* $H^{-1}(\Omega)$ $(n \to \infty)$ を満たすとき，(u_n) を I の *(PS)*$_c$ 列という．ここで，H^{-1} は $H_0^1(\Omega)$ の双対空間とする．

定義 5.3 ((PS)$_c$ 条件). I の任意の *(PS)*$_c$ 列が $H_0^1(\Omega)$ の中で強収束する部分列を含むとき，I は *(PS)*$_c$ 条件を満たすという．

本講演において，まずこの PS 条件を保証する際に生じる問題点を詳しく解説する．そして時間の許す限り，如何にこの困難を解消し定理の証明を得るかについて述べる．

参考文献

[1] A. Arosio, Averaged evolution equations. The Kirchhoff string and its treatment in scales of Banach spaces. Functional analytic methods in complex analysis and applications to partial differential equations (Trieste, 1993), 220-254, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.

[2] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa and T.F.Ma, Positive Solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type, Comput. Math. Appl. **49** (2005), 85-93.

[3] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Anal. 14 (1973) 349-381.

[4] H. Brezis and L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Comm. pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.

[5] G.M. Figueiredo, Existence of a positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument, J. Math. Anal. Appl. **401** (2013), 706-713.

[6] G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik, Teubner, Leipzig, 1876.

[7] D. Naimen, On the Brezis-Nirenberg problem with a Kirchhoff type perturbation, Submitted for publications.

[8] D.W. Oplinger, Frequency response of a nonlinear stretched string, J. Acoustic Soc. Amer. **32** (1960), 1529-1538.

[9] S. Pohozaev, Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 1408-1411.

[10] Q. Xie, X. Wu and C. Tang, Existence and multiplicity of solutions for Kirchhoff type problem with critical exponent, Commun. Pure Appl. Anal. 12 (2013) 706-713.

合流型超幾何微分方程式のVoros係数

高橋　甫宗　(近畿大総合理工)

1. 概要

微分方程式論におけるStokes現象とは，不確定特異点の近傍での同一の形式解を漸近級数とする正則解が特異点に近づく方向によって一般に異なりうるという現象をいうのであるが，完全WKB解析においてWKB解およびそのBorel和のパラメータに関するStokes現象が同様に考察される．そのStokes現象において異なる2つのStokes領域でのWKB解の相違を表すものとしてVoros係数が定義される．Voros係数はVoros[6]により導入され，その後研究されてきた．先行研究としては例えば，Tanda,Aoki[1]によるGaussの超幾何微分方程式についての議論がある．今回，合流型超幾何微分方程式について考察する．結論は，合流型超幾何微分方程式におけるVoros係数は，超幾何微分方程式の場合に得られるVoros係数において形式的にパラメータについて極限をとったものになっている．その計算方法はTakei[5]によるものを用いている．なお，本研究は反田美香(近畿大総合理工)，青木貴史(近畿大)両氏との共同研究である．

2. WKB解

ラージパラメータηをいれたSchrödinger型微分方程式

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2}+\eta^2Q(x)\psi=0 \tag{1}$$

に付随するRiccati方程式$dS/dx+S^2=\eta^2Q$の形式解を$S=\sum_{j=-1}^{\infty}\eta^{-j}S_j$の形で探す．そして得られた$\eta^{-1}$に関する形式的べき級数解をさらに変形し直すことで

$$\psi_{\pm}=\frac{1}{\sqrt{S_{\mathrm{odd}}}}\exp(\pm\int_a^x S_{\mathrm{odd}}dx)$$

という表示を得る．この形式解のことをWKB解と呼ぶ．ここでaは$Q(x)$の1位の零点である．この零点のことを変わり点と呼ぶ．このWKB解は発散級数である．そこで，解析的解での議論をするために次のBorel総和法を用いる．

3. WKB解のBorel和

上で定義したWKB解ψはまた次のようにも表現される．

$$\psi=\mathrm{e}^{(a(x)\eta)}\sum_{i\geq -1}\varphi_i(x)\eta^{-i-\alpha}$$

ここで$a(x)=\int_a^x S_{-1}dx$である．このψにたいして次のような操作を施す．

$$\psi=\mathrm{e}^{(a(x)\eta)}\sum_{i\geq -1}\varphi_i(x)\eta^{-i-\alpha}\to\psi_B=\sum_{i\geq 0}\frac{\varphi_i(x)}{\Gamma(i+\alpha)}(y+a(x))^{i+\alpha-1}$$

$$\swarrow$$

$$\tilde{\psi}=\int_{a(x)}^{\infty}\mathrm{e}^{(-y\eta)}\psi_B dy$$

このとき，ψ_B を ψ の Borel 変換，$\tilde{\psi}$ を ψ の Borel 和という．この Borel 和は方程式 (1) の解析的解を与えている．また，この Borel 和は Im $a(x) = 0$ で定義される Stokes 曲線によって囲まれた Stokes 領域内で意味を持つ．

4. 合流型超幾何微分方程式の Voros 係数

微分方程式

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \eta^2 R\psi = 0 \tag{2}$$

を考える．ここで，η は大きなパラメータであり，$R = R_0 + \eta^{-2}R_1$ は次で与えられる．

$$R_0 = \frac{x^2 + 2(2\alpha - \gamma)x + \gamma^2}{4x^2}, R_1 = -\frac{1}{4x^2}. \tag{3}$$

これは,Gauss の超幾何微分方程式に大きなパラメータ η を導入した方程式

$$x(1-x)\frac{d^2w}{dx^2} + (1 + \eta\gamma - (\eta(\alpha+\beta)+2)x)\frac{dw}{dx} - (\frac{1}{2} + \eta\alpha)(\frac{1}{2} + \eta\beta)w = 0 \tag{4}$$

において，合流操作 (x を x/β として $\beta \to \infty$) により得られる Kummer の微分方程式

$$x\frac{d^2w}{dx^2} + (\gamma + \eta^{-1} - x)\eta\frac{dw}{dx} - \eta^2(\alpha + \frac{1}{2}\eta^{-1})w = 0 \tag{5}$$

に対して

$$w = x^{-\frac{1}{2}-\frac{\eta\gamma}{2}} \exp(\frac{\eta x}{2})\psi \tag{6}$$

なる変換を行い 1 階項を消去した方程式である．以下では $\alpha(\alpha-\gamma) \neq 0$ を仮定する．このとき R_0 は異なる 2 つの零点を持つ．これらの零点を (1) の変わり点という．

方程式 (1) に付随する Riccati 方程式 $dT/dx + T^2 = \eta^2 R$ の形式解 $T = \sum_{j=-1}^{\infty} \eta^{-j} T_j$ の η に関する奇数次部分を T_{odd} と書く．また，$b_0 = 0, b_2 = \infty$ とおく．(1) の変わり点を 1 つ選び a とする．このとき積分

$$W_j = \int_{b_j}^{a} (T_{\text{odd}} - \eta T_{-1})dx \qquad (j = 0, 2) \tag{7}$$

は well-defined となり，a の取り方に依らない形式的べき級数を定める．これを (1) の $b_j (j = 0, 2)$ に関する Voros 係数という．ここで T_{-1} の分枝は $j = 0, 2$ に応じてそれぞれ次のように取る：

$$\sqrt{R_0} \sim \frac{\gamma}{2x} \qquad (x \sim 0), \tag{8}$$

$$\sqrt{R_0} \sim \frac{1}{2} \qquad (x \sim \infty). \tag{9}$$

Gauss の超幾何微分方程式の場合と同様に，Voros 係数は異なる正規化を持つ WKB 解の比の対数であり，パラメータに関する Stokes 現象を記述するために重要な役割を果たす．Voros 係数の導出も Gauss の超幾何微分方程式の場合と類似の手法をもちいることができる．

命題　原点に関するVoros係数W_0は次の差分方程式系をみたす.

$$W_0(\alpha+\eta^{-1},\gamma)-W_0(\alpha,\gamma)=\frac{1}{2}\log\frac{\alpha-\gamma+1/2\eta^{-1}}{\alpha+1/2\eta^{-1}}-\frac{\eta}{2}((\alpha+\eta^{-1}\gamma)\log(\alpha+\eta^{-1}-\gamma)$$
$$-(\alpha-\gamma)\log(\alpha-\gamma)+\frac{\eta}{2}((\alpha+\eta^{-1})\log(\alpha+\eta^{-1})-\alpha\log\alpha), \tag{10}$$
$$W_0(\alpha,\gamma+\eta^{-1})-W_0(\alpha,\gamma)=\frac{1}{2}\log\frac{\gamma(\gamma+\eta^{-1})}{\gamma-\alpha+1/2\eta^{-1}}$$
$$-\frac{\eta}{2}((\alpha-(\gamma+\eta^{-1}))\log(\gamma+\eta^{-1}-\alpha)-(\alpha-\gamma)\log(\gamma-\alpha))$$
$$+\frac{\eta}{2}((\gamma+\eta^{-1})\log(\gamma+\eta^{-1})^2-\gamma\log\gamma^2)-\frac{1}{2}. \tag{11}$$

上の差分方程式系はη^{-1}の形式的べき級数解で$(\alpha,\gamma,\eta^{-1})$について0次斉次な解をただひとつ持ち，それは$W_0$と一致する．$W_2$についても同様に差分方程式系を導出することがでい，これらを解くことにより次の定理を得る.

定理1　方程式(1)の原点および無限遠点に関するVoros係数はそれぞれ次の表示を持つ.

$$W_0=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\frac{B_n\eta^{1-n}}{n(n-1)}\left((1-2^{1-n})\left(\frac{1}{\alpha^{n-1}}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)^{n-1}}\right)+\frac{2}{\gamma^{n-1}}\right), \tag{12}$$

$$W_2=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\frac{B_n\eta^{1-n}}{n(n-1)}(1-2^{1-n})\left(\frac{1}{\alpha^{n-1}}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)^{n-1}}\right). \tag{13}$$

ただしB_nはBernoulli数である.
次に形式的べき級数$W_j(j=0,2)$のBorel和を考える.

$$\omega_1^*=\{(\alpha,\gamma)\in\mathbb{C}^2\mid 0<\mathrm{Re}\alpha<\mathrm{Re}\gamma\}, \tag{14}$$
$$\omega_3^*=\{(\alpha,\gamma)\in\mathbb{C}^2\mid 0<\mathrm{Re}\gamma<\mathrm{Re}\alpha\}, \tag{15}$$
$$\omega_4^*=\{(\alpha,\gamma)\in\mathbb{C}^2\mid \mathrm{Re}\alpha<0<\mathrm{Re}\gamma\} \tag{16}$$

とおく．各jについて，$(\alpha,\gamma)\in\omega_j^*$であれば(1)のStokes曲線の位相的形状は変化しない.

定理2　方程式(1)のVoros係数W_0およびW_2は$\omega_j^*(j=1,3,4)$においてBorel総和可能である．W_0およびW_2のω_j^*におけるBorel和をそれぞれW_0^j,W_2^jとすると，これらの具体系が計算可能である．たとえば

$$W_0^1=\frac{1}{2}\log\frac{\Gamma(\gamma\eta)^2\alpha^{\alpha\eta}(\gamma-\alpha)^{(\gamma-\alpha)\eta}\eta^{1-\gamma\eta}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha\eta)\Gamma(\frac{1}{2}+(\gamma-\alpha)\eta)\gamma^{2\gamma\eta-1}}+\frac{1}{2}\gamma\eta, \tag{17}$$

$$W_2^1=\frac{1}{2}\log\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+(\gamma-\alpha)\eta)\eta^{(2\alpha-\gamma)\eta}\alpha^{\alpha\eta}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha\eta)(\gamma-\alpha)^{(\gamma-\alpha)\eta}}-\frac{1}{2}(2\alpha-\gamma)\eta \tag{18}$$

となる.

参考文献

[1] T. Aoki, M. Tanda Borel sums of Voros coefficients of hypergeometric differential equations with a large parameter」『RIMS Kokyuroku』

[2] Aoki, T. and Tanda, M., Characterization of Stokes graphs and Voros coefficients of hypergeometric differential equations with a large parameter, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B40** (2013), 147-162.

[3] Kawai, T. and Takei, Y., Algebraic Analysis of Singular Perturbation Theory,Translation of Mathematical Monographs, vol. 227, AMS, 2005.

[4] Koike, T. and Takei, Y., On the Voros coefficient for the Whittaker equation with a large parameter – Some progress around Sato's conjecture in exact WKB analysis, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* , **47** (2011), 375–395.

[5] Takei Y., Sato's conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B10** (2008), 205-224.

[6] Voros, A., The return of the quartic oscillator, The complex WKB method, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **39** (1983), 211-338.

On the Artin-Mazur Zeta Functions of Rational Maps over $\mathbb{C}_p$

李正勳 (LEE, Junghun) m12003v@math.nagoya-u.ac.jp

Abstract

In this presentation, we will discuss the Artin-Mazur zeta functions of rational maps over $\mathbb{C}_p$. In the first section, we will see what dynamical systems are. In the second section, a construction of some p-adic fields will be focused. In the third section, we will see the definition of the Artin-Mazur zeta functions of dynamical systems. In the forth section, the main theorem of this presentation will be introduced. In the last section, we will see an open problem.

Notation

We will use the following notations:
$\mathbb{Q}$: The set of the rational numbers,
$\mathbb{Q}(T)$: The field of rational maps over $\mathbb{Q}$,
$\mathbb{C}$: The set of the complex numbers,
$\mathbb{F}_p$: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ for a prime number p.

1 Dynamical Systems

Let us begin with the definition of dynamical systems.

Definition 1 (Dynamical System)**.** Let X be a topological space and ϕ be a continuous map from X to itself. Then, the pair (X, ϕ) is called *a dynamical system.*

In particular, we have interests in iterations of the map of a dynamical system. Let us see an example of a dynamical system.

Example 2. Let us consider $\mathbb{C}$ with the Euclidean topology and a map ϕ defined by

$$\phi(z) := z^2.$$

Then, $(\mathbb{C}, \phi)$ is a dynamical system. One may check that

$$\lim_{n\to\infty} \phi^n(z) = \begin{cases} 0, & (|z| < 1) \\ \infty, & (|z| > 1). \end{cases}$$

One of the most significant issue is to consider how many points will be returned at last. More precisely, let us define the periodic points of a dynamical system as follows.

Definition 3 (Periodic Points)**.** Let (X, ϕ) be a dynamical system and n be a natural number. Then, we define *the set of isolated periodic points of period* $n \in \mathbb{N}$ *of* ϕ by

$$Per_n(\phi) := \{z \in X \mid \phi^n(z) = z\}.$$

Then, an element of $Per_n(\phi)$ is called *a periodic point of periodic* n *of* ϕ. Moreover, the cardinality of $Per_n(\phi)$ is denoted by $N_n(\phi)$ for each $n \in \mathbb{N}$.

Example 4. Let us consider $(\mathbb{C}, \phi)$ as a dynamical system where $\phi(z) := z^2$. Then, it is easy to check that

$$Per_1(\phi) = \{1, 0\}.$$

Moreover, one may check that

$$Per_n(\phi) = \{\exp\frac{2\pi k}{n} \mid k = 2^m, m = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}.$$

In particular, we have

$$N_n(\phi) = 2^n$$

for any $n \in \mathbb{N}$.

2 The Complex p-Adic Field

In this section, we will focus on a construction and some properties of some p-adic fields. One may find more precise discussions in some p-adic textbooks. See, for example, [1]. Note that there are many ways to construct these p-adic fields. Let us begin with a definition of the p-adic norm on $\mathbb{Q}$.

Definition 5 (The p-Adic Norm)**.** Let p be a prime number and define a map from $\mathbb{Q}$ to $\mathbb{R}$ by

$$\left|\frac{m}{n}\right|_p = \begin{cases} |p^k \frac{m'}{n'}|_p = p^{-k}, & (m \neq 0), \\ 0, & (m = 0). \end{cases}$$

where m' and n' are integers which satisfy $p \nmid m'$and n'. Then, $|\cdot|_p$ is a norm on $\mathbb{Q}$.

This norm has a different property with the Euclidean norm on $\mathbb{Q}$. Consider the following proposition.

Proposition 6. *For any prime number p, $|\cdot|_p$ is multiplicative non-Archimedean. That is,*

$$|z + w|_p \leq \max(|z|_p, |w|_p), \quad |zw| = |z||w|$$

for any z and $w \in \mathbb{Q}$.

One of the motivations why the p-adic norm is considered comes from the following theorem:

Theorem 7 (Ostrowski's Theorem)**.** *Any non-trivial norm on $\mathbb{Q}$ is equivalent either to the Euclidean norm $|\cdot|$ or to the p-adic norm $|\cdot|_p$. That is, if $|\cdot|$ is a non-trivial and non-Euclidean norm, then there exist some prime number p and $c > 0$ such that*

$$|z| = |z|_p^c$$

for all $z \in \mathbb{Q}$.

The following example tells us that the p-adic norm determines a considerably different topology with the Euclidean topology.

Example 8. Let p be a prime number and consider $|\cdot|_p$ as a p-adic norm over $\mathbb{Q}$. Then, we have

$$|p|_p = \frac{1}{p}, \quad |p^2|_p = \frac{1}{p^2}, \quad \cdots, \quad |p^n|_p = \frac{1}{p^n}, \cdot.$$

It implies that a sequence $\{p^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ on $\mathbb{Q}$ is convergent to 0 with respect to $|\cdot|_p$.

Now let us construct the p-adic complex field $\mathbb{C}_p$. First, we construct the completion of $\mathbb{Q}$ with respect to $|\cdot|_p$.

Definition 9 ($\mathbb{Q}_p$)**.** For a prime number p, $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ is defined as the pair of the completion of $\mathbb{Q}$ with respect to the p-adic norm on $\mathbb{Q}$ and the extended norm of the p-adic norm to the completion.

Next, we construct an algebraically closed field containing $\mathbb{Q}_p$.

Definition 10 ($\mathbb{Q}_p^{alg}$)**.** For a prime number p, $(\mathbb{Q}_p^{alg}, |\cdot|_p)$ is defined as the pair of an algebraic closure of $\mathbb{Q}_p$ and the extended norm of $|\cdot|_p$ on $\mathbb{Q}_p$ to the algebraic closure.

Finally, we obtain an algebraically closed complete non-Archimedean field.

Definition 11 ($\mathbb{C}_p$)**.** For a prime number p, $(\mathbb{C}_p, |\cdot|_p)$ is defined as the pair of the completion of $\mathbb{Q}_p^{alg}$ with respect to $|\cdot|_p$ on $\mathbb{Q}_p^{alg}$ and the extended norm of $|\cdot|_p$ on $\mathbb{Q}_p^{alg}$ to the completion.

Theorem 12. *For any prime number p, $(\mathbb{C}_p, |\cdot|_p)$ is an algebraically closed complete non-Archimedean field.*

We are going to consider dynamical systems on $\mathbb{C}_p$ in the latter part of this presentation.

3 Dynamical Zeta Functions

In this section, we will discuss the Artin-Mazur zeta functions of some dynamical systems. The definition of the Artin-Mazur zeta functions was introduced by Michael Artin and Barry Mazur in their paper [2].

Definition 13 (the Artin-Mazur Zeta Function)**.** Let (X, ϕ) be a dynamical system. Then, we define *the Artin-Mazur zeta function of ϕ over X* by

$$Z_\phi(T) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n(\phi)}{n} T^n)$$

as a formal power series over $\mathbb{C}$.

Note that exp is a formal power series over $\mathbb{C}$ defined by

$$\exp(T) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n.$$

Moreover we will use a formal power series log over $\mathbb{C}$ defined by

$$\log(T) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} T^n.$$

Let us see some simple examples of the Artin-Mazur zeta functions.

Example 14. Let us consider a dynamical system $(\mathbb{C}, \phi)$ where $\phi(z) := az$ and $|a| \neq 1$. One may easily check that

$$N_n(\phi) = 1$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Thus,

$$Z_\phi(T) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} T^n) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} T^n) = \exp(\log(1-T)^{-1}) = \frac{1}{1-T}.$$

Example 15. Let us consider $(\mathbb{C}, \phi)$ where $\phi(z) := z^2$. We have already obtained that

$$N_n(\phi) = 2^n$$

for any $n \in \mathbb{N}$. Thus,

$$Z_\phi(T) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} T^n) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2T)^n) = \exp(\log(1-2T)^{-1}) = \frac{1}{1-2T}.$$

One may notice that the Artin-Mazur zeta functions in the above examples are rational. That is,

$$Z_\phi(T) \in \mathbb{Q}(T).$$

In fact, they are special cases of the following theorem proved by A. Hinkkanen.

Theorem 16 (A. Hinkkanen)**.** *Let $\hat{\mathbb{C}}$ be the Riemann sphere and ϕ be a rational function over $\mathbb{C}$ with $\deg(\phi) \geq 2$. Then,*

$$Z_\phi(T) \in \mathbb{Q}(T).$$

Note that the original statement in his paper is more delicate and complicated. To prove it, we need to understand the complex dynamical systems. See, for example, [5] to gain several knowledge of the complex dynamical systems.

In the rest of this presentation, we will see that it is true for any rational maps, whose the degree is greater than 1, over $\mathbb{C}_p$.

4 Dynamical Zeta Functions of Rational Maps over $\mathbb{C}_p$

Let us begin with the main theorem in this presentation.

Theorem 17. *Let p be a prime number and $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ be the projective line of $\mathbb{C}_p$. If ϕ is a rational map over $\mathbb{C}_p$ with $\deg(\phi) \geq 2$, then*

$$Z_\phi(T) \in \mathbb{Q}(T).$$

More precisely, there exists some finite parabolic cycles $\{C_1, C_2, \cdots, C_N\}$ and $\{p_1, p_2, \cdots, p_N\} \subset \mathbb{N}$ and $\{q_1, q_2, \cdots, q_N\} \subset \mathbb{N}$ and $\{l_1, l_2, \cdots, l_N\} \subset \mathbb{N}$ such that

$$Z_\phi(T) = (1 - dT)^{-1}(1 - T)^{-1} \prod_{i=1}^{N} (1 - T^{p_i q_i})^{l_i}$$

where d is the degree of ϕ.

5 An Open Problem: Rational Maps over $\overline{\mathbb{F}}_p$

If we consider the Artin-Mazur functions of rational maps over fields with non-zero characteristic, there are many open problems. In this last section, we will see an open problem suggested by Andrew Bridy in his paper [3]. Let us begin with his theorem:

Theorem 18 (A. Bridy)**.** *Let p be a prime number and $\overline{\mathbb{F}}_p$ be an algebraic closure of $\mathbb{F}_p$. If $\phi \in \overline{\mathbb{F}}_p[T^p]$, then $Z_\phi(T) \in \mathbb{Q}(T)$. On the other hand, if m is an integer with $p \nmid m$, then $Z_{x^m}(T) \notin \mathbb{Q}(T)$.*

The first statement in the above theorem may be checked easily, but the second statement is very difficult to show. One may find the proof in [3]. As a result of his theorem, we have the following corollary:

Corollary 19. *Let p be any prime number. Then, there exists $\phi \in \overline{\mathbb{F}}_p(T)$ such that*

$$Z_\phi(T) \notin \mathbb{Q}(T).$$

He also suggested the following question in his paper [3]:

Problem 20 (A. Bridy)**.** *Let p be an odd prime number and $(\overline{\mathbb{F}}_p, \phi)$ be a dynamical system where $\phi(z) := z^2 + 1$. Then, is it true that*

$$Z_\phi(T) \in \mathbb{Q}(T)?$$

References

[1] Andrew Baker, *An Introduction to p-Adic Numbers and p-Adic Analysis*, a presentation Note.

[2] Michael Artin, Barry Mazur, *On Periodic Points*, Annals of Mathematics. Second Series (Annals of Mathematics) 81 (1): 82-99, 1965.

[3] Andrew Bridy, *Transcendence of the Artin-Mazur Zeta Function for Polynomial Maps Of* $\mathbb{A}_1(\mathbb{F}_p)$, Acta Arith. 156 no. 3, 293-300, 2012.

[4] A. Hinkkanen, *Zeta Functions of Rational Functions are Rational*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math, 19(1):3-10, 1994.

[5] John Milnor, *Dynamics in One Complex Variable (Third edition)*, Princeton University Press, 2006.

[6] Joseph H. Silverman, *The Arithmetic of Dynamical Systems*, Springer, 2000.

Laplace積分の評価と漸近展開

九州大学数理学府　楢崎政宏 (Masahiro Narazaki, Kyushu Univ.)

§1　概要

本講演ではLaplace積分を扱うが，先ず，類似した形で表される振動積分について簡単に述べる．**振動積分**とは，

$$I(t;\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{itf(x)}\varphi(x)dx$$

という形で表される積分のことで，実数値関数 f（phase）や複素数値関数 φ（amplitude）は一先ず C^∞-級関数としておく．Phase 関数 f が実解析的であるとき，P. Jeanquartier（1970）やB. Malgrange（1974）によって以下のような漸近展開が得られ，A. N. Varchenko（1976）によってその先頭項の指数，係数が明示的に得られた．

$$I(t;\varphi) \sim e^{itf(0)} \sum_{\alpha} \sum_{k=1}^{n} C_{\alpha k}(\varphi)\, t^{\alpha} (\log t)^{k-1} \quad (\text{as } t \to \infty). \tag{1}$$

但し，$\{\alpha\}$ はある負の等差数列に含まれる．(その他の条件等，詳しくは [7] を参照.)

その後も振動積分の減少度や漸近展開の研究が為されているが，主な結果として，Phong-Stein（1997，L^2-関数の振動積分作用素の評価，[5]）や神本-野瀬（2012，$\hat{\mathcal{E}}(U)$ という関数クラスへの拡張，[3]）等が挙げられる．

一方，**Laplace 積分**は

$$L(t;\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-tf(x)}\varphi(x)dx.$$

と定義されるが，この場合も f と φ はそれぞれ phase，amplitude と呼ばれる．また，基本的な仮定条件は振動積分のときと同じだが，それに $f(x) \geq 0$ を加える．(何となれば，$f(x) < 0$ となる x があると，$t \to \infty$ としたとき発散するからである.)

もし f が実解析的な非負値関数ならば，(1) と同様な漸近展開が得られることが既に分かっている（[1] Thm.8.6，[2] Thm.1.3）．本研究は，Laplace 積分の漸近展開を，$f \in \hat{\mathcal{E}}(U)$ の場合に得ることを目標としている．

特に断らない限り $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ は非負値関数とし，$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ の台は充分小さい原点の開近傍に含まれるものとする．

§2　t に関して急減少となる場合

関数 F は $t \to \infty$ としたとき**急減少**と言うと，任意の非負整数 N, M に対して

$$\lim_{t\to\infty} t^N F^{(M)}(t) = 0$$

となることを言う場合もあるが，此処では t での微分を考えない為，全ての非負整数 N に対して

$$\lim_{t\to\infty} t^N F(t) = 0$$

を満たすことと定義する．言い換えると，どんな N に対しても $F(t) = \mathsf{O}\left(t^{-N}\right) \quad (\text{as } t \to \infty)$ である．尚，$\mathsf{O}(\cdot)$ は所謂 “Landau の記号” で，この場合は $\mathsf{o}\left(t^{-N}\right)$ としても良い．

Proposition 1

$n = 1$ とする．このとき，以下の条件のどれかを満たせば

$$L(t;\varphi) = \int_a^b e^{-tf(x)}\varphi(x)dx$$

は急減少となる．但し，$Supp(\varphi) \subset (a,b)$.
(i) 閉区間 $[a,b]$ 上で常に $f(x) > 0$.
(ii) $Supp(\varphi)$ 上で $f'(x) \neq 0$.

条件 (ii) は，多くの場合は (i) に帰着されるが，φ の台の端点で $f(x) = 0$ となることも許容する．多変数のときも同様に，$f(x) > 0$ となる場合や $\nabla f(x) \neq (0,\dots,0)$ となる場合も，Laplace 積分は t に関して急減少する．但し，

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

その為，これ以降は特に断らない限り $f(0) = 0$ と $\nabla f(0) = (0,\dots,0)$ を仮定する．一般に，$\nabla f(x) = (0,\dots,0)$ なる点 x のことを f の**臨界点**と呼ぶ.

§3　減少度と漸近展開

Proposition 2

$n = 1$ とする．関数 f と偶数 $k \geq 2$ は,
- $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$,
- $f^{(k)}(0) \neq 0$

を満たすとする．このとき，φ の台が充分に小さい 0 の開近傍に含まれるならば,

$$L(t;\varphi) \sim t^{-\frac{1}{k}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{-\frac{j}{k}} \quad (\text{as } t \to \infty).$$

但し，各 a_j は f や φ に依存する複素定数．記号 $\sim$ は，任意の非負整数 N, M に対して

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^M \left(L(t;\varphi) - t^{-\frac{1}{k}} \sum_{j=0}^{N} a_j t^{-\frac{j}{k}}\right) = \mathsf{O}\left(t^{-M-\frac{N+1}{k}}\right)$$

を満たすことを意味する.

Proposition 3

$|\mathrm{Hess}\, f(0)| \neq 0$ のとき,

$$L(t;\varphi) \sim t^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{-\frac{j}{2}} \quad (\text{as } t \to \infty)$$

という漸近展開が得られる．但し，a_j は f や φ に依存する定数．また，先頭項の係数は

$$a_0 = (2\pi)^{n/2} \cdot \frac{\varphi(0)}{\sqrt{|\mathrm{Hess}\, f(0)|}}$$

と明示できる.

これらはそちらも簡単な計算で求められる．特に $n = 1$ の場合は Proposition 2 で $\hat{\mathcal{E}}(U)$ のケースが全て尽くされており，これ以降は $n \geq 2$ で $|\mathrm{Hess}\, f(0)| = 0$ のときを考えれば良い.

§4　Newton 多面体と関数クラス $\hat{\mathcal{E}}(U)$

Definition 4

関数 f の $x = 0$ の周りでの Taylor 展開を

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha x^\alpha$$

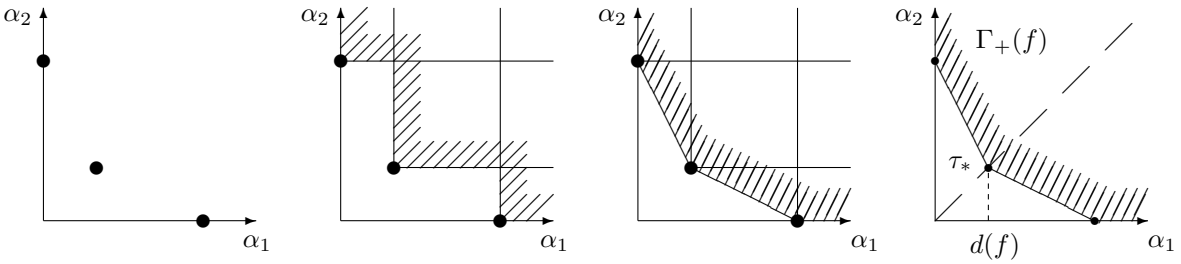
と書き，f の **Newton 多面体** $\Gamma_+(f)$ を以下の集合の凸包として定義する：

$$\bigcup_{c_\alpha \neq 0} (\alpha + \mathbb{R}_+^n).$$

但し，$\alpha + \mathbb{R}_+^n$ は集合 $\{\alpha + y;\, y \in \mathbb{R}_+^n\}$ を意味する.

- **Newton 距離** $d(f) := \min\{t \geq 0;\, (t, \ldots, t) \in \Gamma_+(f)\}$.
- **主要面** τ_* : $q_* = (d(f), \ldots, d(f))$ を含む最小の面.
- **Newton 多重度** $m(f)$: τ_* の余次元.

定義より，f の newton 多面体 $\Gamma_+(f)$ は $\mathbb{R}_+^n$ に含まれる凸閉集合であることが分かる.



Definition 5

U は充分小さい原点の近傍，$0 \in Supp(\varphi) \subset U$ とする．このとき，$f \in \hat{\mathcal{E}}(U)$ であるとは，関数 f が次のように書き表せるときを言う.

$$f(x) = \sum_{p \in S} x^p \psi_p(x).$$

但し，S は $\Gamma_+(f) \cap \mathbb{Z}_+^n$ の有限部分集合で，$\Gamma_+(f)$ の頂点全体集合 V を含むものとする．また，$\psi_p \in C^\infty(U)$ で，$p \in V$ に対しては $\psi_p(0) \neq 0$ を満たすことを条件とする.

Example 6

$f(x) := x_1^6 + x_1^2x_2^2 + x_2^6 + x_2^2 \cdot \exp(-1/x_1^2)$ は $\hat{\mathcal{E}}(U)$ に属することが言える．然しその一方で $g(x) := x_2^6 + x_2^2 \cdot \exp(-1/x_1^2)$ は $\hat{\mathcal{E}}(U)$ に属さない．

Definition 7

コンパクトな面 $\gamma \subset \Gamma_+(f)$ に対して，

$$f_\gamma(x) := \sum_{\alpha \in \gamma \cap \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha x^\alpha$$

と定義する．任意のコンパクトな面 γ に対して $\nabla f_\gamma \neq (0, \ldots, 0)$ が $U \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$ 上で成立するとき，関数 f が Newton 多面体に関して**非退化**であると言う．

Theorem 8

関数 $f \in \hat{\mathcal{E}}(U)$ は $f(0) = 0$, $\nabla f(0) = 0$ を見たし，*Newton* 多面体に関して非退化とする．また，$\varphi \in C^\infty(U)$ の台は充分小さい原点の近傍 U に含まれるとする．このとき，

$$L(t;\varphi) \sim \sum_{\alpha,k} C_{\alpha k}(\varphi)\, t^\alpha (\log t)^{k-1}$$

という漸近展開が得られる．但し，α はある負の等差数列に含まれ，また，$k = 1, \ldots, n$. 更に，極限

$$\lim_{t \to \infty} t^{1/d(f)} (\log t)^{-m(f)+1} \cdot |L(t;\varphi)|$$

の存在が言える．

Reference

[1] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, “Singularities of Differentiable Maps II’, Birkhäuser, 1988.

[2] M. Greenblatt, “Resolution of singularities, asymptotic expansions of integrals and related phenomena”, J. Anal. Math. 111 (2010), 221-245.

[3] Joe Kamimoto and Toshihiro Nose, “Toric resolution of singularities in a certain class of C^∞ functions and asymptotic analysis of oscillatory integrals”, arXiv: 1208.3924, 2012.

[4] Akira Kaneko, “Newton diagrams, Singular points and Oscillatory integrals”, Lecture Note at Sophia University, 11 (in Japanese), 1981.

[5] D. H. Phong and E. M. Stein, “The Newtong polyhedron and oscillatory integral operators”, Acta Math. 179 (1997), 105-152.

[6] E. M. Stein, “Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals”, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[7] A. N. Varchenko, “Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals”, Functional Anal. Appl. 10-3 (1976), 175-196.

[8] G. M. Ziegler, “Lectures on Polytopes”, Graduate Texts in Mathmatics, 152. Springer-Verlag, New York, 1995.

パラレルセッション
会場B

ポート制御 Hamilton 系における特異制御について

北海道大学理学院数学専攻修士 2 年　土田旭

導入

ポート制御 Hamilton 系は古典力学における Hamilton 系の一般化であり, 数学的には, 擬 Poisson 多様体上に定義される Hamilton ベクトル場をドリフトにもつアファイン制御系である. またポート制御 Hamilton 系は, ボンドグラフという設計の記法に起源を持ち, 対象の物理系の外界との相互作用を考慮した定式化で, (非線形な) 制御系の良いクラスを定める.

今回の講演では, アファイン制御の観点から, ポート制御 Hamilton 系の特異制御についていくつかの例とともに考察する.

アファイン制御系

M を n 次元可微分多様体とし, U を $\mathbb{R}^r$ の開集合とする.

定義 (アファイン制御系) $_M : M \times U \to M$ を自明なファイバーバンドルとし、 $_{TM} : TM \to M$ を接バンドルとする. 可微分写像 $F : M \times U \to TM$ で、図式

$$\begin{array}{ccc} M \times U & \xrightarrow{F} & TM \\ & {\scriptstyle \pi_M} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \pi_{TM}} & \\ & M & \end{array}$$

を可換にし、次のような形で表されるものを考える:

$$F(x,u) = g_0(x) + \sum_{i=1}^{r} u_i g_i(x).$$

ただし $g_0, \ldots, g_r$ は C^∞ ベクトル場である. $u = (u_1, \cdots, u_r)$ を閉区間 $[0,T]$ から開集合 $U \subset \mathbb{R}^r$ への有界可測写像とするとき, 方程式

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) = g_0(x(t))) + \sum_{i=1}^{r} u_i(t) g_i(x(t)).$$

で表されるものたちをアファイン制御系という. u は制御関数と呼ばれる.

定義 (許容制御) 制御関数 $u \in L^\infty([0,T], U)$ が $x_0 \in M$ と $T > 0$ に対する許容制御であるとは, u を与えて決まる力学系の x_0 を始点とする軌道曲線が, $[0,T]$ で定義され一意に定まるときをいう. 許容制御全体の集合を $\mathcal{U}_{x_0,T}$ であらわす.

事実

許容制御の集合 $\mathcal{U}_{x_0,T}$ は Banach 空間 $L^\infty([0,T], U)$ の開集合になるので, Banach 多様体になる.

許容制御に対しては, 指定の閉区間上で任意の制御に対する力学系の解曲線が定まるので, これを用いて次の定義が可能となる.

定義 (終点写像) アファイン制御系 (Σ) の $x_0 \in M$ と $T > 0$ に対する許容制御に関する終点写像とは, $\mathcal{U}_{x_0,T}$ から M への写像, すなわち,

$$\begin{aligned} E : \mathcal{U}_{x_0,T} &\longrightarrow M \\ u &\longmapsto x(T) \end{aligned}$$

のことである.

終点写像は可微分であり, したがってその微分写像を考える事ができる.

アファイン制御の特異制御

アファイン制御の特異制御を, 終点写像の特異点として定義することができる.

定義 (特異制御) アファイン制御系 (Σ) の特異制御 $u \in \mathcal{U}_{x_0,T}$ とは, 微分写像

$$E_{*u} : T_u\mathcal{U}_{x_0,T} \longrightarrow T_{x(T)}M$$

が全射とならないような u のことである.

この定義と同値な, より扱いやすい命題を与える
. アファイン制御系 (Σ) に対する $T^*M \times U$ 上の Hamilton 関数 H を

$$H(x,p,u) = \langle p, g_0 + \sum_{i=1}^{r} u_i g_i \rangle$$

によって定義する. ただし, $\langle , \rangle$ は $T *_x M$ と T_xM の間の自然な内積を表す.

命題 (特異制御) 次の命題は同値である.

$u(t)$ がアファイン制御系 (Σ) の特異制御である.

$u(t)$ に対して $x(t)$, $p(t)$ が存在して次の拘束 Hamilton 系を満たす：

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t),p(t),u(t)), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),p(t),u(t))$$

かつ

$$p(t) \neq 0, \langle p(t), g_i(x(t)) \rangle = 0, (i = 1, \cdots, r).$$

Poisson 多様体

定義 (擬 Poisson 構造) 有限次元可微分多様体 M 上の擬 Poisson 構造とは, 可微分関数の組から可微分関数への $\mathbb{R}$ 双線形写像

$$\begin{aligned} \{,\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (f,g) &\longmapsto \{f,g\} \end{aligned}$$

で, 次の条件を満たすものとする.

$$\begin{aligned} \{f,g\} &= -\{g,f\} && \text{(歪対称性)}, \\ \{f,gh\} &= \{f,g\}h + g\{f,h\} && \text{(Leibiz 則)}. \end{aligned}$$

定義 (Poisson 構造) 擬 Poisson 構造が, さらに

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0 \quad \text{(Jacobi 恒等式)}$$

を満たすとき, これを Poisson 構造と呼ぶ.

擬 Poisson 構造, Poisson 構造をもつ多様体をそれぞれ擬 Poisson 多様体, Poisson 多様体という. 擬 Poisson 多様体の上には, Hamilton ベクトル場という重要なベクトル場が定義される.

定義 (Hamilton ベクトル場) f を M 上の可微分関数とする. f の定める Hamilton ベクトル場 X_f とは

$$X_f(g) = \{f, g\}$$

で定義されるベクトル場である.

ポート制御 Hamilton 系

擬 Poisson 多様体 M の上には, ポート制御 Hamilton 系を定義することができる：

定義 (ポート制御 Hamilton 系) $g_1, \cdots, g_r$ を M 上のベクトル場とし, f を M 上の可微分関数とする. $g_1, \cdots, g_r$, f に関するポート制御 Hamilton 系（またはポート Hamilton 系）とは

$$\Sigma_p : \begin{cases} \dot{x}(t) & = X_f(x(t)) + \sum_{i=1}^{r} u_i(t) g_i(x(t)) \\ y_j(t) & = g_j(x(t)) f \qquad\qquad (j = 1, \cdots, r) \end{cases}$$

ただし、$u \in \mathcal{U}_{x_0,T}$ である. y_j は系の出力と呼ばれる.

ポート制御 Hamilton 系 Σ_p に対して, エネルギーバランス方程式と呼ばれる次の恒等式が成立する：

$$\frac{df}{dt}(x(t)) = \sum_{i=1}^{r} u_i(t) y_i(t).$$

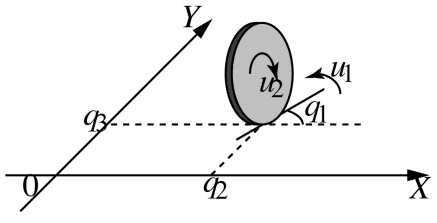
例 (平面上を転がるコイン) 以下の設定を考える：
$x = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2)$ を擬 Poisson 多様体 M の局所座標とし, エネルギー関数 f を $f(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$, ベクトル場を $g_1 = {}^t(0, 0, 0, 1, 0), g_2 = {}^t(0, 0, 0, 0, 1)$ とする.
平面上を転がるコインを表現するポート制御 Hamilton 系は次のようにかける.

$$\begin{pmatrix} \dot{q_1}(t) \\ \dot{q_2}(t) \\ \dot{q_3}(t) \\ \dot{p_1}(t) \\ \dot{p_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin q_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_1}(x(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial q_2}(x(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial q_3}(x(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial p_1}(x(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial p_2}(x(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y_j = p_j \quad (j = 1, 2)$$

ただし, 慣性モーメント, コインの半径, コインの重さはすべて 1 としている.
変数の物理的な意味は以下の通りである.

q_1 : コインの進行方向と X-軸がなす角
(q_2, q_3) : 平面上の点を指定する座標　p_1 : コインのスピンによる角運動量
p_2 : コインが転がる角運動量



the rolling coin

ポート制御 Hamilton 系の特異制御

ポート制御 Hamilton 系の特異制御に対して, 次の命題が成立する.

命題 (T)
$u(t)$ をポート Hamilton 系 Σ_p の特異制御とし, さらに

$$df_{x(t)} = \quad (t)p(t)$$

が特異制御を特徴付ける拘束 Hamilton 系を満たす $p(t)$ について成立すると仮定する. ただし $\quad(t)$ は $[0,T]$ で至る所ゼロとならない関数とする. このとき,

$$\frac{df}{dt}(x(t)) = 0$$

が成り立つ.

特別なポート制御 Hamilton 系について、つぎがわかる.

命題 (T) 次の $\{,\}_\pi, f, g_i$ によって定まるポート制御 Hamilton 系を考える.

$$\{x_i, x_j\}_\pi = C_{ij} : \text{const},$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^2 \, (a_i \in \mathbb{R}),$$
$$g_i = \text{const}.$$

このような $\{,\}_\pi, f, g_i$ によって定まるポート制御 Hamilton 系に対しては, すべての制御が特異制御になるか, または特異制御が存在しないかのどちらかである.

注意 この命題の仮定を満たす Poisson 多様体には, シンプレクティック多様体も含まれている.

参考文献

[1] Arjan van der Schaft "*Port-Hamiltonian systems: an introductory survay*", Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006

[2] Y.Chitour, F.Jean, and E.Trélat *"Singular trajectories of control-affine systems"* SIAM J.Control.Optim. Vol.47, No.2 (2008) 1078-1095

[3] A.Tsuchida *"Singular controls for port-Hamiltonian systems"* Master Thesis, in preparation

平面から平面への写像の特異点の認識問題とその応用

加葉田雄太朗
北海道大学大学院理学院数学専攻

1 Introduction

$\mathbb{R}^2$ 上の可微分関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の特異点 $p \in \mathbb{R}^2$（$df_p = 0$）は、f の Hesse 行列が非退化であればその指数から特異点型（極大、極小、鞍点）が決定される。これは微分積分学の教科書に書いてある基本的な事柄である。では $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への可微分写像の特異点はどうだろうか？ どのような特異点型が存在し（分類問題)、またそれに対してどのような判定法が考えられるだろうか（認識問題）？

本講演ではまず $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への可微分写像の特異点の分類問題と認識問題について説明する。次に認識問題への解答として Saji の判定法と講演者によるその拡張を紹介し、最後に判定法の応用として曲面の中心射影に現れる特異点の分類について説明する。

2 Classification and Recognition

本講演では可微分写像芽 $f : \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ で corank $(df)_0 = 1$ であるもの（以下では、corank1 特異点と呼ぶ）を主な対象とし、これの $\mathcal{A}$-同値による同値類を考える。 なお、二つの可微分写像芽 $f, g : \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ が $\mathcal{A}$-同値とは微分同相写像芽 $\phi, \psi : \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ が存在して $f = \phi \circ g \circ \psi$ が成り立つということである。

同値関係が与えられたとき、分類問題が自然に発生する。分類問題に関しては、$\mathcal{A}_e$-cod≤ 4 となるような corank1 特異点の $\mathcal{A}$-同値類のリストが J. H. Rieger によって与えられている [5]。（なお、$\mathcal{A}_e$-cod$\leq r$ の写像芽とは写像族 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^2$ に一般的に現れる $\mathcal{A}$-特異点を意味する。）このように分類問題に解答が与えられたならば、認識問題が次に考えるべき問題として自然に挙がるだろう。つまり、（認識問題とは、T. Gaffny の言葉を借りれば)、「与えられた写像芽がリストのうちのいずれの同値類に属するかを決定す

る判定法を与えよ」[2] という問題である。通常、与えられた写像芽がどの同値類に属するかを決定するには、テイラー展開の低次の項から順に具体的な座標変換を見つけて整理していく、という過程を踏まなければいけない。しかしこの過程は非常に煩雑であり、応用する上での見通しも良いとは言えない。これは非専門家には特異点理論の利用が困難であるということをも意味する。さらには、Rieger の分類は代数的な手法に基づいているので、Rieger のリストとその証明からは各同値類の幾何科学的な意味も見いだし難い。次節ではこれらの問題点を解決するような認識問題への解答として、K. Saji による $\mathcal{A}_e$-cod≤ 1 の corank1 特異点の判定法と、講演者によるその一般化（$\mathcal{A}_e$-cod≤ 4 までの拡張）を紹介する。

3 Saji's criteria and its generalization

Saji の判定法は、以下で定義される λ*(discriminant function)* と η*(null vector filed)* という幾何学的に意味ある記号によって記述される。λ は $\lambda(x,y) := \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}$ $(f=(f_1,f_2))$ として、η は f の特異点集合（$\lambda=0$）上で df の kernel を張るようなベクトル場として、それぞれ定義する。

例えば、swallowtail と呼ばれる corank1 特異点（標準形は $(x,xy+y^4)$ と書かれる）の同値類は次で特徴付けられる [6]。

$$f\sim_{\mathcal{A}}(x,xy+y^4)\Longleftrightarrow d\lambda(0)\neq 0,\ \ \eta\lambda(0)=\eta^2\lambda(0)=0,\ \ \eta^3\lambda(0)\neq 0$$

これは swallowtail の 座標変換で不変になるような幾何学的な特徴付け である。かつ、ここでは認識問題が単純に「関数 λ を微分せよ」という問題に帰着されている。その点でこの特徴付けは 非専門家にも利用しやすいユーザーフレンドリーな判定法 であると言えよう。Saji はこのような形で残りの $\mathcal{A}_e$-cod≤ 1 の corank1 特異点にも特徴付けを与えている。（ただし $\mathcal{A}_e$-cod$=0$ の corank1 特異点の特徴付けは H. Whitney の結果である。）では、Rieger のリストにおける他の corank1 特異点（$2\leq \mathcal{A}_e$-cod≤ 4）はどのように特徴付けられるであろうか？ 講演者はこれらに対して特徴付けを与え、Saji の判定法を拡張した。

ここでは次の Butterfly と呼ばれる corank1 特異点、およびその退化系（標準形はそれぞれ $(x,xy+y^5\pm y^7)$、$(x,xy+y^5)$ と書かれる）の特徴付けを例として見てみよう。

1. $j^5f(0) \sim_{\mathcal{A}^5} (x, xy+y^5) \Longleftrightarrow d\lambda(0) \neq 0,\ \ \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0,\ \ \eta^4\lambda(0) \neq 0.$
2. さらに上の条件があるとき $f = (x, xy+y^5 + \sum_{i+j\geq 6} a_{ij}x^iy^j)$ と表すことができ、
$\alpha_f := a_{07} - \frac{5}{8}a_{06}^2 \neq 0 \Longleftrightarrow f \sim_{\mathcal{A}} (x, xy+y^5 \pm y^7),\quad \alpha_f = 0 \Longleftrightarrow f \sim_{\mathcal{A}} (x, xy+y^5)$

上の 1. では、座標変換によって f の原点での 5-ジェット $j^5f(0)$（5 次までのテイラー展開）が $(x, xy+y^5)$ となることに対して、Saji のように座標変換で不変になるような幾何学的な特徴付けを η と λ を用いて与えている。しかしながらこれだけでは butterfly$(x, xy+y^5 \pm y^7)$ とその退化系 $(x, xy+y^5)$ を区別することはできない。我々は 2. で見たように具体的に座標をとった時のテイラー展開の係数で書かれる判定式を必要とするのである。他の corank1 特異点（$2 \leq \mathcal{A}_e$-cod≤ 4）も同様に、

1. η と λ によってジェットが特徴付けられ、
2. テイラー展開の係数によって各特異点が決定する

という形で記述される。

4 Application to central projection of the surface

最後に我々の判定法の応用として、曲面の中心射影に現れる特異点の分類を紹介する。$\pi_p : \mathbb{R}^3 - \{p\} \to \mathbb{R}P^2$ を、x を $x-p$ で生成される直線に対応させるような写像とした時、$\mathbb{R}^3$ 内の曲面 M の点 $p(\in \mathbb{R}^3 - M)$ からの中心射影 φ_p は $\varphi_p := \pi_p|_M : M \to \mathbb{R}P^2$ と定義される。この写像では Rieger のリストにおける $\mathcal{A}_e$-cod≤ 3 の corank1 特異点が一般的に現れるであろうとすぐに予想がつく。しかし、実際には $\mathcal{A}_e$-cod$= 3$ の特異点のうちの 3 つが一般的には現れない ことが Arnold と Platonova の分類によって示されている [1]。彼らは Rieger とは異なる立場で曲面の中心射影に現れる特異点の分類を行っているため、Rieger のリストと曲面の中心射影に一般に現れる特異点との関係は明らかではない。講演者は前節の Saji 及び講演者による判定法を用いて、Rieger の分類の立場から Arnold と Platonova による結果の再証明を与えた。その過程で、判定法の $\eta^k\lambda(0)$ という量と α_f のように書ける量との違い で、特異点が中心射影に一般に現れるかどうかが決定することを確かめた。

さらに同様の手法で、1-パラメーター曲面族の中心射影に一般に現れる特異点の分類も行い、Arnold と Platonova の結果の一般化を与えた。

参考文献

[1] V. I. Arnold, Singularities of caustics and wavefronts, Kluwer Acad. Publ. (1991).

[2] T. Gaffney, The structure of $T\mathcal{A}(f)$, classification and an application to differential geometry, In singularities, Part I, Proc. Sympos. in Pure Math. 40 (1983), Amer. Math. Soc., 409-427.

[3] Y. Kabata, An elementary characterization of $\mathcal{A}$-classification of plane-to-plane map- germs, master thesis, Hokkaido University (2014).

[4] 西村尚史：特異点とマザー理論、特異点の数理、第 2 巻『特異点と分岐』第 I 部、共立出版 (2002)

[5] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane. J. London Math. Soc. (2) 36 (1987), no. 2, 351-369.

[6] K. Saji, Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications. Hiroshima Math. J. 40, 229-239 (2010).

枠付き曲線について

本多 俊一（室蘭工業大学大学院 数理システム工学専攻）

1　序論

ユークリッド空間内の曲線に動標構を付随させ，枠付き曲線と呼ぶ．このとき，曲線に対して正則性は仮定しない ([2])．枠付き曲線は一般次元の独立性を持つ正則曲線の拡張であるとともに，単位接束上のルジャンドル曲線の拡張である．考える写像は滑らか（C^∞級）とする．

2　枠付き曲線の存在と一意性

I を区間または $\mathbb{R}$ とし，$n \geq 2$ を自然数とする．また，Δ_{n-1} を次のように定める：

$$\Delta_{n-1} = \{\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, ..., \nu_{n-1}) \in S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1} \mid \nu_i \cdot \nu_j = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, ...n-1\}.$$

滑らかな写像 $(\gamma, \boldsymbol{\nu}) : I \to \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$ が任意の $t \in I$ に対して，$\dot{\gamma}(t) \cdot \nu_i(t) = 0$ $(i = 1, ..., n-1)$ を満たすとき，$(\gamma, \boldsymbol{\nu})$ を**枠付き曲線**と呼ぶ．特に，誤解がない場合には γ も枠付き曲線と呼ぶ．枠付き曲線 $(\gamma, \boldsymbol{\nu}) : I \to \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$ に対して，

$$\boldsymbol{\mu} : I \to S^{n-1},\ t \mapsto \boldsymbol{\mu}(t) = \nu_1(t) \times \cdots \times \nu_{n-1}(t) := \sum_{i=1}^{n} \det(\nu_1(t), ..., \nu_{n-1}(t), e_i) e_i$$

を考える．ただし，$e_1, ..., e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底である．このとき，$\{\boldsymbol{\nu}(t), \boldsymbol{\mu}(t)\} \in \Delta_n$ を枠付き曲線 $\gamma(t)$ の**動標構**という．動標構を用いて枠付き曲線の曲率を考える：

定義-命題 1（枠付き曲線の曲率）

枠付き曲線 $(\gamma, \boldsymbol{\nu}) : I \to \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$ に対して，滑らかな関数を成分とする n 次交代行列 $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathfrak{o}(n)$ 及び $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ が存在し，以下を満たす：

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\nu}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{pmatrix},$$

$$\dot{\gamma}(t) = \alpha(t) \boldsymbol{\mu}(t).$$

$(a_{ij}(t), \alpha(t))$ を枠付き曲線 $(\gamma, \boldsymbol{\nu})$ の**曲率**と呼ぶ．

「枠付き曲線である」という性質は，曲線のパラメータの取り方に依存しない．ただし，「枠付き曲線の曲率」は，パラメータの取り方に依存することに注意しなければならない．

枠付き曲線の幾何的性質を考える為，枠付き曲線の合同を定義する．2 つの枠付き曲線

$(\gamma,\boldsymbol{\nu}),\ (\widetilde{\gamma},\widetilde{\boldsymbol{\nu}}) : I \to \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$ に対して，$X \in SO(n)$ 及び $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在して，

$$\widetilde{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) + \boldsymbol{x}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\nu}}(t) = X(\boldsymbol{\nu}(t))$$

を満たすとき，2 つの枠付き曲線 $(\gamma,\boldsymbol{\nu})$ と $(\widetilde{\gamma},\widetilde{\boldsymbol{\nu}})$ は**合同である**と言う．

枠付き曲線は次の性質を持つ：

定理 2（枠付き曲線の存在）[5]

$(a_{ij},\alpha) : I \to \mathfrak{o}(n) \times \mathbb{R}$ を滑らかな写像とする．このとき，枠付き曲線 $(\gamma,\boldsymbol{\nu}) : I \to \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$ で，(a_{ij},α) を枠付き曲線の曲率とするものが存在する．

定理 3（枠付き曲線の一意性）[5]

2 つの枠付き曲線 $(\gamma,\boldsymbol{\nu}),\ (\widetilde{\gamma},\widetilde{\boldsymbol{\nu}}) : I \to \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$ に対して，これらの曲率が一致するとする．このとき，2 つの枠付き曲線 $(\gamma,\boldsymbol{\nu})$ と $(\widetilde{\gamma},\widetilde{\boldsymbol{\nu}})$ は合同である．

特に，2 つの枠付き曲線が合同な場合，それらの曲率は一致する．つまり，合同の差を除き，枠付き曲線の幾何的性質を曲率が定めている事が分かる．

3 $\mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ 上の枠付き曲線

$\mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ 上の枠付き曲線について，その性質を考える．$(\gamma,\nu_1,\nu_2) : I \to \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ を枠付き曲線とし，$\boldsymbol{\mu}(t) = \nu_1(t) \times \nu_2(t)$ とする．このとき，次の関係式が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}_1(t) \\ \dot{\nu}_2(t) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) & m(t) \\ -\ell(t) & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{pmatrix},$$

$$\dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\boldsymbol{\mu}(t).$$

ただし，$\ell(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \nu_2(t),\ m(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t),\ n(t) = \dot{\nu}_2(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t), \alpha(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t)$ は $(\gamma(t),\nu_1(t),\nu_2(t))$ の曲率である．以下，$\mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ 上の枠付き曲線を考えるとき，曲率の記号として $(\ell(t),m(t),n(t),\alpha(t))$ を用いる．

- **正則曲線との関係**

  正則曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ に対して，$\dot{\gamma}(t)$ と $\ddot{\gamma}(t)$ が線形独立であるとする．このとき，フレネ標構

  $$\mathbf{e}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}, \quad \mathbf{n}(t) = \frac{(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \times \dot{\gamma}(t)}{|(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \times \dot{\gamma}(t)|}, \quad \mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}$$

  に対して，曲率 $\kappa(t)$ 及び捩率 $\tau(t)$ は

  $$\kappa(t) = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t),\ddot{\gamma}(t),\dddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2}$$

  で与えられ，以下を満たす ([4])：

  $$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}(t) \\ \dot{\mathbf{n}}(t) \\ \dot{\mathbf{b}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & |\dot{\gamma}(t)|\kappa(t) & 0 \\ -|\dot{\gamma}(t)|\kappa(t) & 0 & |\dot{\gamma}(t)|\tau(t) \\ 0 & -|\dot{\gamma}(t)|\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{pmatrix}.$$

$\nu_1(t)=\mathbf{n}(t)$, $\nu_2(t)=\mathbf{b}(t)$ とする．このとき，$(\gamma,\boldsymbol{\nu}):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta_2$ は枠付き曲線になる．よって，フレネ標構を持つ正則曲線は枠付き曲線である．また，正則曲線の曲率 $\kappa(t)$，捩率 $\tau(t)$ と枠付き曲線の曲率 $(\ell(t),m(t),n(t),\alpha(t))$ は以下の関係式を満たす：

$$\kappa(t)=\frac{\sqrt{m^2(t)+n^2(t)}}{|\alpha(t)|},\quad \tau(t)=\frac{m(t)\dot{n}(t)-\dot{m}(t)n(t)+(m^2(t)+n^2(t))\ell(t)}{\alpha(t)(m^2(t)+n^2(t))}.$$

- **適応動標構**

  $(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta_2$ を枠付き曲線とし，曲率を $(\ell(t),m(t),n(t),\alpha(t))$ とする．枠付き曲線の性質上，法平面内での (ν_1,ν_2) に対する回転を考える事が出来る．この回転によって「枠付き曲線である」という性質は保たれる．実際，滑らかな関数 $\theta(t)$ によって，$\widetilde{\nu_1}(t),\widetilde{\nu_2}(t)$ を次で定義する：

  $$\begin{pmatrix}\widetilde{\nu_1}(t)\\ \widetilde{\nu_2}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta(t) & -\sin\theta(t)\\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1(t)\\ \nu_2(t)\end{pmatrix}.$$

  このとき $(\gamma,\widetilde{\nu_1},\widetilde{\nu_2}):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta_2$ は枠付き曲線になり，$\widetilde{\nu_1}(t)\times\widetilde{\nu_2}(t)=\boldsymbol{\mu}(t)$ となる．特に，$\dot{\theta}(t)=\ell(t)$ を満たす $\theta(t)$ をとると，

  $$\begin{pmatrix}\widetilde{m}(t)\\ \widetilde{n}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta(t) & -\sin\theta(t)\\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m(t)\\ n(t)\end{pmatrix}$$

  で与えられる $\widetilde{m}(t)$，$\widetilde{n}(t)$ に対して次が成り立つ：

  $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\widetilde{\nu_1}(t)\\ \widetilde{\nu_2}(t)\\ \boldsymbol{\mu}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \widetilde{m}(t)\\ 0 & 0 & \widetilde{n}(t)\\ -\widetilde{m}(t) & -\widetilde{n}(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\nu_1}(t)\\ \widetilde{\nu_2}(t)\\ \boldsymbol{\mu}(t)\end{pmatrix}.$$

  $\{\widetilde{\nu_1}(t),\widetilde{\nu_2}(t),\boldsymbol{\mu}(t)\}$ を枠付き曲線 $\gamma(t)$ の**適応動標構**と呼ぶ ([1])．

$n=2$ の枠付き曲線は [3] におけるルジャンドル曲線と対応する．ここでのルジャンドル曲線とは，写像 $(\gamma,\nu):I\to\mathbb{R}^2\times S^1, t\mapsto(\gamma(t),\nu(t))$ に対して，$\dot{\gamma}(t)\cdot\nu(t)=0$ $(^\forall t\in I)$ を満たすものをいう．一方，(γ,ν) がルジャンドル曲線であるような $\nu:I\to S^1$ が存在するとき，γ を**フロンタル**と呼ぶ．

枠付き曲線の平面への射影とルジャンドル曲線は以下の関係を持つ：

- **枠付き曲線の平面への射影**

  $(\gamma,\nu_1,\nu_2):I\to\mathbb{R}^3\times\Delta_2$ を枠付き曲線とする．$t_0\in I$ を 1 つ固定して，$\nu_1(t_0)$ 方向，$\nu_2(t_0)$ 方向，$\boldsymbol{\mu}(t_0)$ 方向への射影，つまり $(\nu_2(t_0),\boldsymbol{\mu}(t_0))$，$(\nu_1(t_0),\boldsymbol{\mu}(t_0))$，$(\nu_1(t_0),\nu_2(t_0))$ 平面への射影を考える．このとき，これらの射影は局所的に以下の性質を持つ：

  1. $\gamma_{\nu_1}:(I,t_0)\to\mathbb{R}^2, t\mapsto(\gamma(t)\cdot\nu_2(t_0),\gamma(t)\cdot\boldsymbol{\mu}(t_0))$ はフロンタルになる．
  2. $\gamma_{\nu_2}:(I,t_0)\to\mathbb{R}^2, t\mapsto(\gamma(t)\cdot\nu_1(t_0),\gamma(t)\cdot\boldsymbol{\mu}(t_0))$ はフロンタルになる．
  3. $\gamma_{\mu}\ :(I,t_0)\to\mathbb{R}^2, t\mapsto(\gamma(t)\cdot\nu_1(t_0),\gamma(t)\cdot\nu_2(t_0))$ はフロンタルとは限らない．

  また，$\boldsymbol{v_3}\in S^2\setminus\{\pm\boldsymbol{\mu}(I)\}$ となる正の向きの正規直交基底 $\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_3}\}$ を考える．このとき，(γ,ν_1,ν_2) の $(\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2})$ 平面への射影 $\gamma_{\boldsymbol{v}}:I\to(\gamma(t)\cdot\boldsymbol{v_1},\gamma(t)\cdot\boldsymbol{v_2})$ は大域的にフロンタルである．

- 例

  枠付き曲線の例を紹介する．性質や射影等は講演で紹介する．

  1. 自然数 n_1, n_2, n_3 に対して，$\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を次で定義する：

  $$\gamma_1(t) = \left(\frac{1}{n_1} t^{n_1}, \frac{1}{n_2} t^{n_2}, \frac{1}{n_3} t^{n_3} \right).$$

  このとき，$\gamma_1(t)$ は枠付き曲線である（図 1 ：図は $n_1 = 2$，$n_2 = 3$，$n_3 = 4$ に対応する）．

  2. 3 次元空間における，アステロイド $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ を次で定義する：

  $$\gamma_2(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t).$$

  このとき，$\gamma_2(t)$ は枠付き曲線である（図 2 ）．

  3. $\gamma_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を次で定義する：

  $$\gamma_3(t) = \begin{cases} \left(t, 0, e^{-1/t^2}\right) & \text{if } t > 0, \\ (0, 0, 0) & \text{if } t = 0, \\ \left(t, e^{-1/t^2}, 0\right) & \text{if } t < 0. \end{cases}$$

  γ_3 は滑らかで正則な曲線であるが，原点においてフレネ標構を持たない．しかし，γ_3 は枠付き曲線である（図 3 ）．

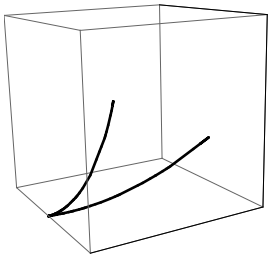


図 1　γ_1 の図

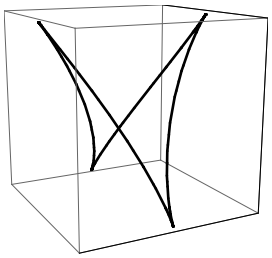


図 2　γ_2 の図

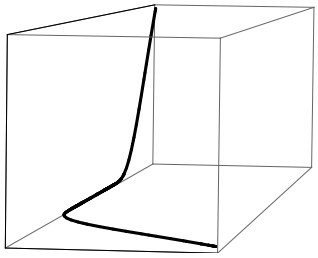


図 3　γ_3 の図

参考文献

[1] R. L. Bishop, There is more than one way to frame a curve. *Amer. Math. Monthly,* **82** (1975), 246-251.

[2] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *Curves and singularities. A geometrical introduction to singularity theory. Second edition.* Cambridge University Press, Cambridge (1992).

[3] T. Fukunaga and M. Takahashi, Existence and uniqueness for Legendre curves. *J. Geometry,* **104** (2013), 297-307.

[4] A. Gray, E. Abbena, and S. Salamon, *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica. Third edition.* Studies in Advanced Mathematics. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, (2006).

[5] S. Honda and M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space. *Preprint.*

Coxeter 群の無限遠境界と極限集合

嶺山 良介*（大阪大学大学院理学研究科）

1 Cannon-Thurston 写像

Coxeter 群の出自は実ベクトル空間上の鏡映変換のなす群の抽象化である. 鏡映変換群は幾何学の多くの分野で決定的な役割を担っており, その抽象化は組み合せ的, 代数的な考察を可能にする. これは Coxeter の示した鏡映変換群が非常に良い組み合せ的な性質を持つという事実による. その背景から Coxeter 群自身, 組み合せ的, 代数的な見方から多くの研究が為されている. 一方で一般に有限生成群は群そのものを幾何学的対象と見なすことによって群の構造を研究することができる. この見地からは群の無限遠境界という, ある種の力学系的な対象が大きな役割を果たす. この研究は Coxeter 群の自然な鏡映変換としての作用を用いて力学系的な考察を行い, 群の代数的な構造を明らかにすることを目的としている. その第一歩として無限遠境界と作用する空間における群に付随する力学系的対象である極限集合との関係を調べることが必要である. 具体的には群の Gromov 境界から極限集合への Cannon-Thurston 写像と呼ばれる写像の存在を示す. Cannon-Thurston 写像は Cannon, Thurston [2] による次の定理を動機にして考えられる, 同変な連続写像である. ここで “同変写像” とは次のような写像である: 群 G, H が二つの集合 X, Y にそれぞれ作用しているとする. このとき写像 $F : X \longrightarrow Y$ が同変であるとは準同型 $\psi : G \longrightarrow H$ が存在して

$$\psi(g) \circ F(x) = F \circ g(x) \qquad (\forall (g, x) \in G \times X)$$

が成り立つときをいう.

定理 1 (Cannon-Thurston)**.** 三次元多様体 M が種数 2 以上の閉曲面 S をファイバーとする S^1 上のファイバー空間であったとする. このとき S から M への自然な包含写像はそれぞれの普遍被覆空間 $\widetilde{S}, \widetilde{M}$ の境界 $\partial\widetilde{S}, \partial\widetilde{M}$ の間の同変連続写像を誘導する.

特に M, S の基本群の間に誘導する準同型は, それぞれの Gromov 境界の間の同変連続写像に拡張する. 彼らはさらに（ある条件の下）双曲多様体の場合においても考察し, この定理の系として対応する Klein 群の極限集合が局所連結であることを示した. Klein 群や双曲群, 相対双曲群において Cannon-Thuston 写像の存在問題はそれ自体が興味深いものでありすでに多くの研究が為されている（[9]）. 特に双曲群 G の部分双曲群 H に対してそれぞれの Gromov 境界を $\partial_G G, \partial_G H$ と表したとき H から G への自然な包含写像 $H \hookrightarrow G$ が（同変）連続写像 $H \cup \partial_G H \to G \cup \partial_G G$ に拡張するかという Mitra による問題（[8]）が争点である. 実際これは一般にいつでも可能であるというわけではない（[1, 5]）. 従って問題はどのような群に対して可能であるかということであり, 特に Coxeter 群に対して可能であるかという疑問は自然である. ここではある種の双曲性をもつ Coxeter 群 W に対して, それが離散的に作用する双曲空間を構成し, 上で述べた問題を考察する.

* e-mail: r-mineyama@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

2 Coxeter 群と鏡映変換

有限表示群 W が Coxeter 群であるとは, W がある生成系 $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ によって次のように表示されるときをいうのであった.

$$W = \langle\, S \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} \,\rangle.$$

ただしここで $m_{ii} = 1$ かつ $m_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \infty$ であって, $(s_i s_j)^{\infty}$ は $s_i s_j$ が位数無限であることを意味する. このとき (W, S) を Coxeter 系といい, S の位数 n を Coxeter 群のランクという. さて, V を n 次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間で $\Delta = \{\alpha_s | s \in S\}$ を基底として持つものとする. Δ は S に対応して添字づけられたベクトルの集合であるがこれを単純系と呼ぶ. V 上の対称二次形式 B を

$$B(\alpha_i, \alpha_j) \begin{cases} = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) & \text{if } m_{ij} < \infty, \\ \leq -1 & \text{if } m_{ij} = \infty \end{cases}$$

として定義すると W は V 上に以下の B-鏡映で作用する: $\alpha \in \Delta$ に関する B-鏡映とは

$$s_\alpha(v) = v - 2B(\alpha, v)\alpha, \quad v \in V,$$

で定まる線形変換 $s_\alpha : V \to V$ である. B-鏡映は V 上の作用を定める. すなわち, 対応 $S \ni s \mapsto s_{\alpha_s} \in O_B(V)$ は単射準同型を定める. ただし $O_B(V)$ は二次形式 B に関する直交変換群 $\{f : V \to V \mid B(f(u), f(v)) = B(u, v)\}$ を表す. ここで Δ の部分集合 Δ' に対しても同様にして二次形式 B' を定めることができることに注意しておく.

さて付随する二次形式 B に対して次を仮定する.

仮定 1. 二次形式 B の符号数を $(n-1, 1)$ であると仮定する.

この仮定の下, B-鏡映による W の作用の漸近的な挙動は（適当な平面への射影することによって）B に応じて定まる有界領域 D 上で観察できることがわかる. D は次のようにして定義される集合である. B の符号数が $(n-1, 1)$ であることから, 集合

$$Q_- := \{v \in V \mid B(v, v) < 0\}$$

は V 上の錐の内部を表す. B-鏡映は B を不変にするからこの作用は Q_- を不変にする. 今 Δ は V の基底であるからベクトル $v \in V$ は Δ の元の線形和で表すことが出来る. ここでノルムのような振る舞いをする関数 $|v|_1$ を v の Δ に関する係数の和として定義する. D は Q_- の $|*|_1$ に関する射影として定義する. これは一般に楕円体の内部である. B-鏡映と射影との合成は D を不変するのでこれは D 上の作用である. これを W の D 上の作用を正規化された B-鏡映と呼ぶことにする. 今, D 上には Hilbert 距離と呼ばれる, 非調和比によって定まる距離を定義することができこの距離に関して CAT(0) かつ Gromov 双曲空間である. すると正規化された B-鏡映は Hilbert 距離を備えた D 上に離散的な等長変換としての作用であることがわかる. ここから W の極限集合 $\Lambda(W)$ を D 上任意に固定した基点 o の W-軌道の集積点集合として定めることができる. 極限集合上には V 上の Euclid 距離による相対位相が定まっているとする.

一般に Gromov 境界は Gromov 双曲空間に対してのみ定義される. これは定義に現れる二項関係が一般には推移律を充たさないからであるが, この定義を transitive closure を用いて少し拡張することにより任意の距離空間に対して定義できることを注意しておく. このように定義した Gromov 境界に対しても位相を適切に定義できるが, 底空間が双曲的である場合とは少し違って単なる擬距離空間である.

3 主結果

作用がココンパクトな場合, 群 W は D と擬等長同型であってその Gromov 境界は D の Gromov 境界と位相同型になることが知られている. 従って D の Gromov 境界と D の Euclid の意味での境界とを比べれば求める写像を得られることがわかる.

定理 2. *W をランク n の Coxeter 群とし, 付随する二次形式 B は符号数 $(n-1,1)$ であるとする. $\partial_G W$ を W の Gromov 境界として $\Lambda(W)$ を W の極限集合とする. W-同変かつ連続な全射 $F : \partial_G W \longrightarrow \Lambda(W)$ が存在する. 特に作用が（凸）ココンパクトな場合, 写像 F は位相同型である.*

作用する空間が射影で定義される空間であることから次のような観察ができる. (W, S) の Coxeter 部分群 W' で S の部分集合 S' によって生成されるものを考える. Δ', B' を Coxeter 系 (W', S') に対してそれぞれ上の方法で定まる V' の基底, 二次形式とする. このとき V' は V の部分空間であって, B' を用いて定義される W' が正規化された B-鏡映で作用する空間 D' は W の作用する空間 D を Δ' を通る超平面で切断したものとして現れる. この事実と上の主結果の二番目の主張を用いるとすぐに次がわかる.

定理 3. *W をランク n の Coxeter 群とし, 付随する二次形式 B は符号数 $(n-1,1)$ であるとする. $\partial_G W$ を W の Gromov 境界として $\Lambda(W)$ を W の極限集合とする. S の部分集合 S' で生成される部分 Coxeter 群 W' に対してその D' への作用が（凸）ココンパクトであるとき, 単射連続な W'-同変写像 $\partial_G W' \longrightarrow \partial_G W$ が存在する.*

ここまでは D の内部への作用を調べた. 次に D の外部への作用を考える. 一般に Δ の B-鏡映による軌道はルート系と呼ばれ Coxeter 群の研究において重要な対象である. ルート系の元をルートと呼ぶ. ルート系が無限集合であることと群が無限群であることは同値である. ルート系は V 内のあるコンパクト集合上に分布しており, その集積点集合は ∂D 上に現れることが知られている. このルート系の集積点集合と正規化された B 鏡映による W の極限集合との関係について次がわかる.

定理 4. *E を Δ の W-軌道（ルート系）の集積点集合とする. このとき $\Lambda(W) = E$ である.*

参考文献

[1] O. Baker and T. R. Riley, *Cannon-Thurston maps do not always exist*, Forum of Mathematics, Sigma, Volume 1, 2013, e3.
[2] J. W. Cannon, and W. P. Thurston, *Group invariant Peano curves*, Geom. Topol., 11:1315:-1355, 2007.
[3] M. Dyer, C. Hohlweg, and V. Ripoll, *Imaginary cones and limit roots of infinite Coxeter groups* Preprint arXiv:1303.6710.
[4] C. Hohlweg, J-P. Labbé, and V. Ripoll, *Asymptotical behaviour of roots of infinite Coxeter groups* Preprint arXiv:1112.5415.
[5] Y. Matsuda and S. Oguni, *On Cannon-Thurston maps for relatively hyperbolic groups*, arXiv:1206.5868,2012
[6] R. Mineyama, *Cannon-Thurston maps for Coxeter groups with signature* $(n-1,1)$, submitted.
[7] R. Mineyama, *Cannon-Thurston maps for Coxeter groups with affine reflection subgroups*, submitted.
[8] M. Mitra, *Cannon-Thurston Maps for Hyperbolic Group Extensions*, Topology **37**, 527-538, 1998.
[9] M. Mj *Cannon-Thurston maps for surface groups*, Annals of Math. Pages 1-80 from Volume 179 (2014), Issue 1.

GROUP ACTIONS ON A NON-TYPE I C -ALGEBRA

北海道大学大学院理学院数学専攻　野口朗

定義 1. 集合 A に４つの演算

$$\begin{aligned} A \quad & A \ni (x,y) \mapsto x+y \in A \\ \mathbb{C} \quad & A \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in A \\ A \quad & A \ni (x,y) \mapsto xy \in A \\ & A \ni x \mapsto x^* \in A \end{aligned}$$

および C -ノルム、すなわちベクトル空間上のノルム $\|\ \|$ で $x, y \in A$ に対し

$$\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$$
$$\|x^*x\| = \|x\|^2$$

となるものが備わっている時、A は C **-環**であるという。C -環は全て、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素全体 $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ の部分環に同型である。

特に、$\mathbf{B}(\mathcal{H})$ の単位元を含み、$\mathbf{B}(\mathcal{H})$ の弱作用素位相（任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対し $\mathbf{B}(\mathcal{H}) \ni T \mapsto \langle T\xi, \eta\rangle \in \mathbb{C}$ が連続となる最小の位相）で閉である部分環を **von Neumann 環**という。

例 2. (C -環の例)

(1) **行列環**

自然数 n に対し、複素数を成分とする $n \quad n$ 行列を全て集めたもの $M_n(\mathbb{C})$ は、通常の演算およびノルム

$$\|a\| := \sup_{\xi \in \mathbb{C}^n, \|\xi\|=1} \|a\xi\|, \qquad a \in M_n(\mathbb{C})$$

により C -環となる（**全行列環**）。任意の有限次元 C -環は全行列環の直和で表せる。

(2) **関数環**

局所コンパクト空間 X に対し、

$C_0(X) := \{f : X \to \mathbb{C} : \text{連続}\ |\forall\ > 0, \exists K \quad X : \text{コンパクト}$
$\text{s.t.}\ |f(x)| < \quad (\forall x \in X \backslash K)\}$

は、ノルム $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ により C -環となる。任意の可換 C -環は適当な X に対し $C_0(X)$ の形に表せる。可換 C -環が単位元を持つ場合は、適当なコンパクト空間 X に対し $C(X)$（X 上の複素数値連続関数全体）の形に表せる。

(3) **UHF 環**

$n_1 | n_2 \quad$（n_{i+1} は n_i を割り切る）なる自然数列 $(n_i)_i$ に対し、全行列環の列 $(M_{n_i}(\mathbb{C}))_i$ に埋め込み

$$M_{n_i} \ni x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 & & 0 \\ 0 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & x \end{pmatrix} \in M_{n_{i+1}}.$$

を考えたものの帰納的極限 $D := \varinjlim M_{n_i}(\mathbb{C})$ を **UHF(uniformly hyper nite) 環**という。この時、$D = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} M_{n_i}(\mathbb{C})}^{\|\cdot\|}$ となる。$M_{mn} = M_m \quad M_n$ であるから、UHF 環は全行列環の無限テンソル積の形で $D = \bigotimes_{n=1}^{\infty} M_{k_n}$ と書くこともできる。

(4) **Cuntz 環**

自然数 n に対し、n 個の元 $S_1, S_2, \quad , S_n$ とその関係式

$$S_i\, S_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} S_i S_i \ = 1$$

で生成される普遍 C -環 $\mathcal{O}_n := C\ (S_1, S_2, \quad , S_n)$ を **Cuntz 環**という。$\mathcal{O}_n$ は I 型でない (この場合、$x\mathcal{O}_n x$ が可換となる $x \in \mathcal{O}_n \backslash \{0\}$ を持たない) 単純 C -環である。

定義 3. A を C -環、$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とする。A から $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ への準同型（４つの演算を保存）を A の $\mathcal{H}$ 上の**表現**という。

定義 4. $A \quad \mathbf{B}(\mathcal{H})$ を C -環とする。

(1) $A' := \{x \in \mathbf{B}(\mathcal{H}) | xy = yx \quad (\forall y \in A)\}$ を A の可換子環という。A' は von Neumann 環である。

(2) A を Banach 空間と見た時の第二双対空間 $A \quad$ には自然に von Neumann 環の構造が入る。これを A の**普遍包絡 von Neumann 環**という。A は $A \quad$ の汎弱稠密部分 C -環になる。

定義 5. G を局所コンパクト群、A を C -環とする。G から A の自己同型群への連続な（すなわち $g_i \to g$ in G ならば $\|\alpha_{g_i}(x) \quad \alpha_g(x)\| \to 0$ （$\forall x \in A$）となるような）群準同型 α を G の A 上の**作用**という。

例 6.（群作用の例）

(1) **内部的**な作用

G を局所コンパクト群、A を C -環とする。G から A のユニタリ群（A が単位元を持たない時は A に単位元を付加した C -環 $\tilde{A} = A + \mathbb{C}1$ のユニタリ群を考える）への連続な群準同型 $u.$ がある時、

$$\alpha_g(x) := \mathrm{Ad}\, u_g(x) = u_g x u_g \qquad (g \in G, x \in A)$$

とすると、α は G の A 上の作用となる。作用をこのような形に書ける時、**内部的**であるという。

(2) **積型**の自己同型

$(k_n)_n$ を自然数列とし、$u_n \in M_{k_n}(\mathbb{C})$ をユニタリ行列とする。この時、

$$\mathbb{Z} \ni i \mapsto \gamma^i := \quad {}^{\infty}_{n=1} u_n^i \in \mathrm{Aut}\,(D)$$

は、整数群 $\mathbb{Z}$ の UHF 環 $D = \bigotimes_{n=1}^{\infty} M_{k_n}$ 上の作用である（**積型**の自己同型）。ここで例えば $u_n := \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\ i\theta} \end{matrix}$, $\forall n$ とすると、γ は (1) の形で書き表すことができない（**外部的**な作用）。

(3) Cuntz 環 $\mathcal{O}_2$ の生成元 S_1, S_2 が例 2 の (4) の関係式を満たす時、$\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ に対し、$\lambda S_1, \mu S_2$ もまた同じ関係式を満たす。よって各 $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ に対し、

$$\alpha_{(\lambda,\mu)}(S_1) := \lambda S_1, \quad \alpha_{(\lambda,\mu)}(S_2) := \mu S_2,$$

となる $\mathcal{O}_2$ 上の自己同型が存在する。これにより $\mathbb{T}^2$ の $\mathcal{O}_2$ 上の作用が定まる。

定義 7. G を局所コンパクト可換群、A を $C \quad$ 環、α を G の A 上の作用とする。$\Gamma := \hat{G}$ を G の双対群とする。

(1) $\Lambda \quad \Gamma$ に対し、

$$M^{\alpha}(\Lambda) := \{x \in A | \int_G f(t)\alpha_t(x)dt = 0, \quad \forall f \in L^1(G) \text{ s.t. } \mathrm{supp}\, \hat{f} \quad \Gamma \backslash \Lambda : \text{compact}\}$$

とする。

(2) $M^{\alpha}(\Lambda) = A$ となる最小の閉集合 $\Lambda \quad \Gamma$ を α の **Arveson スペクトル**といい、$\mathrm{sp}(\alpha)$ と書く。$\sigma \in \mathrm{sp}(\alpha)$ は次の条件と同値である：「 > 0 と コンパクト集合 $K \quad G$ に対し、$\|\alpha_t(x) \quad \langle t, \sigma \rangle x\| <$ が任意の $t \in K$ に対して成り立つような $x \in A$ が存在する。」

(3) $\Gamma(\alpha) := \bigcap \mathrm{sp}(\alpha|B)$ （ここで B は A の 0 でない G-不変な遺伝的 C^*-部分環全体を動く）を α の **Connes スペクトル**という。
（G-不変：$\alpha_g(B) = B,\ \forall g \in G$、遺伝的：$x \in B,\ x \geq 0,\ y \in A,\ 0 \leq y \leq x \Rightarrow y \in B$）

定義 8. C^*-環 A の元の族 $(x_{nj})_{n=1,2,\cdots,0\leq j<k_n}$ が各自然数 n に対し

$$\begin{aligned} x_{n0} \geq 0, \qquad & \|x_{nj}\| = 1 \qquad \text{for } 0 \leq j < k_n, \\ x_{ni}x_{nj} = 0 \qquad & \text{for } i \neq j, \\ x_{ni}x_{nj} = 0 \qquad & \text{for } j \neq 0, \\ x_{nj}x_{nj}x_{n0} = x_{n0} \qquad & \text{for } 1 \leq j < k_n, \\ x_{n0}x_{n+1,j} = x_{n+1,j}x_{n0} = x_{n+1,j} \qquad & \text{for } 0 \leq j < k_{n+1} \end{aligned}$$

を満たす時、(x_{nj}) は**擬行列単位系**であるという。さらにこの 5 つの条件に加えて

$$\begin{aligned} x_{nj}x_{nj} = x_{n0} \qquad & \text{for } 1 \leq j < k_n, \\ x_{n+1,0} + \sum_{i=1}^{k_{n+1}-1} x_{n+1,i}x_{n+1,i} = x_{n0} & \end{aligned}$$

をも満たす時、(x_{nj}) は**行列単位系**であるという。(x_{nj}) が行列単位系である時、$C^*(\{x_{nj}|n,j\}) \simeq \bigotimes_{n=1}^{\infty} M_{k_n}(\mathbb{C})$ である。

定理 9 (Glimm, [3])**.** A を I 型でない可分 C^*-環、D を UHF 環とする。この時、A の部分 C^*-環 B と A の（閉）射影 q で、

$$q \in B', \quad qAq = Bq, \quad Bq \simeq D$$

となるものが存在する。

証明では、A の中の擬行列単位系 $(x_{nj})_{n,j}$ で、$(x_{nj}q)_{n,j}$ が行列単位系であるものを見つける。

定義 10. G を局所コンパクト群、A を C^*-環、α を G の A 上の作用、π をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上への A の表現、u を G から $\mathcal{H}$ のユニタリ群への連続な群準同型とする。これらが

$$\pi(\alpha_g(x)) = u_g\pi(x)u_g, \qquad x \in A,\ g \in G$$

を満たす時、$(\pi, u, \mathcal{H})$ は (A, G, α) の**共変表現**であるという。

問題 11. A を I 型でない可分 C^*-環、G を局所コンパクト可換群、α を G の A 上の作用で $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$ なるもの、$D = \bigotimes_{n=1}^{\infty} M_{k_n}(\mathbb{C})$ を UHF 環、$\gamma = \overset{\infty}{\underset{n=1}{}}\mathrm{Ad}\,u_n$ を G の A 上の積型の作用とする。この時、A の部分 C^*-環 B と A の（閉）射影 q で

$$\begin{aligned} &\alpha_g(B) = B, \quad q \in B', \quad \alpha_g\ (q) = q, \\ &qAq = Bq, \quad (Bq, \alpha\ \ |Bq) \simeq (D, \gamma) \end{aligned}$$

（$\forall g \in G$）なるものは存在するか？（最後の同型は $\exists \Phi : D \to Bq$ s.t. $\alpha_g\ |Bq\quad \Phi = \Phi\quad \gamma_g$ （$\forall g \in G$）の意味）
$\Longrightarrow$ 次の場合には肯定的な結果がある。

G：コンパクト	Bratteli-岸本-Robinson, 1987 [1]	
$G = \mathbb{R}$	岸本, 2002	（摂動が必要） [4]
$G = \mathbb{Z}$	N.,2013	（摂動が必要） [5]

定理 12 (N., [5])**.** A を可分で素な（$x, y \in A,\ xAy = \{0\} \Rightarrow x = 0$ or $y = 0$）C^*-環、α を A の自己同型とする。この時、次は同値である：

(1) $\Gamma(\alpha) = \mathbb{T}$

(2) UHF 環 $D = \bigotimes_{n=1}^{\infty} M_{k_n}(\mathbb{C})$、 > 0、D の積型の自己同型 $\gamma =$ $_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ad}\, u_n$ が任意に与えられた時、A の部分 C -環 B、A（単位元を持たない場合は $\tilde{A}$）のユニタリ v、A の（閉）射影 q で

$$\|v \quad 1\| < \ , \quad \alpha^{(v)}(B) = B, \quad (\alpha^{(v)}) \quad (q) = q,$$
$$qAq = Bq, \quad (Bq, (\alpha^{(v)}) \quad |Bq) \simeq (D, \gamma)$$

および「$x \in A,\ xc(q) = 0 \Rightarrow x = 0$」を満たすものが存在する（$c(q)$ は $c(q) \geq q$ となる $A \quad \cap A'$ の最小の射影）。

参考文献

[1] O. Bratteli, A. Kishimoto and D. W. Robinson, *Embedding product type actions into C -dynamical systems*, J. Funct. Anal. **75** (1987), 188-210.

[2] K.R. Davidson, *C -algebras by example*, Field Institute Monographs, Vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence (1996).

[3] J. Glimm, *Type I C -algebras*, Ann. of Math. **73** (1961), 572-612.

[4] A. Kishimoto, *Quasi-product flows on a C -algebra*, Commun. Math. Phys. **229** (2002), 397-413.

[5] A. Noguchi, *Automorphisms of non-type I C -algebra*, Int. J. Math. **24** (2013), No.9.

[6] G. K. Pedersen, *C -algebras and their automorphism groups*, London-San Diego: Academic Press, 1979.

ジップの法則における規模と順位の反比例関係に対する一考察

山本 健（中央大学理工学部）

1　ベキ分布，ランク・サイズルール，およびジップの法則

タイトルにある「ジップの法則」は，ベキ分布とよばれる確率分布の表し方の 1 つである．正値確率変数 Y が y より大きな値をとる確率 $P(Y > y)$ が y のベキ乗の依存性 $P(Y > y) \propto y^{-\beta}$ をもつとき，Y はベキ分布にしたがうという．$P(Y > y)$ を y の関数とみなしたものを Y の累積分布とよぶ．ベキ分布にしたがう確率変数は，平均を大きく上回る「異常値」が正規分布や指数分布に比べて実現されやすいという特徴がある．破片のサイズ，地震の規模，株価変動など身のまわりの様々な統計がベキ分布とよく一致することが知られているが [1]，全データ範囲にわたってきれいにベキ乗関数に乗るというのはきわめてまれである．

ジップの法則（ジップ則）は元々は言語学の統計法則である [2]．文章に含まれる単語を出現回数の多い順に並べたとき，第 1 位の単語の出現回数を基準とすると第 2 位の単語の出現回数はおよそ 1/2, 第 3 位の単語の出現回数はおよそ $1/3, \ldots$ となり，出現回数が順位に反比例するという経験則である．より一般に，規模 s が順位 r のベキ乗に比例する（$s \propto r^{-\alpha}$）という関係はランク・サイズルールとよばれる．狭い意味では，ジップ則はランク・サイズルールで $\alpha = 1$（つまり s が r に反比例）の場合のみを指す．しかし本稿では，ランク・サイズルール全般を広い意味で “ジップ則” とよび，特に $\alpha = 1$ を強調するときには “$\alpha = 1$ のジップ則” と称することとする．$\alpha \approx 1$ のジップ則は単語の出現回数以外の分布でも観察されている: 地震の規模の分布（$\alpha = 1.05$）[3], 科学論文の引用数の分布（$\alpha = 0.92$）[4], 日本の村の人口分布（$\alpha = 0.83$）[5] など．

本研究ではジップの法則をモデル化する確率過程を提案し，その解析を行なう．特に，モデルに含まれる確率変数のもつ対称性の帰結として $\alpha = 1$ のジップ則が導かれることを示す．これにより，ジップ則においてなぜ指数 $\alpha = 1$ が特別なのか 1 つの理論的な根拠が与えられる．

2　モデル

本研究では「累計量」についてモデル化する．例えば，ある科学論文の総引用回数はその論文が出版されてから現在まで各期間（月または年）ごとに引用された回数を累計した量である．一方，ある都市の人口を考えるときには各時点の人口を合計するようなことはないので，人口は累計量ではない．大まかにいえば，累計量は時間の経過とともに減少することのない量である．累計量の時間変化に対するシンプルなモデルとして，次の離散時間の確率過程を考える:

$$x_0 = 1, \quad x_{t+1} = \mu_t x_t, \tag{1a}$$

$$S_0 = 0, \quad S_{t+1} = S_t + x_t. \tag{1b}$$

確率変数 x_t は時刻 t での事象の規模（論文の引用数など）を表し，成長率 μ_t（正値確率変数）との掛け算の形で時間発展すると仮定している．議論の単純化のため μ_t は各時刻 t で独立かつ同一の分布にしたがうものとする．式 (1a) より $x_t = \mu_{t-1} \cdots \mu_0 x_0$ であり，t が大きいとき x_t は対数正規分布にしたがう [6]．確率変数 S_t は各時刻の x_t を時刻 $t-1$ まで累計した量である．実際，式 (1b) を再帰的に用いると $S_t = x_0 + \cdots + x_{t-1}$ が得られる．このモデルを模式的に表したのが図 1 である．x_t の動きを t の関数としてグラフ化すると，S_t は x_t のグラフより下側の面積に相当する．次節以降で，確率変数 S_t に対してジップ則が成り立つことを示す．

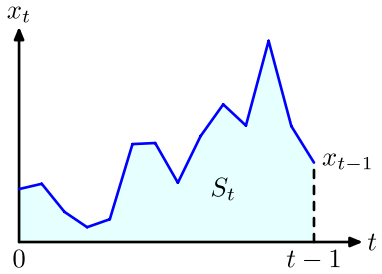


図 1 モデル (1) の模式図．x_t は式 (1a) にしたがって時間変化する．S_t は x_t のグラフと t 軸の間の面積に相当する．

ところで，ジップ則には「サイズを順位づけする」という作業が必要である．しかし，モデル (1) は累計量 S_t を 1 つ計算するだけなので，そのままでは順位を考えることができない．そこで “S_t に対するジップ則” という場合，独立に計算した多数の S_t の値を順位づけしてジップ則を適用するものと解釈する．一方，累積分布 $P(S_t > s)$ は 1 つの確率変数 S_t に付随する自然な概念である．以下では S_t の累積分布を解析の中心に据える．ただし，この定義によるジップ則 $s \propto r^{-\alpha}$ と累積分布 $P(S_t > s) \propto s^{-\beta}$ は（比例定数を除いて）互いに逆関数であって，2 つのベキ指数は $\beta = 1/\alpha$ という関係にある．すなわち，$\alpha = 1$ のジップ則は累積分布で $\beta = 1$ の場合に対応する．本稿では一貫してジップ則のベキ指数には α，累積分布のベキ指数には β を用いて両者を区別する．

解析にさきがけて，数値計算の結果を示す（図 2）．成長率 μ_t を区間 $[0.5, 1.5]$ での一様分布として，$t = 10^3$ および $t = 10^4$ における S_t の累積分布を計算した．異なる時刻の分布がほとんど重なることから，大きな t に対して S_t の分布が定常的である（t によらない）ことが示唆される．分布の裾は指数 -1 のベキ分布になっている．このようなきわめてシンプルな条件であっても $\beta = 1$（つまり $\alpha = 1$）のジップ則が実現していることを強調しておく．

3　モデルの解析

モデル (1) の解析のために，確率過程

$$Z_0 = 1, \quad Z_{t+1} = \tilde{\mu}_t Z_t + 1 \tag{2}$$

を導入する．これは，ケステン過程とよばれる確率過程（の特殊な場合）であり，独立かつ同分布にしたがう乗算ノイズ $\tilde{\mu}_t$ および加算項を含むのが特徴である．ケステン過程の解析 [7] によると，t が大きいとき Z_t の累積分布は定常なベキ的な裾 $P(Z_t > z) \sim z^{-\beta}$ をもち，その指数 β は

$$E(\tilde{\mu}_t^{\beta}) = 1$$

の解として特徴づけられる（E は期待値を表す）．$E(\ln \tilde{\mu}_t) < 0$ ならば解 $\beta > 0$ が一意に存在し，$E(\ln \tilde{\mu}_t) > 0$ ならば $\beta > 0$ なる解は存在しないことが示されている．（自明解 $\beta = 0$ はつねに存在する．）

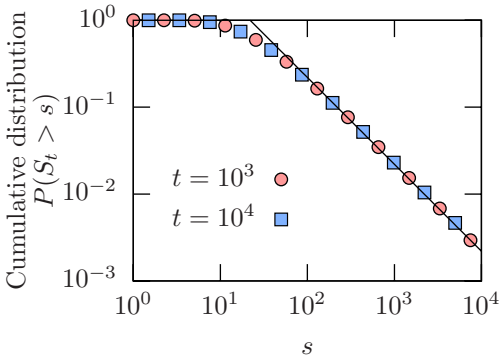


図 2 累積分布 $P(S_t > s)$ の数値計算結果．μ_t は区間 $[0.5, 1.5]$ での一様分布とした．$t = 10^3$（丸）および $t = 10^4$（四角）での分布をプロットしている（点が重ならないように交互に配置）．直線は指数 -1 のベキ関数．

Z_t を利用し，S_t の分布を導出する．$t=0$ から順に S_t および Z_t を書き下していくと，

$$
\begin{aligned}
S_0 &= 0, & Z_0 &= 0,\\
S_1 &= 1, & Z_1 &= 1,\\
S_2 &= 1+\mu_0, & Z_2 &= 1+\tilde{\mu}_1,\\
S_3 &= 1+\mu_0+\mu_0\mu_1, & Z_2 &= 1+\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_1,\\
S_4 &= 1+\mu_0+\mu_0\mu_1+\mu_0\mu_1\mu_2, & Z_4 &= 1+\tilde{\mu}_3+\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_3\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_1,\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
$$

となる．S_t と Z_t の類似性は明らかである．具体的には，Z_t の表式において $\tilde{\mu}_\tau \mapsto \mu_{t-1-\tau}$ $(\tau = 1,\ldots,t-1)$ という変換を行なうと S_t の表式が得られる．$\tilde{\mu}_t$ が独立で μ_t と同一の分布にしたがう場合を考えれば，S_t と Z_t が同じ分布になることが分かる．したがって，ケステン過程 Z_t の分布に関する性質を S_t に適用することができる．

すなわち，t が大きいとき S_t は定常な分布をもち，s が大きいところでベキ的な裾 $P(S_t > s) \sim s^{-\beta}$ をもつ．指数 $\beta(>0)$ は条件

$$E(\mu_t^\beta) = 1 \tag{3}$$

により特徴づけられる．μ_t が確率密度関数 $f(\xi)$ をもつとき，この条件は

$$\int_0^\infty \xi^\beta f(\xi) d\xi = 1$$

とかける．

4　指数の値およびジップの法則

成長率 μ_t と指数 β の関係を簡単に述べる．図 3 は μ_t が区間 $[a,b]$ の一様乱数とし，a,b をパラメータとして β の値を計算した結果である．β の値を濃淡で表し，$\beta = 0.5, 1, 2, 4, 8$ の等高線も表示している．a,b が小さいほど（$E(\mu_t)$ が小さいほど）β は大きくなる傾向がある．a,b が小さいと x_t はほとんど大きくなれず，したがって大きな S_t が生じにくく，累積分布が急速に減衰するためである．逆に，a,b が大きくなると β は小さくなり，正の β が存在しない領域も存在する．ここでは S_t が定常的なベキ分布をもたない．

モデル (1) において成長率 μ_t の期待値が $E(\mu_t) = 1$ であれば，式 (3) の自明でない解の一意性から，S_t の累積分布の指数 $\beta = 1$ がしたがう．逆に，$\beta = 1$ ならば式 (3) より $E(\mu_t) = 1$ が得られる．すなわち，本研究のモデル (1) において $E(\mu_t) = 1$ が $\beta = 1$（つまり $\alpha = 1$）のジップ則の必要十分条件であ

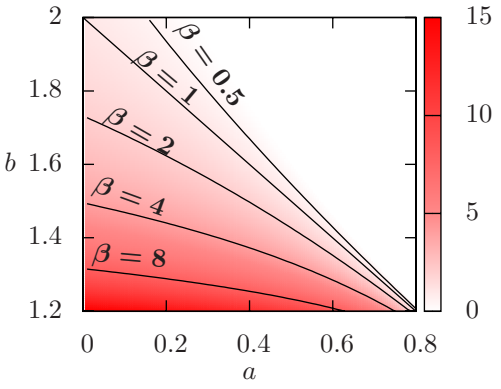


図 3　μ_t が $[a,b]$ の一様乱数である場合の β の分布図．色が濃いほど β が大きい．$\beta = 0.5, 1, 2, 4, 8$ の等高線が描き込んである．図の右上の領域（$\beta = 0$ に相当する）では，S_t は定常なベキ分布をもたない．

る．成長率の期待値が 1 であるということは，x_t の増加と減少が釣り合っていることを意味する．実際，$E(\mu_t) = 1$ のとき x_t の期待値は

$$E(x_t) = E(\mu_{t-1}\mu_{t-2}\cdots\mu_0 x_0) = E(\mu_{t-1})E(\mu_{t-2})\cdots E(\mu_0)x_0 = x_0$$

であり，平均的には x_t が初期値から増加も減少もしないことが分かる．

以上より，確率モデル (1) において x_t の増加と減少に関する対称性 $E(\mu_t) = 1$ から $\alpha = 1$ のジップ則が得られることが分かった．図 2 に示した数値計算では $\beta = 1$ が示唆されたが，これは μ_t が $[0.5, 1.5]$ の一様分布なので $E(\mu_t) = 1$ であることから正当化される．

5 まとめ

本研究では，時間変化する量 x_t およびその累計 S_t に関する確率モデル (1) を提案した．S_t の累積分布は定常的で，ベキ的な裾 $P(S_t > s) \sim s^{-\beta}$ をもつ．指数 β の値は式 (3) で特徴づけられる．x_t の成長率 μ_t が増減について対称性 $E(\mu_t) = 1$ をもてば，S_t は $\beta = 1$ すなわち $\alpha = 1$ のジップ則にしたがうことを示した．

本研究は $\alpha = 1$ が特別である根拠を理論的な視点から説明している．特に，μ_t の分布の詳細によらず期待値に対する条件のみを仮定して $\alpha = 1$ が導かれることは，ジップ則の普遍性を理解するヒントになりうると期待する．本稿のモデルでは成長率 μ_t が独立であることや x_t の時間変化が掛け算的な過程 (1a) で与えられると単純化して解析を行なった．この仮定が現実的といえるのかどうかを，実際の現象と本研究のモデルを比較するなどして調査を進めていきたい．

謝辞　本研究は科研費（若手研究 (B), 課題番号 25870743）の補助を受けたものである．

参考文献

[1] M. Buchanan, Ubiquity: Why Catastrophes Happen, Three Rivers Press, 2001; マーク・ブキャナン（水谷淳訳），歴史は「べき乗則」で動く，早川書房，2009.

[2] G. K. Zipf, Human Behavior and the Principle of Least Effort, Addison-Wesley, 1949.

[3] P. Bak, K. Christensen, L. Danon, and T. Scalon, Phys. Rev. Lett. 88, 178501 (2002).

[4] A. M. Petersen, H. E. Stanley, and S. Succi, Sci. Rep. 1, 181 (2011).

[5] Y. Sasaki, H. Kuninaka, N. Kobayashi, and M. Matsushita, J. Phys. Soc. Jpn. 76, 074801 (2007).

[6] K. Yamamoto and J. Wakita, J. Phys. Soc. Jpn. 82, 113001 (2013).

[7] H. Takayasu, A.-H. Sato, and M. Takayasu, Phys. Rev. Lett. 79, 966 (1997).

パラメータを持つ代数差分方程式と再帰方程式

弓林　司*
首都大学東京大学院理工学研究科

概要

（一階）差分方程式 $F(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1}) = 0$ は初期点 $\boldsymbol{x}^t$ を定める事で写像 $F : \boldsymbol{x}^t \to \boldsymbol{x}^{t+1}$ と見做す事が出来る。特に、ある $n \in \mathbb{N}$ に対し、任意の初期点 $\boldsymbol{x}^t$ が n 周期点となる時、その差分方程式は n 周期再帰方程式と呼ばれる [1]。本講演ではパラメータを持つ代数差分方程式が再帰方程式と成る条件について発表する。

1　導入

（一階）差分方程式 $F(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1}) = 0$（Difference Equation=DE）は初期点 $\boldsymbol{x}^t$ を定める事で写像 $F : \boldsymbol{x}^t \to \boldsymbol{x}^{t+1}$ と見做す事が出来る。特に、ある $n \in \mathbb{N}$ に対し、任意の初期点 $\boldsymbol{x}^t$ が n 周期点となる時、その差分方程式は n 周期再帰方程式（Recurrence Equation=RE）と呼ばれる [1]。例えば 2、5、8 周期 RE として以下のようなものがある [2]。

$$x^{n+1} = \frac{a}{x^n}, \qquad {}^\forall a \in \mathbb{C},$$
$$x^{n+1} = \frac{1 + x^n}{x^{n-1}},$$
$$x^{n+1} = \frac{1 + x^n + x^{n-1}}{x^{n-1}},$$

矢作氏と広田氏は [1] において沢山の RE の例を導いた。また齋藤氏等は [3] において可積分有理写像が持つ不変周期点多様体（Invariant Varieties of Periodic Points=IVPP）から無限個の RE を導いた。

F を不変量 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x^t}) \in \mathbb{C}[\boldsymbol{x}^t]$ を p 個持つ d 次元有理写像 $F : \boldsymbol{x}^t \to \boldsymbol{x}^{t+1}$ とする。このとき F の n 周期 IVPP とは、不変量のみで定まる代数多様体であり、その上の点が全て n 周期点となるようなものと定義される。特に IVPP は IVPP 定理 [4] [5] [6]：

- 不変量を $p \geq d/2$ 持つ有理写像 F は、ある n について n 周期 IVPP を持つ時、任意の $m \geq 2$ について m 周期 IVPP を持つ。

を満たす。この他にも IVPP は次元 1 以上を持ち可積分系との関係が深い [5]。

本講演では以上の議論を代数差分方程式（Algebraic Difference Equation=ADE）に書き換え拡張を行う。特に “p 個不変量を持つ d 次元 ADE の IVPP” と “p 個パラメータを持つ $d - p$ 次元 ADE が RE となるパラメータ条件” の双対性を議論する。特に IVPP 定理より ADE が IVPP を持てば（∼ADE が可積分であれば）無限個の RE のシリーズが得られる事を示す。

* E-mail : yumibayashi-tsukasa@ed.tmu.ac.jp

2 本論

始めに以下の議論で用いる用語の定義を行う。

1. **代数差分方程式とその Ideal**
   $\mathbb{C}$ 上の d 次元代数的差分方程式（ADE） [7] F は

$$F_i(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1}) = 0, \quad F_i(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1}) \in \mathbb{C}[\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1}], \quad i = 1, \ldots, d, \quad \boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1} \in \mathbb{C}^d \tag{1}$$

   で定義される DE とする。ADE は初期点 $\boldsymbol{x}^t$ を定める事で写像 $F : \boldsymbol{x}^t \to \boldsymbol{x}^{t+1}$ と見做す事が出来る。

   $\mathbb{C}$ 上の ADE F の Ideal（Ideal of the ADE=IADE）は

$$I_F^{t,t+1}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1}) := \Big(F_1(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1}), ..., F_d(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1})\Big) \tag{2}$$

   で定義される Ideal とする。ここで多項式 $f_i(\boldsymbol{x}), i = 1, 2, ..., d$ が生成する Ideal を

$$(f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_d(\boldsymbol{x}))) := \sum_{i=1}^{d} \mathbb{C}[\boldsymbol{x}] f_i(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

   と定義した。

   この言い換えは ADE F の解を代数多様体 $V(I_F^{t,t+1}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1}))$ 上の点 $\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1}$ と見做した事を意味する。

   また “IADE の繰り返しの IADE” $I_F^{t,t+2}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+2})$ は消去 Ideal [8]

$$I_F^{t,t+2}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+2}) := \mathrm{Gb}\left(I^{t,t+1}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1}), I^{t+1,t+2}(\boldsymbol{x}^{t+1}, \boldsymbol{x}^{t+2})\right) \cap \mathbb{C}[\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+2}] \tag{4}$$

   で定義される Ideal とする。ここで Gb は順序 $\boldsymbol{x}^{t+2} > \boldsymbol{x}^t > \boldsymbol{x}^{t+1}$ についての Gröbner 基底である。本講演に於いては $I_F^{t,t+2}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+2})$ の基底の数を d と仮定する。また一般の $l \in \mathbb{N}$ についても “IADE の l 回繰り返しの IADE” $I_F^{t,t+l}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+l})$ は以上の定義を帰納的に用いて定義される。
2. **不変量と Level Set**
   ADE F の不変量 $h_j(\boldsymbol{x}^t) \in \mathbb{C}[\boldsymbol{x}^t], j = 1, \ldots, p$ は

$$V(I^{t,t+1}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1})) = V(I^{t,t+1}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1}), (\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^{t+1}) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^t))), \quad j = 1, \cdots, p \tag{5}$$

   を満たす多項式と定義される。また $V((\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^t)))$ を ADE F のパラメータ $\boldsymbol{h}$ についての Level Set と呼ぶ。
3. **Level Set 上の ADE**
   （d 次元）ADE F を Level Set$V((\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^t)))$ 上に制限した（$d - p$ 次元）ADE を G_h と置く。G_h の IADE を

$$I_{G_h}^{t,t+1}(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}^{t+1}) := \mathrm{Gb}\left(I_F^{t,t+1}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+1}), (\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^t))\right) \cap \mathbb{C}[\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}^{t+1}], \quad \boldsymbol{h} \in \mathbb{C}^p \tag{6}$$

   と定義する。ここで $\boldsymbol{y}^t := (x_1^t, \ldots, x_{d-p}^t) \in \mathbb{C}^{d-p}$ と置いた。

   本講演では “p 個の不変量を持つ d 次元 ADE F” と “p 個のパラメータを持つ $d - p$ 次元 ADE G_h” の双対性を利用しながら議論を進める。

4. **不変周期点代数多様体**
   ADE F の n 周期点代数多様体 V_F^n は

$$V_F^n := V\left(I_F^{t,t+n}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^t)\right). \tag{7}$$

   で定義される代数多様体とする。即ち V_F^n 上の任意の点 $\boldsymbol{x}^t$ は ADE F に対して n 周期点となる。特に代数多様体 V_F^n が不変量 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^t)$ の多項式 $\gamma_k^n(\boldsymbol{h}), k = 1, \ldots, d-p$ が生成する Ideal

$$\Gamma_F^n := (\gamma_1^n(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^t)), \ldots, \gamma_{d-p}^n(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^t))), \quad \gamma_k^n(\boldsymbol{h}) \in \mathbb{C}[\boldsymbol{h}], \quad k = 1, \ldots, d-p \tag{8}$$

   で書かれる時

$$V_F^n = V(\Gamma_F^n), \tag{9}$$

   を不変周期点代数多様体（IVPP） [4] [5] [6] と呼ぶ。
5. **再帰方程式**
   ADE F_n は以下を満たす時、n 周期再帰方程式（RE）と呼ばれる：

$$V\left(I_{F_n}^{t,t+n}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+n})\right) = V((\boldsymbol{x}^{t+n} - \boldsymbol{x}^t)), \quad V\left(I_{F_n}^{t,t+m}(\boldsymbol{x}^t, \boldsymbol{x}^{t+m})\right) \neq V((\boldsymbol{x}^{t+m} - \boldsymbol{x}^t)), \quad m < n$$

   即ち任意の初期点は ADE F_n に対して n 周期点となる。

以上の定義のもと以下の定理が従う：

定理

F を p 個不変量を持つ d 次元 ADE、G_h を ADE F を Level Set$V((\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^t)))$ 上に制限した p 個パラメータを持つ $d-p$ 次元 ADE とする。

仮定：ある $n \geq 2 \in \mathbb{N}$ に対して G_h の n 周期点代数多様体が

$$V_{G_h}^n = V\left(I_{G_h}^{t,t+n}(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{y}^t)\right) = V\left(K_1^n(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{h})\gamma_1^n(\boldsymbol{h}), \ldots, K_{d-p}^n(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{h})\gamma_{d-p}^n(\boldsymbol{h})\right), \quad \boldsymbol{y}^t \in \mathbb{C}^{d-p}, \quad \boldsymbol{h} \in \mathbb{C}^p \tag{10}$$

と書けるとする。ここで $K_k^n(\boldsymbol{y}^t, \boldsymbol{h})$ 及び $\gamma_k^n(\boldsymbol{h})$ は変数 $\boldsymbol{y}^t$ 及び $\boldsymbol{h}$ に関する多項式とする。

結論：このとき代数多様体 $v_G^n := V\left(\gamma_1^n(\boldsymbol{h}), \ldots, \gamma_{d-p}^n(\boldsymbol{h})\right)$ は、ADE F の IVPP であり、ADE G_h が n 周期 RE となる “パラメータの条件” を与える。

証明

G_h の n 周期点代数多様体が (10) を満たす時、パラメータに対する条件 $\gamma_k^n(\boldsymbol{h}) = 0, k = 1, \ldots, d-p$ は任意の初期点 $\boldsymbol{y}^t$ に対して n 周期点条件となる。つまり、パラメータに対する条件 $\gamma_k^n(\boldsymbol{h}) = 0, k = 1, \ldots, d-p$ は、ADE G_h が n 周期 RE となる条件を意味している。

また、ADE F の変数 $\boldsymbol{x}^t$ は $\boldsymbol{y}^t$、$\boldsymbol{h}$ を用いて書かれるが、パラメータ $\boldsymbol{h}$ を v_G^n 上にとると、上の議論より任意の $\boldsymbol{y}^t$ は n 周期点となる。従って $\boldsymbol{x}^t$ も n 周期点となる。これは v_G^n が F の IVPP である事を意味する。

系

定理と同様の仮定の下、以下の系が従う。

- a) ADE F は IVPP を持つ。
  証明：定理の証明の過程より明らか。

- b) もし ADE F が $d/2$ 個以上の不変量を持てば、任意の $m \geq 2 \in \mathbb{N}$ について、ADE G_h が m 周期 RE となるパラメータ $\boldsymbol{h}_m \in \mathbb{C}^p$ が存在する。
  証明：系 a) 及び IVPP 定理 [4] [5] [6] より従う。

- c) 条件 $\gamma_k^n(\boldsymbol{h}) = 0,\ k = 1, \ldots, d-p$ は $\boldsymbol{y}^t$ についてのいかなる条件とも独立である。
  証明：定義より明らか。

- d) G_h は任意の $m \neq n$ なる m 及び一般のパラメータ $\boldsymbol{h} \in \mathbb{C}^p$ に対する m 周期点を持たない。
  証明：背理法により示す。G_h が任意の $m \neq n$ なる m 及び一般のパラメータ $\boldsymbol{h} \in \mathbb{C}^p$ に対する m 周期点 $\boldsymbol{y}_m$ を持つとする。このときパラメータを v_G^n の上にとると、点 $\boldsymbol{y}_m$ は m 周期かつ n 周期点となるが、これは “一般には” 不可能である。

  ここで一言 “特異点集合（Variety of Singular Points=VSP）” について述べておく。論文 [5] [6] 等に於いて議論されているように異なる周期の IVPP が交点を持つとき上記系は成り立たない。この集合が VSP である。

参考文献

[1] Hirota R and Yahagi H 2002 *J. Phys. Soc. Jpn.* **71** 2867.

[2] Graham R L, Knuth D E and Patashnik O 1994 *Concrete Mathematics* (Addison-Wesley).

[3] S.Saito and N.Saitoh, J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007) 12775-12787.

[4] S. Saito and N. Saitoh, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **76** No.2 p.024006 (2007).

[5] S.Saito and N.Saitoh, ” *Invariant varieties of periodic points*” in Mathematical Physics Research Developments, (2008 Nova Science Publishers, Inc.) Capt.3 pp 85-139, ISBN 978-1-60456-963-6.

[6] S. Saito and N. Saitoh *J. Math. Phys.* **51** 063501 (2010).

[7] Wibmer, Michael, ”*Algebraic difference equations* ”, Lecture notes, `http://www.algebra.rwth-aachen.de/en/Mitarbeiter/Wibmer/AlgebraicDifferenceEquations.pdf`, (2013),
Richard M. Cohn, ”*Difference algebra*” , Interscience Publishers John Wiley and Sons, New York-London-Sydeny, (1965).

[8] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea. ”*Ideals, Varieties, and Algorithms*”. Undergradu-. ate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, (1997).

[9] T. Yumibayashi, S. Saito, Y. Wakimoto, (to be published at PLA), [arXiv:1107.1832v2].

Linearly implicit finite-difference scheme for a nonlinear wave equation with application to approximation of the blow-up time

佐々木　多希子[1]
東京大学大学院数理科学研究科

1　はじめに

非線形偏微分方程式の解が有限時間で爆発する場合，その爆発時間を求めること，また爆発時間での解の挙動の研究は非常に重要である．しかしながら，爆発時間を解析的に求めることは一般的に難しく，したがって数値計算によって爆発時間を近似的に求める方法が研究されている．

近年，双曲型方程式に対し，爆発時間を数値的に求める差分スキームが提案された [1]．[1] では，スキームには陽的なスキームを用いているのだが，スキームの収束証明が未解決であり，スキームが収束することを仮定して，数値爆発時間の収束証明を示している．

最近，我々はこの問題に対し，陽的なスキームだけではなく，線形で陰的なスキームも用いて数値爆発時間の近似の考察を行った．その結果，スキームの収束証明，及び数値爆発時間の収束証明の両方を示すことができる (1) のスキームを得ることに成功した．本講演では，この成果について報告する．

本講演では，次の空間 1 次元非線形波動方程式の初期-境界値問題を考える:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = u^p, \quad t > 0,\ x \in (0, L), \\ (u, u_x)(t, 0) = (u, u_x)(t, L), \quad t \geq 0, \\ (u, u_t)(0, x) = (u_0, u_1)(x), \quad x \in [0, L]. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$p > 1$，$L > 0$ とする．(1) は，滑らかな初期値を与えると滑らかな時間局所解を持つことが知られている．

また，$K(t)$ を $K(u(t)) = \frac{1}{L}\int_0^L u(t,x)dx$ で定義する．このとき，次の定理が成立する．

定理 1 ある正定数 $\alpha > 1$ と，ある非負の定数 β が存在して，

$$u_0(x) \geq \alpha, \quad u_1(x) \geq \beta, \quad x \in [0, L], \tag{2}$$

さらに，u_0，u_1 は十分滑らかであることを仮定する．このとき，ある正定数 $\hat{T}$ が存在し，

$$\lim_{t \uparrow \hat{T}} |K(u(t))| = \infty.$$

また，簡単な計算により，ある正定数 $T^* \leq \hat{T}$ が存在し，$\|u(t)\|_{L^\infty(0,L)}$ は有限時間 $t = T^*$ で爆発することが分かる．

注意 2 数値爆発時間の収束証明には (今の時点では)，

$$T^* = \hat{T} \tag{3}$$

であることが必要である．本講演では $T^* = \hat{T}$ を仮定する．

[1]tsasaki@ms.u-tokyo.ac.jp

(1) は次のように書き直すことで，線形な差分スキームを得ることができる:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u = \phi, \quad t > 0,\ x \in (0, L), \\ \partial_t \phi - \partial_x \phi = u^p, \quad t > 0,\ x \in (0, L), \\ (u, \phi)(t, 0) = (u, \phi)(t, L), \quad t \geq 0, \\ (u, \phi)(0, x) = (u_0, u_1 + \partial_x u_0)(x), \quad x \in [0, L]. \end{cases} \tag{4}$$

(4) の線形差分スキームとして，次のスキームを得た:

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t_n} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} + \dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right) = \phi_j^{n+\frac{1}{2}}, \\ \dfrac{\phi_j^{n+\frac{3}{2}} - \phi_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t_n} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\phi_{j+1}^{n+\frac{3}{2}} - \phi_j^{n+\frac{3}{2}}}{h} + \dfrac{\phi_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \phi_j^{n+\frac{1}{2}}}{h} \right) = (u_j^{n+1})^p, \end{cases} \tag{5}$$

ここで $\tau > 0,\ J > 0,\ h = L/J,$　また，簡単のため，$\gamma = \frac{\tau}{h} < 1$ を固定して考える. また，Δt_n を次で定める:

$$\Delta t_n = \tau \cdot \min\left\{ 1, \frac{1}{\|\boldsymbol{u}^n\|_{l^\infty}} \right\}, \quad \boldsymbol{u}^n = (u_j^n) \in \mathbb{R}^J.$$

2　主結果

(5) は次の収束定理が成り立つ:

定理 3 $T < T^*$ とする。また，正定数 M を

$$M = \max\{ \|\partial_t^k \partial_x^m u\|_{L^\infty([0,T'');L^\infty(0,L'))} \mid\ k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ k + m \leq 3 \}$$

とおく．さらに，(5) の初期値 $(\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{\phi}^{\frac{1}{2}})$ を

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad \phi^{\frac{1}{2}} = u_1(x_j) + \partial_x u_0(x_j)$$

を満たすように選ぶ．このとき，次を満たす $p,\ T,\ M,\ \gamma$ のみに依存する正定数 $\tau_0,\ K_0$ が存在する*:*
$\tau \in (0, \tau_0)$，$\sum_{j\ 0}^{n} \Delta t_j \leq T$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\|\boldsymbol{u}(t_n) - \boldsymbol{u}^n\|_{l^\infty} + \|\boldsymbol{\phi}(t_{n+\frac{1}{2}}) - \boldsymbol{\phi}^{n+\frac{1}{2}}\|_{l^\infty} \leq K_0(\tau + h).$$

ここで，　$\boldsymbol{u}(t_n) = (u(t_n, x_j)),$　$\boldsymbol{\phi}(t_{n+\frac{1}{2}}) = (\phi(t_{n+\frac{1}{2}}, x_j)).$

また，数値爆発時間 $T(\tau, h)$ を $T(\tau, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta t_n.$ で定義する．数値爆発時刻の爆発時刻への収束について，次の結果を得た:

定理 4 (2)，(3)，定理 3 の仮定の下で次が成り立つ*:*

$$\lim_{h \to 0} T(\tau, h) = T^*.$$

3　数値例

(4) において，$p = 4$ であり，初期条件が，$u_0(x) = 10\sin(4\pi x) + 1.5,\ u_1(x) = 100$ である場合を考える．$h = 10^{-2},\ \gamma = \tau/h = 1/2$ とし，x の計算範囲を $[0, 1]$ とする．図 1 は，横軸が x，縦軸が u の数値解の絶対値である．

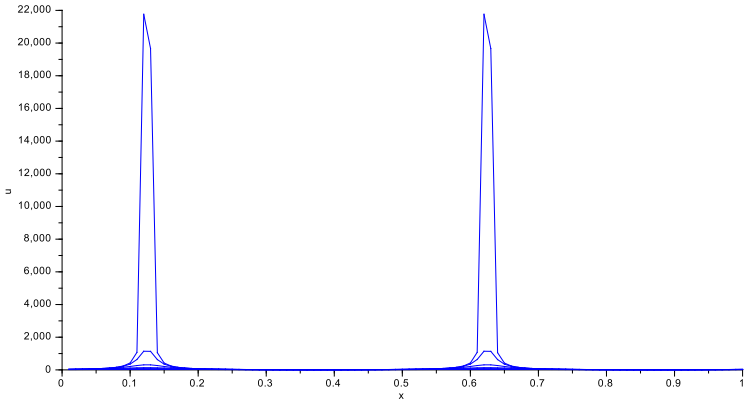


図 1: (5) を適用した u の数値解の爆発.

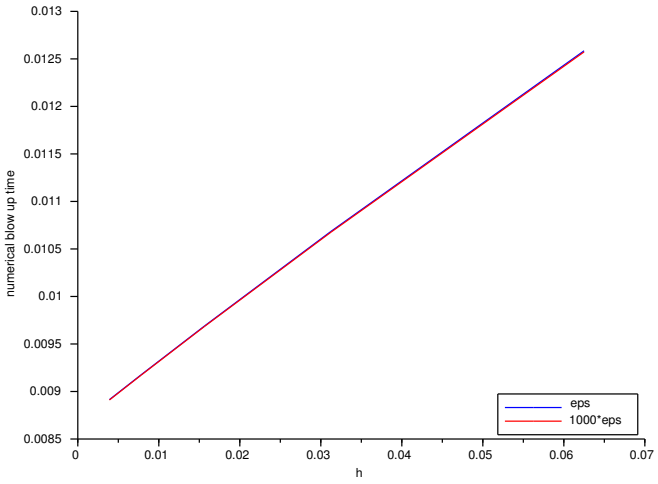


図 2: 数値爆発時間の収束.

図 2 は，横軸が空間の刻み幅 h，縦軸は数値爆発時間

$$T^{\#} = \min\{t_n \ \mid \ \|\phi^n\|_{l^\infty}^{-1} \leq \mathrm{eps}\}.$$

である．(eps=10^{-12} と，10^{-9} の $T^{\#}$ を plot している．) 空間の刻み幅 h を小さくしていくと，数値爆発時間 $T^{\#}$ も一次関数的に減少していくのが分かる．したがって，この関数と縦軸のぶつかる時間が (1) の解 u の爆発時間であることが予測される．

参考文献

[1] C.-H. Cho: *A finite difference scheme for blow-up solutions of nonlinear wave equations*, Numer. Math. Theory Methods Appl., **3**(2010), 475-498.

[2] R. T. Glassey: *Blow-up theorems for nonlinear wave equations*, Math. Z. **132** (1973), 183-203.

位相的トーリック多様体の貼り合わせによる構成法

畑中　美帆 (大阪市立大学　後期博士課程１年)

位相的トーリック多様体とは、トーリック多様体を一般化した多様体で、石田－福川－枡田（[2]）により導入された。

定義 1 位相的トーリック多様体とは、効果的かつ滑らかな $(\mathbb{C}\ )^n$ 作用を持つ $2n$ 次元の滑らかな多様体で、稠密な開軌道を持ち、局所的に $(\mathbb{C}\ )^n$ のある滑らかな表現空間に同変微分同相なものである。

例えば、複素射影空間や $\mathbb{C}P^2\sharp\overline{\mathbb{C}P^2}, \mathbb{C}P^2\sharp\mathbb{C}P^2$ 等がある。

石田－福川－枡田（[2]）で導入された位相的トーリック多様体はコンパクトを仮定しているが、ここではコンパクトを仮定しない。

トーリック多様体とは、上の位相的トーリック多様体の定義の「滑らかな」を「代数的な」に変えたものである。このことから、位相的トーリック多様体はトーリック多様体よりもはるかにたくさんあることがわかる。

トーリック多様体が扇という組み合わせ論の対象から構成できる ([1]) のと同様、位相的トーリック多様体も位相的扇という組み合わせ論の対象から構成できることが知られている（[2]）。扇とは、$\mathbb{Z}^n \cong Hom_{alg}(\mathbb{C}\ ,(\mathbb{C}\ )^n)$ 上のある条件を満たす錐の集まりのことである。一方で位相的扇とは、以下で定義するように $R^n = \mathbb{C}^n \quad \mathbb{Z}^n \cong Hom_{smooth}(\mathbb{C}\ ,(\mathbb{C}\ )^n)$ 上のある条件を満たす錐の集まりである。これらの同型対応は以下のようになっている。（簡単のため、$n = 1$ の場合を記す。）

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Z} \quad \to Hom_{alg}(\mathbb{C}\ ,\mathbb{C}\ ), & R = \mathbb{C} \quad \mathbb{Z} \quad \to Hom_{smooth}(\mathbb{C}\ ,(\mathbb{C}\ )) \\ v \mapsto [g \mapsto g^v] & (b + \sqrt{\quad 1}c, v) \mapsto [g \mapsto |g|^{b+\sqrt{-1}c}(g/|g|)^v] \end{array}$$

$b = v, c = 0$ の時、$[g \mapsto |g|^{b+\sqrt{-1}c}(g/|g|)^v]$ は $[g \mapsto g^v]$ に一致する。つまり、$\mathbb{Z}^n \cong Hom_{alg}(\mathbb{C}\ ,(\mathbb{C}\ )^n)$ は $R^n = \mathbb{C}^n \quad \mathbb{Z}^n \cong Hom_{smooth}(\mathbb{C}\ ,(\mathbb{C}\ )^n)$ に対角的に埋め込まれていることがわかる。

石田ー福川ー枡田（[2]）では，トーリック多様体の商空間による構成法を一般化して位相的トーリック多様体を構成しているが，本講演では，トーリック多様体の貼り合わせによる構成法 ([1]) の一般化を紹介する。

　を空集合を含む $(n \quad 1)$ 次元の抽象的単体複体、$^{(1)}$ をその頂点集合、β を $^{(1)}$ から $R^n = \mathbb{C}^n \quad \mathbb{Z}^n$ への写像、　の頂点 i の β での像を $\beta_i = (b_i + \sqrt{\quad 1}c_i, v_i)$ で表す。

定義 2 n 次元の位相的扇 Δ とは、　と β の組で、以下の条件を満たすものとする。

(1)　の単体 σ に対して、$\{b_i\}_{i\in\sigma}$ が一次独立で、単体 σ, τ に対して $\angle b_\sigma \cap \angle b_\tau = \angle b_{\sigma\cap\tau}$ が成り立つ。ここで、$\angle b_\sigma$ は $\{b_i\}_{i\in\sigma}$ で張られる錐とする。

(2) 各 i に対して v_i が primitive なベクトルで、単体 σ に対して $\{v_i\}_{i\in\sigma}$ が一次独立である。

この定義で、各 i に対して $b_i = v_i, c_i = 0$ の時は扇になる。

また、([3]) により位相的扇の連続変形で移りあう２つの位相的扇に対応する２つの位相的トーリック多様体は、$(S^1)^n$ 作用に関して同変微分同相になることが知られている。このことと $\mathbb{Z}^n$ が離散集合であることか

ら、位相的トーリック多様体に作用している複素トーラス $(\mathbb{C}\ )^n \cong (\mathbb{R}_{>0})^n \quad (S^1)^n$ のうち、$(\mathbb{R}_{>0})^n$ 作用は位相的扇の R^n の中の $\mathbb{C}^n$ 部分により支配され、$(S^1)^n$ 作用は位相的扇の R^n の中の $\mathbb{Z}^n$ 部分により支配されていることがわかる。

さらに、位相的トーリック多様体を貼り合わせで構成する際に、β の像の虚数部分を零にした位相的扇から構成することにする。つまり、上で述べた ([3]) の結果から、貼り合わせの構成でできるのは $(S^1)^n$ 作用に関する同変微分同相を除いた位相的トーリック多様体である。

β の像の虚数部分を零にすると、位相的扇から 2 つの扇 $(\Delta_{\mathbb{R}}, \Delta_Z)$ が構成できる。また、極大錐が n 次元であることを仮定する。

構成は以下のようにして行う。

$\sigma = \{1, \ldots, n\} \in \quad$ に対して、$\beta_1, \ldots, \beta_n \in R^n = \mathbb{C}^n \quad \mathbb{Z}^n$ が対応する。ここで、$\beta_i = (b_i, v_i) \in \mathbb{R}^n \quad \mathbb{Z}^n$ で表す。$b_1, \ldots, b_n$ で張られる錐を $\sigma_{\mathbb{R}} \quad \Delta_{\mathbb{R}}$、$v_1, \ldots, v_n$ で張られる錐を $\sigma_Z \quad \Delta_Z$ とおく。この時、$\sigma_{\mathbb{R}}$ と σ_Z の双対錐をそれぞれ $\sigma_{\mathbb{R}}^\vee$、$\sigma_Z^\vee$ で表す。さらに、$S_{\sigma_Z} = \sigma_Z^\vee \cap \mathbb{Z}^n$ とおくと半群になる。$U_\sigma = (Hom_{sg}(\sigma_{\mathbb{R}}^\vee, \mathbb{R}_{\geq 0}) \quad Hom_{sg}(S_{\sigma_Z}, S^1))/\sim$ とおく。同値関係は、U_σ が $\mathbb{C}^n$ と同一視できるようにうまく定義する。さらにこの同一視で $\mathbb{C}^n$ と同相になるように U_σ に位相を入れ、その同相写像を φ_σ で表す。($\mathbb{C}^n$ にはユークリッド位相が入っているとする。)

$T = Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_{>0}) \quad Hom(\mathbb{Z}^n, S^1)$ と定義し、うまく位相を入れると、$(\mathbb{C}\ )^n$ と同相になり、その同相写像を $\varphi_\emptyset$ で表す。T をトーラスと呼ぶ。(同相写像の添字に $\emptyset$ を使うのは、トーラス T が位相的扇の単体複体の空集合に対応する $U_\emptyset$ と一致するからである。) この時、U_σ にトーラス T を効果的に作用させることができ、この作用と同相写像 φ_σ、$\varphi_\emptyset$ に関して、U_σ は $(\mathbb{C}\ )^n$ のある滑らかな表現空間に同変同相になる。

$\sigma, \tau, \gamma \in \quad$、$\sigma \cap \tau = \gamma$ の時、U_σ と U_τ を U_γ を共通部分にして以下のように貼り合わせる。U_γ は対応 $(x, y) \mapsto (x|\sigma_{\mathbb{R}}^\vee, y|S_{\sigma_Z})$ で U_σ に埋め込まれる。同様に、対応 $(x, y) \mapsto (x|\tau_{\mathbb{R}}^\vee, y|S_{\tau_Z})$ で U_τ に埋め込まれる。この時、$(x|\sigma_{\mathbb{R}}^\vee, y|S_{\sigma_Z})$ と $(x|\tau_{\mathbb{R}}^\vee, y|S_{\tau_Z})$ を同一視して U_σ と U_τ を貼り合わせる。

このようにして、位相的扇 Δ の単体複体 のすべての $n \quad 1$ 次元単体 σ に対応する U_σ を全て貼り合わせてできた位相空間を $X(\Delta)$ で表す。この $X(\Delta)$ は効果的なトーラス作用を持つある位相空間で、局所的にある表現空間に同変同相なものである。

さらに、トーラス作用が効果的であることから、$X(\Delta)$ が稠密な開軌道を持つことを示すことができる。また、変換関数が滑らかであることも示すことができる。詳しいことは省略するが、変換関数は位相的扇の β を使って表すことができる。

あとは $X(\Delta)$ がハウスドルフ空間であることを示せば構成が終了する。$X(\Delta)$ の異なる 2 点を U_σ から取ってくれば、U_σ は $\mathbb{C}^n$ と同相なので明らかに 2 つの交わらない開集合で分離できる。しかし、$X(\Delta)$ の異なる 2 点をそれぞれ U_σ と U_τ から取ってきた時は 2 つの交わらない開集合で分離できることは簡単にはわからない。実際は $X(\Delta)$ の異なる 2 点を分離することができるのだが、それは位相的扇の定義（1）の条件「単体 σ, τ に対して $\angle b_\sigma \cap \angle b_\tau = \angle b_{\sigma\cap\tau}$ が成り立つ」ことが効いている。この条件は位相的扇から導かれる 2 つの扇 $(\Delta_{\mathbb{R}}, \Delta_Z)$ のうち、$\Delta_{\mathbb{R}}$ の各 n 次元の錐が $n \quad 1$ 次元以下の錐でしか交わらないことと同値である。

以上で構成は終わりであるが、ハウスドルフ性のような位相的トーリック多様体の他の幾何的性質を位相的扇の言葉で表すことができる。例えば、位相的トーリック多様体がコンパクトになるための必要十分条件は、$\Delta_{\mathbb{R}}$ が $\mathbb{R}^n$ 全体を覆っていること（[2]）であり、滑らかになる必要十分条件は Δ_Z の各錐の primitive な生成ベクトルが $\mathbb{Z}^n$ の基底になっていること（[2]）である。さらにコホモロジー環も位相的扇を使って表すことができる（[2]）。

参考文献

[1] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Ann. of Math. Studies, vol.131, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.

[2] H. Ishida, Y. Fukukawa and M. Masuda, *Topological toric manifolds*, Moscow Math. J. (to appear); arXiv:1012.1786.

[3] L. Yu, *On transition functions of topological toric manifolds*, arXiv:1110.4527.

Calabi's gradient metric on the space of Kähler metrics

十鳥　健太*
東北大学大学院理学研究科数学専攻

1 Introduction

定スカラー曲率 Kähler 計量が存在するための条件を Kähler 計量の空間という無限次元空間 $\mathcal{H}_0$ 上の幾何で記述しようという試みの下、$\mathcal{H}_0$ 上に様々な Riemann 計量が定義されている。$\mathcal{H}_0$ 上の Riemann 計量で最も調べられているのは Mabuchi-Semmes-Donaldson's 計量と呼ばれる計量である。この計量により $\mathcal{H}_0$ は無限次元の対称空間となり、また対応する測地線を使った定スカラー曲率 Kähler 計量の一意性の証明などの応用もある。Mabuchi-Semmes-Donaldson's 計量について詳しくは例えば [2] を参照して頂きたい。

一方、本講演で扱う Calabi's gradient 計量は特に Kähler 類が自明な場合には gradient flow が Kähler Ricci flow と呼ばれる、よく調べられている flow になるという性質がある。Calabi's gradient 計量については [1] などがある。本講演では Calabi's gradient 計量に対応した測地線の Cauchy 問題の解の存在性、およびそこから $\mathcal{H}_0$ 上に距離が定まるということを話す。

2 Preliminaries

M を m 次元コンパクト複素多様体とする。そして ω を M 上の Kähler 形式とする。ここで ω が Kähler 形式であるとは、ω が閉実 2-形式であり、局所座標 $(z^1, \dots, z^m)$ を使って

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{\alpha,\, \beta=1}^{m} g_{\alpha\bar{\beta}}\, dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta}.$$

と表せて、かつ $\left(g_{\alpha\bar{\beta}}\right)$ が正定値 Hermite 行列であるときを言う。

補題 1（$\partial\bar{\partial}$-Lemma） M をコンパクト Kähler 多様体、α を M 上の完全実 (p, p)-形式とする。このときある実 $(p-1, p-1)$-形式 β が存在して

$$\alpha = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\beta.$$

と表せる。

* E-mail address: sb0m25@math.tohoku.ac.jp

以下、Kähler 形式 ω を一つ固定しておく。補題 1 より ω が定める De Rham コホモロジー類 $[\omega]$ に属する任意の Kähler 形式 ω' に対し、ある M 上の滑らかな実関数 φ が存在して

$$\omega' = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi.$$

と書ける。

注意 2　滑らかな実関数 φ_1, φ_2 が $\omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_1 = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi_2$ を満たすなら、ある実数 c が存在して $\varphi_2 = \varphi_1 + c$ となる。

関数 φ に対し汎関数 I を

$$I(\varphi) = \frac{1}{\mathrm{vol}M}\sum_{p=0}^{m}\frac{1}{(p+1)!(m-p)!}\int_M \varphi\omega^{m-p}\wedge(\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^p.$$

で定義する。ここで $\mathrm{vol}M = \int_M \omega^m/m!$ である。定数 c に対し $I(\varphi + c) = I(\varphi) + c$ となる。

Kähler 計量の空間 $\mathcal{H}_0$ を

$$\mathcal{H}_0 = \{\varphi \in C^\infty(M) \,|\, I(\varphi) = 0,\, \omega_\varphi = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi \text{ は Kähler 形式 }\}$$

で定める。ここで $C^\infty(M)$ は M 上の滑らかな実数値関数全体の集合である。

次に K-energy と呼ばれる $\mathcal{H}_0$ 上の汎関数 K について説明する。各 $\varphi \in \mathcal{H}_0$ に対し K は

$$K(\varphi) = \int_M \log\frac{\omega_\varphi^m}{\omega^m}\frac{\omega_\varphi^m}{m!} - \sum_{p=0}^{m-1}\frac{1}{(p+1)!(m-p-1)!}\int_M \varphi\mathrm{Ric}(\omega)\wedge\omega^{m-p-1}\wedge(\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi)^p$$

で与えられる。K-energy の重要な性質として次の命題がある。

命題 3　$\varphi \in \mathcal{H}_0$ が K の臨界点であることと ω_φ が定スカラー曲率 Kähler 計量であることは同値である。

3　Calabi's gradient metric

我々は $\mathcal{H}_0$ 上に Riemann 計量を定義して幾何を展開したい。そのためにまずは $\mathcal{H}_0$ の接空間がどのようなものか明確にする必要がある。$\mathcal{H}_0$ 上の滑らかな曲線 $\{\varphi_t\}_{-\varepsilon\le t\le\varepsilon}$ を

$$\begin{array}{ccc}(-\varepsilon,\,\varepsilon)\times M & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (t,\,x) & \longmapsto & \varphi_t(x).\end{array}$$

が滑らかな関数となるものと定義すると、接ベクトルは曲線を微分したもので与えられるので各 $\varphi \in \mathcal{H}_0$ における接空間は

$$T_\varphi\mathcal{H}_0 = \{\psi \in C^\infty(M) \,|\, \int_M \psi\frac{\omega_\varphi^m}{m!} = 0\}$$

となる。

定義 4（Calabi's gradient metric） 各 $\varphi \in \mathcal{H}_0$ に対し

$$\langle \psi_1,\, \psi_2 \rangle_\varphi = \int_M (d\psi_1,\, d\psi_2)_\varphi \frac{\omega_\varphi^m}{m!}, \qquad \psi_1,\ \psi_2 \in T_\varphi \mathcal{H}_0.$$

で与えられる計量を Calabi's gradient 計量と呼ぶ。ここで $(\cdot,\cdot)_\varphi$ は Kähler 形式 ω_φ から自然に定まる内積である。

注意 5 Calabi's gradient 計量に関する K-energy の gradient flow は以下で与えられる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_t}{\partial t} = f(\varphi_t) \\ \Box_{\varphi_t} f(\varphi_t) = S(\varphi_t) - \underline{S} \end{cases} \tag{1}$$

ここで $\Box_\varphi$ は Kähler 形式 ω_φ に対応した複素 Laplacian で、局所的に

$$\omega_\varphi = \sqrt{-1} \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{m} g_{\varphi,\,\alpha\bar{\beta}}\, dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta.$$

と表したときに

$$\Box_\varphi = -\sum g_\varphi^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}.$$

で与えられる。また $S(\varphi)$ は Kähler 形式 ω_φ に対応したスカラー曲率であり、$\underline{S}$ は

$$\underline{S} = \frac{\int 2\pi C_1(M) \wedge [\omega]^{m-1}/(m-1)!}{\int [\omega]^m/m!}.$$

で与えられる定数である。(1) の flow は pseudo-Calabi flow と呼ばれる、Kähler Ricci flow を一般化したものである (pseudo-Calabi flow について詳しくは [3] を参照)。

$\mathcal{H}_0$ 上の曲線 $c = \{\varphi_t\}_{a \le t \le b}$ の長さを

$$L(c) = \int_a^b \langle \dot{\varphi}_t,\, \dot{\varphi}_t \rangle_{\varphi_t}^{\frac{1}{2}} dt$$

で定める。

$\mathcal{H}_0$ 上の曲線 $\{\varphi_t\}_{0 \le t \le 1}$ に沿ったベクトル場

$$\psi_t \in T_{\varphi_t} \mathcal{H}_0, \qquad t \in [0,\, 1].$$

に対し、関数 $A_\varphi(\psi)$ を

$$\begin{cases} \Box_\varphi A_\varphi(\psi) = \Box_\varphi(\dot{\varphi} \Box_\varphi \psi) - \Box_\varphi \psi \Box_\varphi \dot{\varphi} + (\partial\bar{\partial}\psi,\, \partial\bar{\partial}\dot{\varphi})_\varphi \\ \displaystyle\int_M A_\varphi(\psi) \frac{\omega_\varphi^m}{m!} = -\int_M \dot{\varphi} \Box_\varphi \psi \frac{\omega_\varphi^m}{m!} \end{cases} \tag{2}$$

を満たすものとする。ψ_t の共変微分 $D_t\psi_t$ を

$$D_t\psi_t = \dot{\psi} - \frac{1}{2}\dot{\varphi}\Box_\varphi \psi + \frac{1}{2} A_\varphi(\psi)$$

で定義する。ψ_t^1, ψ_t^2 を φ_t に沿ったベクトル場とすると

$$\frac{d}{dt}\langle \psi_t^1, \psi_t^2 \rangle_{\varphi_t} = \langle D_t\psi_t^1, \psi_t^2 \rangle_{\varphi_t} + \langle \psi_t^1, D_t\psi_t^2 \rangle_{\varphi_t}$$

が成り立つ。

定義 6　$\mathcal{H}_0$ 上の曲線 φ_t が

$$D_t\dot{\varphi}_t = 0$$

を満たすとき、φ_t を測地線と呼ぶ。

4 Main theorem

本講演では測地方程式の Cauchy 問題を扱う。以下が主定理である。

定理 7　任意の初期条件 $\varphi \in \mathcal{H}_0$, $\psi \in T_\varphi\mathcal{H}_0$. に対し測地方程式の Cauchy 問題

$$\begin{cases} D_t\varphi_t = 0 \\ \varphi_0 = \varphi \\ \dot{\varphi}_0 = \psi \end{cases} \tag{3}$$

は一意的な時間局所解 φ_t をもつ。

また、Cauchy 問題の時間局所解の存在から次が示せる。

定理 8　各 φ_1, $\varphi_2 \in \mathcal{H}_0$ に対し、

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \inf\{L(c) \,|\, c \text{ は } \varphi_1 \text{ と } \varphi_2 \text{ を結ぶ区分的に滑らかな曲線 }\}$$

と定義すると d は $\mathcal{H}_0$ 上の距離関数である。

References

[1] S. Calamai and K. Zheng, *The Dirichlet and the weighted metrics for the space of Kähler metrics*, arXiv:1202.6610v2 [math.DG]

[2] X-X. Chen, *The space of Kähler metrics*, J. Diff. Geom., 56, 189-234, (2000).

[3] X-X. Chen and K. Zheng, *The pseudo-Calabi flow*, J. Reine Angew. Math., 674, 195-251, (2013).

群上の連続ウェーブレット解析

多元数理科学研究科
大城　和秀

概 要

本講演では、群上の連続ウェーブレット解析に関しての基本的な事柄と講演者の研究に関して述べる。ここで対象にしている群 G は 半直積群 $N \rtimes H$ である。但し、N は局所コンパクト Abel 群、H は $\mathrm{Aut}(H)$ の閉部分群であり、ここでは特に G として $\mathbb{R}^3$ 上の相似変換群 $\mathbb{R}^3 \rtimes (SO(3) \times \mathbb{R}_+)$ を中心に表現論的考察を述べていく。

1　序論

連続ウェーブレット変換は数学に限らず様々な分野で研究されてきたが、Grossmann、Morlet、Paul[?] は連続ウェーブレット変換を表現論の枠組みで鮮やかに捉え直した。まず $\mathbb{R}$ 上のアフィン変換群 $G = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^*(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\})$ の $L^2(\mathbb{R})$ 上のユニタリ表現 π を

$$\pi(b,a)f(x) = |a|^{-1/2} f(\frac{x-b}{a}) \qquad ((b,a) \in G, f \in L^2(\mathbb{R}))$$

によって定義する。また、$0 \neq f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して、写像 $\widetilde{W}_f : L^2(\mathbb{R}) \to C(G)$ を

$$\widetilde{W}_f g(b,a) = \langle g, \pi(b,a)f \rangle \quad ((b,a) \in G, g \in L^2(\mathbb{R}))$$

によって定義する。このとき、彼らは $\widetilde{W}_f$ の像が $L^2(G)$ に含まれる条件がどのようなものかを考えた。Fourier 変換 $\mathcal{F}$ を用いると

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{R}) \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\pi}} \\ L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow[\mathcal{F}]{} & L^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

が可換図式となるような、新たなユニタリ表現 $\widehat{\pi} = \mathcal{F} \circ \pi \circ \mathcal{F}^{-1}$ を得る。もし $\widetilde{W}_f$ の像が $L^2(G)$ に含まれるのであれば、Plancherel の定理により

$$\begin{aligned} \|\widetilde{W}_f(g)\|^2 &= \int_G |\langle g, \pi(a,b)f\rangle|^2 \frac{dadb}{|a|^2} = \int_G |\left\langle \widehat{g}, \widehat{\pi}(a,b)\widehat{f}\right\rangle|^2 \frac{dadb}{|a|^2} \\ &= \|g\|^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{f}(a)|^2}{|a|} da < \infty. \end{aligned}$$

従って、$\widetilde{W}_f$ の像が $L^2(G)$ に含まれる必要十分条件は

$$C_f := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{f}(a)|^2}{|a|} da < \infty.$$

ここで $W_f := C_f^{-1/2}\widetilde{W}_f$ とすると、これは $L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(G)$ への中への等距離写像となっており、この W_f を連続ウェーブレット変換という。また、このとき任意の $g \in L^2(\mathbb{R})$ は W_f を用いて

$$g = C_f^{-1/2} \int_G W_f g(a,b)\pi(a,b)f \frac{dadb}{|a|^2}$$

と表せる。但し、積分は弱収束で定義する (Cardeón の公式)。ここで重要なのは $C_f < \infty$ なる $0 \neq f \in L^2(\mathbb{R})$ の存在と、存在した場合、それがどのような関数として取ってこれるかということである。彼らは例として f を Gauss 関数の 2 回微分として提示した [**?**]。

2　連続ウェーブレット変換

上述の事柄を表現論の立場から観ると、π は $\mathbb{R}^*$ の自明な表現から誘導される G の既約ユニタリ表現に他ならない。半直積群 $G = N \rtimes H$ の閉部分群である H の自明な表現から誘導される G のユニタリ表現は準正則表現とよばれており、それに関する多くの研究結果が存在する。

定義 1. π を G の既約ユニタリ表現、$\mathcal{H}_\pi$ を π の表現空間とする。このとき、

$$\int_G |\langle f, \pi(x)f\rangle|^2 d\mu_G(x) < \infty \qquad (x \in G, f \in \mathcal{H}_\pi)$$

を満たす f はアドミッシブル・ベクトルと言われる。但し、$d\mu_G$ は G の左 Haar 測度とする。また、少なくとも 1 つ零でないアドミッシブル・ベクトルが存在するとき、π を 2 乗可積分表現という。

定義 2. $f \in \mathcal{H}_\pi$ を零でないアドミッシブル・ベクトルとする。このとき、1 節のように適当な $C_f > 0$ をとって $W_f = C_f\widetilde{W}_f$ が $\mathcal{H}_\pi$ から $L^2(G)$ の中への等距離写像とすることができる。この W_f を連続ウェーブレット変換という。

表現論の立場から観ると、連続ウェーブレット解析の研究は G の２乗可積分表現に関する研究に帰着される。

では H の自明でないユニタリ表現から誘導される G のユニタリ表現は２乗可積分な部分表現を含んでいるだろうか。次でそのことを述べる。

3　$\mathbb{R}^3$ 上の相似変換群に関して

群 G として $\mathbb{R}^3$ 上の相似変換群 $\mathbb{R}^3 \rtimes (SO(3) \times \mathbb{R}_+)$ として考える。今、$H = SO(3) \times \mathbb{R}_+$ の既約ユニタリ表現として $\sigma \otimes 1$ をとる。但し、σ は $SO(3)$ の既約ユニタリ表現、1 を $\mathbb{R}_+$ の自明表現とする。このとき σ の表現空間 $\mathcal{H}_\pi$ を $\sigma \otimes 1$ の表現空間としてみなす。$\sigma \otimes 1$ から誘導される G のユニタリ表現 π は $L^2(\mathbb{R}^3, \mathcal{H}_\sigma)$ 上で

$$\pi(x, A, c)f(y) = c^{-3/2}\sigma(A)f(c^{-1}A^{-1}(y - x)) \quad ((x, A, c) \in G, f \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathcal{H}_\pi))$$

で与えられる。π は既約ではない。従って π を既約分解、あるいは $L^2(\mathbb{R}^3, \mathcal{H}_\sigma)$ を既約分解する。まず始めに、Fourier 変換を用いると π は $L^2(\mathbb{R}^3, \mathcal{H}_\sigma)$ 上のユニタリ表現

$$\widehat{\pi}(x, A, c)\varphi(\xi) = c^{3/2}e^{-2\pi i\langle y,\xi\rangle}\sigma(A)\varphi(cA^{-1}\xi) \quad ((x, A, c) \in G, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathcal{H}_\pi))$$

とユニタリ同値となる。σ は既約であるから有限次元表現であり、$\mathcal{H}_\sigma$ の次元を $2m + 1(m \quad 1)$ とする。H_σ をウェイト分解することにより、$L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\sigma)$ は適当な既約部分空間 $\mathcal{H}_k(-m \quad k \quad m)$ に完全に分解される。つまり、

$$L^2(\mathbb{R}^3, \mathcal{H}_\sigma) = \bigoplus_{k=-m}^{k=m} \mathcal{H}_k$$

と既約分解される。従って、$\widehat{\pi}$ は

$$\widehat{\pi} = \bigoplus_{k=-m}^{k=m} \widehat{\pi}|_{\mathcal{H}_k}$$

と既約分解される。$\widehat{\pi}_k := \widehat{\pi}|_{\mathcal{H}_k}$ が零でないアドミッシブル・ベクトル $\varphi \in \mathcal{H}_k$ をもつならば、任意の $\psi \in \mathcal{H}_k$ に対して

$$\int_G |\langle \psi, \widehat{\pi}_k(x, A, c)\varphi\rangle|^2 \frac{dxdAdc}{c^4} = \|\psi\|^2 \int \langle \varphi(A, c), \varphi(A, c)\rangle \frac{dAdc}{c^2} < \infty$$

とならなければならないが、実際、$\widehat{\pi}_k$ はそのようなアドミッシブル・ベクトルをもつということが示せる。

$\mathcal{H}_k$ の構成やどのような零でないアドミッシブル・ベクトル $\varphi \in \mathcal{H}_k$ がとれるかということは講演で述べる予定である。

H の自明な表現から誘導される G の表現、即ち、準正則表現はスカラー値関数空間に実現される表現であるが、一般に H の自明でない表現から誘導される G の表現はベクトル値関数空間に実現される。この表現は既約ユニタリ表現とはならないから、まず既約分解を行うことが必要である。その上で、既約ユニタリ部分表現が２乗可積分な部分表現となる条件や、具体的にどのような零でないアドミッシブル・ベクトルをとってくるかということが問題となる。講演者は現在、それらを研究課題としている。

参考文献

[1] A. Grossmann, J. Morlet and T. Paul, *Transforms associated to square integrable group representations I. General results.*, J. Math. Phys, 1985, 2473-2479.

[2] A. Grossmann, J. Morlet and T. Paul, *Transforms associated to square integrable group representations II. Examples.*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 1986, 293-309.

[3] G. B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*, CRC press, 1995.

[4] S. T. Ali, J-P Antoine, and J-P. Gazeau, *Coherent States, wavelets and their generalizations*, Springer-Verlag, 2000.

[5] H. Fuhr, *Abstract harmonic analysis of continuous wavelet transform*, Springer, 2004.

Bregman 距離による非 Lipschitz な非線形写像

冨澤　佑季乃　(中央大学理工学研究科)*

概　　要

非線形問題は非拡大型の非線形写像の不動点を求める問題に帰着される. 出来る限り扱いやすい方法で不動点への強収束を得る事は重要な問題である. また, Bregman (1967) は距離を一般化した関数を導入し最適化アルゴリズムの効果的な方法を発見した. 本文では, Bregman 距離に関して非 Lipschitz な非線形写像を新たに導入し, その不動点集合の性質と近似法を紹介する.

1. 準備

$\mathbf{N}$ を非負整数の集合, $\mathbf{R}$ を実数の集合とする. E を反射的な実 Banach 空間, $\|\cdot\|$ を E のノルム, E^* を E の共役空間, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を E と E^* 間の組とする.

1.1. 劣微分

$f : E \to (-\infty, +\infty]$ を関数とする. f が **proper** であるとは f の有効な定義域 $\mathrm{dom} f := \{x \in E : f(x) < +\infty\}$ が空でないことをいう. f の有効な定義域の内部を $\mathrm{int}\,\mathrm{dom} f$ で表す. f が**凸**であるとは $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ がすべての $x, y \in E$ と $\alpha \in (0,1)$ に対して成り立つことをいう. f が**下半連続**であるとはすべての $x \in E$ に対して $\liminf_{y \to x} f(y) \ge f(x)$ が成り立つことをいう. f が **strongly coercive** であるとは $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x)/\|x\| = +\infty$ を満たすことをいう. f の **Fenchel 共役**関数とは次で定義される凸関数 $f^* : E^* \to (-\infty, +\infty]$ のことである:

$$f^*(\xi) := \sup\{\langle \xi, x\rangle - f(x) : x \in E\}.$$

$f : E \to (-\infty, +\infty]$ を凸関数, $x \in \mathrm{int}\,\mathrm{dom} f$ とする. 任意の $y \in E$ に対して次の極限を考える:

$$f^\circ(x, y) := \lim_{t \downarrow 0^+} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t}. \tag{1}$$

f が **Gâteaux 微分可能**であるとは, $x \in \mathrm{int}\,\mathrm{dom} f$ と $y \in E$ に対して常に (1) が存在するときをいう. このとき, x における f の**勾配**は線形関数 $\nabla f : E \to (-\infty, +\infty)$ で任意の $y \in E$ に対して $\langle \nabla f(x), y\rangle := f^\circ(x, y)$ で定義される. 任意の $x \in \mathrm{int}\,\mathrm{dom} f$ に対して, (1) が $\|y\| = 1$ となる $y \in E$ に関して一様に収束するとき, f は x において **Fréchet 微分可能** であるという. f が部分集合 $C \subset E$ 上で**一様 Fréchet 微分可能**であるとは $x \in C$ と $\|y\| = 1$ に対して (1) が一様に存在することである.

1.2. Bregman 距離

以降, $f : E \to (-\infty, +\infty]$ は E 上で proper かつ下半連続な凸関数であり $\mathrm{int}\,\mathrm{dom} f$ 上で Gâteaux 微分可能であるとする. f が **Legendre** (*cf.* [1]) であるとは次の二つの条件を満たすことをいう:

2010 Mathematics Subject Classification: 47H09, 47J25
キーワード：asymptotically quasi-nonexpansive in the intermediate sense, Legendre function, totally convex function, Bregman distance, Bregman projection.
* e-mail: tomizawa@gug.math.chuo-u.ac.jp

(L1) $\operatorname{int}\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ かつ f が Gâteaux 微分可能であり $\operatorname{dom}\nabla f = \operatorname{int}\operatorname{dom} f$;
(L2) $\operatorname{int}\operatorname{dom} f^* \neq \emptyset$ かつ f^* が Gâteaux 微分可能であり $\operatorname{dom}\nabla f^* = \operatorname{int}\operatorname{dom} f^*$.

例 1. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E = \mathbf{R}^n$ に対して次の f は Legendre 関数である:
(i) $f(x) = \|x\|^2/2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n x_j^2, \quad x \in \mathbf{R}^n$.
(ii) $f(x) = \sum_{j=1}^n (x_j \ln(x_j) - x_j), \quad x \in \{z \in \mathbf{R}^n : z_j \geq 0\}$. (Boltzmann-Shannon)
(iii) $f(x) = -\sum_{j=1}^n \ln(x_j), \quad x \in \{z \in \mathbf{R}^n : z_j > 0\}$. (Burg)

f から定まる **Bregman 距離**[1] (*cf.* [4]) とは次で定まる汎関数 $D_f : \operatorname{dom} f \times \operatorname{int}\operatorname{dom} f \to [0, +\infty)$ のことをいう:

$$D_f(y, x) := f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

例 2. 例 1 の (i)–(iii) に対応する Bregman 距離:
(i) $D_f(y, x) = \|y - x\|^2/2, \quad x, y \in \mathbf{R}^n$. (Euclid 距離)
(ii) $D_f(y, x) = \sum_{j=1}^n (y_j \ln(y_j/x_j) - y_j + x_j)$,
$x \in \{z \in \mathbf{R}^n : z_j > 0\}$, $y \in \{z \in \mathbf{R}^n : z_j \geq 0\}$. (Kullback-Leibler)
(iii) $D_f(y, x) = \sum_{j=1}^n (\ln(x_j/y_j) + y_j/x_j - 1)$, $x, y \in \{z \in \mathbf{R}^n : z_j > 0\}$.
(Itakura-Saito)

f が**全凸**であるとは, すべての点 $x \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f$ において次で定義される関数 $v_f(x, \cdot) : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ が $t > 0$ のとき必ず正の値になることをいう:

$$v_f(x, t) := \inf\{D_f(y, x) : y \in \operatorname{dom} f, \ \|y - x\| = t\}.$$

f が有界集合上で全凸[2] であるとは, 任意の空でない有界集合 $B \subset E$ に対して, 次で定義される関数 $v_f(B, \cdot) : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ が $t > 0$ のとき必ず正の値になることをいう:

$$v_f(B, t) := \inf\{v_f(x, t) : x \in B \cap \operatorname{int}\operatorname{dom} f\}.$$

1.3. Bregman 射影

関数 f が狭義凸で strongly coercive であるとき, 任意の点 $x \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f$ に対して $\operatorname{dom} f$ の空でない閉凸部分集合 C との Bregman 距離が最小になる点が一意に定まる. これより, 次で定まる写像 $\operatorname{proj}_C^f : \operatorname{int}\operatorname{dom} f \to C$ が一意に存在する:

$$\operatorname{proj}_C^f(x) := \arg\min\{D_f(y, x) : y \in C\}.$$

この写像を f に関する **Bregman 射影**[3] (*cf.* [4]) という.

補題 ([3], Corollary 4.4)**.** $f : E \to (-\infty, +\infty]$ を全凸な関数, C は $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$ の空でない閉凸部分集合, $x \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f$ とする. もし $z \in C$ ならば, 次の三つは同値である:
(i) $z = \operatorname{proj}_C^f(x)$.
(ii) z は次の変分不等式の一意解 z である : 任意の $y \in C$ に対して
$\langle \nabla f(x) - \nabla f(z), z - y \rangle \geq 0$.
(iii) $\hat{x}$ は次の不等式の一意解 z である : 任意の $y \in C$ に対して
$D_f(y, z) + D_f(z, x) \leq D_f(y, x)$.

[1] 一般的に, Bregman 距離は対称律と三角不等式を満たさない.
[2] f が proper で下半連続な凸関数ならば, f が有界集合上で全凸であることの必要十分条件は f が有界集合上で一様凸であることである ([2], [3]).
[3] E が Hilbert 空間で $f(\cdot) = \|\cdot\|^2/2$ のとき, Bregman 射影は距離射影である.

2. Lipschitz 性を持たない非線形写像

C を E の空でない閉凸部分集合, T を C からそれ自身への写像とする. T の不動点集合を $F(T)$ で表す. T が **Bregman nonexpansive** (Bregman 非拡大) であるとはすべての $x, y \in C$ に対して $D_f(Ty, Tx) \leq D_f(y, x)$ を満たすことをいう. Bregman 距離に対してLipschitz連続でない非拡大型写像を考える為に, 次を導入する: T が **Bregman asymptotically quasi-nonexpansive in the intermediate sense** (中間的意味の Bregman 漸近的準非拡大写像, 以下, BAQN) であるとは $F(T) \neq \emptyset$ かつ

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{p\in F(T),\ x\in C} \big(D_f(p, T^n x) - D_f(p, x)\big) \leq 0 \tag{2}$$

を満たす事をいう. BAQN 写像は Lipschitz 連続とは限らない.

例 3. $E = \mathbf{R}$, $C = [1/2, 3/2]$ かつ $T : C \to C$ を次で定義する:

$$Tx = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 1 - \sqrt{\frac{x-1}{2}}, & x \in (1, \frac{2}{3}]. \end{cases}$$

このとき $F(T) = \{1\}$ かつ任意の $x \in C$ と $n \geq 2$ に対して $T^n x = 1$ である. よって

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in C} \big(D_f(1, T^n x) - D_f(1, x)\big) \leq \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in C} D_f(1, T^n x) \leq 0$$

なので T は BAQN である. しかし, T は例 2 の Bregman 距離に対して Lipschitz 性を持たない.

定理 1. 関数 $f : E \to (-\infty, +\infty]$ が *Legendre* で E の有界集合上で全凸であるとする. ∇f^* は $\operatorname{int}\operatorname{dom} f^*$ の有界集合上で有界とする. C を $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$ の空でない閉凸部分集合であるとする. 写像 $T : C \to C$ が閉かつ *BAQN* であるとする. このとき $F(T)$ は閉かつ凸である.

3. 主結果

定理 1 より Bregman 射影を用いた不動点近似法を考える事が出来る. BAQN 写像に対して次の強収束定理が得られる:

定理 2. $f : E \to (-\infty, +\infty]$ を *strongly coercive* な *Legendre* 関数で E の有界集合上で有界で一様 *Fréchet* 微分可能かつ全凸とする. ∇f^* は $\operatorname{int}\operatorname{dom} f^*$ の有界集合上で有界であるとする. C を $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$ の空でない閉凸部分集合, 写像 $T : C \to C$ は閉かつ *BAQN* であり, $F(T)$ は有界であるとする. T は任意の $x \in C$ に対して $\lim_{n\to\infty} \|T^{n+1}x - T^n x\| = 0$ を満たすとする. $x_0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom} f$, $C_1 = C$ *and* $x_1 = \operatorname{proj}^f_{C_1} x_0$ とする. C 内の点列 $\{x_n\}$ を次で構成する*:*

$$\begin{cases} y_n = \nabla f^*\big(\alpha_n \nabla f(x_n) + (1-\alpha_n)\nabla f(T^n x_n)\big), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : D_f(z, y_n) \leq D_f(z, x_n) + \xi_n\}, \\ x_{n+1} = \operatorname{proj}^f_{C_{n+1}} x_0,\ n \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

ただし, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $0 \leq \alpha_n \leq a < 1$ である. このとき $\{x_n\}$ は T の不動点 $\operatorname{proj}^f_{F(T)} x_0$ に強収束する.

E が Hilbert 空間で $f(x) = \|x\|^2/2$ のとき, 定理 2 から次が得られる.

系 ([10], Theorem 4.1)**.** *H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合とする. T を C からそれ自身への非拡大写像として, $F(T)$ が空でないとする. P_K は $K \subset H$ への距離射影とする. $x_0 \in H$, $C_1 = C$ かつ $u_1 = P_{C_1}x_0$ とする. 点列 $\{x_n\}$ を次で定義する:*

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, \quad n \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

ただし, すべての $n \in \mathbf{N}$ に対して $0 \le \alpha_n \le a < 1$ であるとする. このとき点列 $\{x_n\}$ は T の不動点 $P_{F(T)}x_0$ へ強収束する.

4. 今後の展望

今回は Bregman 距離 $D_f(y,x)$ の x に対する射影 (一般的に Bregman 左射影と呼ばれる) についての結果を述べた. 一方, y に対する射影 (Bregman 右射影) についても未発表であるが定理 1, 2 に対応する定理が得られている. 今後の課題は, 以上の定理を基に Bregman 距離に関する非線形問題の解に関する近似を得る事である.

参考文献

[1] Bauschke, HH, Borwein, JM, Combettes, PL: Essential smoothness, essential strict convexity, and Legendre functions in Banach spaces. Commun. Contemp. Math. **3**, 615–647 (2001)

[2] Butnariu, D, Iusem, AN, Zălinescu, C: On uniform convexity, total convexity and convergence of the proximal point and outer Bregman projection algorithms in Banach spaces. J. Conv. Anal. **10**, 35–61 (2003)

[3] Butnariu, D, Resmerita, E: Bregman distances, totally convex functions, and a method for solving operator equations in Banach spaces. Abstr. Appl. Anal. Art. ID 84919, 1–39 (2006)

[4] Censor, Y, Lent, A: An iterative row-action method for interval convex programming. J. Optim. Theory Appl. **34**, 321–353 (1981)

[5] Goebel, K, Kirk, WA: A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings. Proc. Amer. Math. Soc. **35**, 171–174 (1972)

[6] Inchan, I: Strong convergence theorems of modified Mann iteration methods for asymptotically nonexpansive mappings in Hilbert spaces. Int. J. Math. Anal. **2**, 1135–1145 (2008)

[7] Martin-Marquez, V, Reich, S, Sabach, S: Iterative methods for approximating fixed points of Bregman nonexpansive operators. Discrete Contin. Dyn. Syst. **6**, 1043–1063 (2013)

[8] Reich, S, Sabach, S: Two strong convergence theorems for a proximal method in reflexive Banach spaces. Numer. Funct. Anal. Optim. **31**, 22–44 (2010)

[9] Schu, J: Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings. Bull. Austral. Math. Soc. **43**, 153–159 (1991)

[10] Takahashi, W, Takeuchi, Y, Kubota, R: Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces. J. Math. Anal. Appl. **341**, 276–286 (2008)

反応拡散方程式の進行波解の安定性に対する力学系的アプローチ

関坂　歩幹

東北大学大学院理学研究科数学専攻

1 Introduction

空間一次元上に定義される半線型放物型偏微分方程式の進行波と呼ばれる解の固有値問題を考える．このように与えられた方程式が持つ進行波は化学反応の伝搬，生物の固体分布，神経軸索上を伝わる電気パルスなど幅広い分野で応用されている．現実の系では，モデル化された方程式の内部の相互作用以外に系の外部からのノイズが現象に影響を与えるため，僅かな摂動によって壊れてしまうような解は観察されることが期待できない．それゆえに，発見した進行波の漸近安定性が問題となる．進行波の安定性を示す方法の一つに，方程式の進行波における線形化固有値問題を調べるという方法がある．Alexander–Gardner–Jones は固有値問題を球面上のベクトル束の分類問題に帰着させることにより，複素平面の有界閉集合上の固有値の個数とベクトル束の第一 Chern 数が一致するという結果を得た．この結果から，進行波の固有値問題の幾何学的性質は，線型部分空間のモジュライ空間である Grassmann 多様体上に誘導された微分方程式が特徴付けることがわかる．本稿ではまず Alexander–Gardner–Jones らの結果を簡単に紹介し，その後，ある条件のもとで絶対スペクトルという領域に固有値の集積が起きることを述べる．

2 反応拡散系の進行波と Stability Index

2.1 進行波と漸近安定性

空間一次元の次の系を考える：

$$u_t = Bu_{xx} + f(u)\ ,\ u(t,x) \in \mathbb{R}^n\ ,\ t > 0\ ,\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

ただし $u(t,x) \in \mathbb{R}^n$ であり，B は正定値対角行列とし $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は十分なめらかとする．さらに f は零点 $u_\pm$ を持つとし (2.1) の定数定常解 $u_\pm$ は線型安定であるとする．すなわち，(2.1) の $u = u_\pm$ における線形化 $p_t = L_\pm p = Bp_{xx} + Df(u_\pm)$ に対し次を仮定する．

仮定 2.1. L_0 のスペクトルを $\sigma(L_\pm)$ とするとき，ある負の数 β に対し $\sigma(L_\pm)$　$\{\lambda | \mathrm{Re}\ \lambda < \beta\}$ が成り立つ．

定数 c に対し $\xi = x$　ct とおき，方程式 (2.1) を (t,ξ) 座標で書き直すと次のようになる．

$$u_t = Bu_{\xi\xi} + cu_\xi + f(u)\ ,\ u(t,x) \in \mathbb{R}^n\ ,\ t > 0\ ,\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

これは方程式 (2.1) を空間方向に一定速度 c で平行移動する座標系でみたものであり，(2.2) の定常解 $u(t,\xi) = u(\xi)$ は元の方程式 (2.1) では一定の波形を保ったまま速度 c で平行移動する解に対応する．この解を進行波と

b0sd1007@math.tohoku.ac.jp

呼ぶ.

方程式 (2.1) において進行波が存在することと，(2.2) の定常問題

$$Bu_{\xi\xi} + cu_\xi + f(u) = 0. \tag{2.3}$$

を一階の形に書き直した方程式

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= \quad B^{-1}(f(u) + cv) \end{aligned} \tag{2.4}$$

において $\lim_{\xi\to-\infty}(u(\xi), u'(\xi)) = (u_-, 0)$ および $\lim_{\xi\to\infty}(u(\xi), u'(\xi)) = (u_+, 0)$ を見たす解 $(u(\xi), u'(\xi))$ が存在することと同値である．$u_- \neq u_+$ のとき $(u(\xi), u'(\xi))$ をヘテロクリニック解と呼び，$u_- = u_+$ のとき $(u(\xi), u'(\xi))$ をホモクリニック解と呼ぶ．常微分方程式 (2.4) を進行波方程式と呼ぶ.

進行波の安定性の十分条件として次の事実が知られている.

事実 2.2. [1] 方程式 (2.2) の $u(\xi)$ における線形化 $p_t = Lp := Bp_{\xi\xi} + cp_\xi + Df(u(\xi))p$ を考えるとき，L のスペクトル $\sigma(L)$ が次を満たすならば $u(\xi)$ は漸近安定である．ただし，L は Banach 空間 $BU(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ 上で考える.

- $\sigma(L) \setminus \{0\} \quad \{\lambda | \mathrm{Re}\ \lambda < \beta\}$. ただし β は仮定 2.1 におけるものとする.
- $\{0\}$ は L の単純固有値.

このような条件の下，進行波の安定性は線形化作用素の固有値問題に帰着される．L は二階の常微分作用素であるので，その固有値問題

$$Lp = Bp_{\xi\xi} + cp_\xi + Df(u(\xi))p = \lambda p \tag{2.5}$$

は二階の常微分方程式とみなすことができる．これを次の一階の方程式の形で扱う.

$$\begin{aligned} p' &= q \\ q' &= B^{-1}(\lambda \quad DF(u(\xi)))p \quad cB^{-1}q \end{aligned} \tag{2.6}$$

ただし $'$ は ξ による微分を表すものとする．この式は $\mathbb{C}^{2n}$ 上の非自励的常微分方程式系である．これを簡単に,

$$Y' = A(\xi; \lambda)Y \tag{2.7}$$

と書く．行列 $A(\xi; \lambda)$ は $\xi \to \quad$ のとき

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} A(\xi; \lambda) = A_\pm(\lambda) := \begin{matrix} 0 & I_n \\ B^{-1}(\lambda \quad DF(u_\pm)) & cB^{-1} \end{matrix} \tag{2.8}$$

を満たし，$u_\pm$ に対する仮定 2.1 の元では $\mathrm{Re}\ \lambda > \beta$ ならば $A_\pm$ は実部正の固有値と実部負の固有値を n 個ずつ持つ．これは方程式 (2.7) が $\xi \to \quad \infty$ のとき 0 に収束する n 個の一次独立な解 $Y_1(\xi; \lambda), \quad , Y_n(\xi; \lambda)$ と $\xi \to \infty$ のとき 0 に収束する n 個の一次独立な解 $Y_{n+1}(\xi; \lambda), \quad , Y_{2n}(\xi; \lambda)$ を持つことを意味する．これら $2n$ 個の解と L の固有値の間に次のことが成り立つことが知られている.

事実 2.3. λ が L の固有値であることと $Y_1(\xi; \lambda), \quad , Y_n(\xi; \lambda), Y_{n+1}(\xi; \lambda), \quad , Y_{2n}(\xi; \lambda)$ が一次従属であることは同値である.

方程式 (2.7) を次のようにして $\mathbb{C}^{2n} \quad [\ \ 1, 1]$ 上の自励系として扱う：

$$\begin{aligned} Y' &= A(\tau; \lambda)Y \\ \tau' &= \kappa(1 \quad \tau^2). \end{aligned} \tag{2.9}$$

ただし $\tau(\xi) = \frac{e^{2\kappa\xi}-1}{e^{2\kappa\xi}+1}$ として

$$A(\tau; \lambda) = \begin{cases} A(\xi(\tau), \lambda) & (\tau \neq \quad 1) \\ A_\pm(\lambda) & (\tau = \quad 1) \end{cases} \tag{2.10}$$

と定める．ここで κ は十分小さいとする．

$A_\pm(\lambda)$ の実部正の固有値に属する固有ベクトルを $Y_1^\pm(\lambda),\quad ,Y_n^\pm(\lambda)$ とすると，

$$E_{\lambda,\tau} := \mathrm{span}\{Y_1(\xi(\tau);\lambda),\quad ,Y_n(\xi(\tau);\lambda)\} \tag{2.11}$$

は $\tau \to \quad 1$ つまり $\xi \to \quad \infty$ のとき $E_{\lambda,-1} := \mathrm{span}\{Y_1^-(\lambda),\quad ,Y_n^-(\lambda)\}$ に収束する．これは式 (2.7) が Grassmann 多様体上に flow を誘導していることを意味している．$E_{\lambda,\pm} := \mathrm{span}\{Y_1^\pm(\lambda),\quad ,Y_n^\pm(\lambda)\}$ とおく．空間

$$\mathcal{B} = (K^\circ \quad \{+1\}) \cup (K \quad I) \cup (K^\circ \quad \{\quad 1\}) \tag{2.12}$$

上の写像 $\mathcal{G}$ を構成する．$\mathcal{B}$ はシリンダー $K \quad I$ に K° の蓋をしたものである．K は単純閉曲線なので，$\mathcal{B} \cong S^2$ である．写像 $\mathcal{G} : \mathcal{B} \to G_k(\mathbb{C}^{2n})$ を次のように定義する．

$$\mathcal{G}(\lambda,\tau) := \begin{cases} E_{\lambda,-1} & \lambda \in K^\circ, \tau = \quad 1. \\ E_{\lambda,\tau} & \lambda \in K, \tau \in I \\ E_{\lambda,+1} & \lambda \in K^\circ, \tau = +1. \end{cases} \tag{2.13}$$

$\mathcal{B}$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}(K)$ は $G_n(\mathbb{C}^{2n})$ 上の n 次元普遍ベクトル束 $\Gamma_n(\mathbb{C}^{2n})$ の引き戻し束として定義される．

定義 2.4. (Alexander–Gardner–Jones bundle)

$$\mathcal{E}(K) := \mathcal{G}\ \ \Gamma_n(\mathbb{C}^{2n}) \tag{2.14}$$

を Alexander–Gardner–Jones 束と呼ぶ．

定理 2.5. (Alexander–Gardner–Jones[1]) $\mathcal{E}(K)$ の第一 Chern 数 $c_1(\mathcal{E}(K))$ は K° 内の L の固有値の個数に重複度を込めて一致する．

定義 2.6. $c_1(\mathcal{E}(K))$ を Stability index と呼ぶ．

3 index の局所化と絶対スペクトル

固有値問題の幾何学的性質は Grassmann 多様体上の flow により抽出されることを定理 2.5 が教えてくれている．本節では Grassmann 多様体上の flow を考えることにより固有値の集積が起きるときの幾何学的性質を明らかにできることを述べる．式 (2.1) の f はパラメータ $\in \mathbb{R}^k$ に依存するとする．すなわち

$$u_t = Bu_{xx} + f(u,\ ). \tag{3.1}$$

を考える．方程式 (3.1) の進行波の存在問題は進行波方程式

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= \quad B^{-1}(f(u,\ ) + cv) \end{aligned} \tag{3.2}$$

のヘテロクリニックおよびホモクリニック解の存在問題に帰着される．ここで式 (3.7) に次のような仮定をおく．

仮定 3.1. ある $(c_0,\ _0)$ においてヘテロクリニック解 $h_f(\xi)$ および $h_b(\xi)$ で次の性質を満たすものを持つ．

$$\lim_{\xi\to-\infty} h_f(\xi) = u_-, \quad \lim_{\xi\to\infty} h_f(\xi) = u_+, \tag{3.3}$$

$$\lim_{\xi\to-\infty} h_b(\xi) = u_+, \quad \lim_{\xi\to\infty} h_b(\xi) = u_-. \tag{3.4}$$

さらに，$(c_0,\ _0)$ の近傍 N に含まれる部分集合 $\mathcal{H}$ で，任意の $(c,\ ) \in \mathcal{H}$ において $|\xi| \to \infty$ で $(u_-, 0)$ に収束するホモクリニック解 $h_p(\xi)$ を持ち，

$$d_H(\{h_p(\xi)|\xi\in\mathbb{R}\}, \{h_f(\xi)|\xi\in\mathbb{R}\} \cup \{h_b(\xi)|\xi\in\mathbb{R}\}) \to 0, \quad ((c,\ ) \to (c_0,\ _0) \text{ in } \mathcal{H}) \tag{3.5}$$

を満たすものが存在する．ただし $d_H(\ ,\ )$ はハウスドルフ距離を表す.

ホモクリニック解 $h_p(\xi) = (u_p(\xi), u_p'(\xi))$ に対応するパルス $u_p(\xi)$ の線形化固有値問題

$$L_p p = \lambda p \tag{3.6}$$

を一階の常微分方程式に書き直す：

$$Y' = A_p(\xi;\lambda)Y. \tag{3.7}$$

仮定 3.1 より，$(c,\ )$ が $(c_0,\ _0)$ に十分近ければ，ホモクリニック解 $h_p(\xi)$ は式 (3.7) の平衡点 $(u_+, 0)$ の近くを通る．したがって $(u_+, 0)$ の近傍 $\mathcal{N}$ 内で $h_p(\xi)$ が横断的に交わる超平面 $\ _f,\ _b$ をとる．ただし $\ _f,\ _b$ はヘテロクリニック解 $h_f(\xi), h_b(\xi)$ がそれぞれ横断的に交わるようなものとする．$h_p(\xi)$ が $\ _f,\ _b$ の上にあるときの ξ をそれぞれ ξ_f, ξ_b とおく．このとき行列 $A_p(\xi;\lambda)$ は $\xi_f \le \xi \le \xi_b$ において $A_+(\lambda)$ に十分近いように $(c,\ )$ がとれる．このとき $[\xi_f, \xi_b]$ において線型常微分方程式を考える：

$$Y' = A_+(\lambda)Y. \tag{3.8}$$

このとき $A_+(\lambda)$ の固有値 $\mu_+^1(\lambda),\quad , \mu_+^{2n}$ を次のように順番付けしておく：

$$\mathrm{Re}\ \mu_+^1(\lambda) \ge \mathrm{Re}\ \mu_+^2(\lambda) \ge \quad \ge \mu_+^{2n}. \tag{3.9}$$

$A_-(\lambda)$ の固有値で実部正であるものの個数を i_Ω で表す．ただし $\Omega \quad \mathbb{C} \setminus \sigma_e(L)$ は単連結領域とする．このとき Ω の部分集合として

$$\overset{\Omega}{}_{abs} := \{\lambda \in \Omega | \mathrm{Re}\ \mu_+^{i_\Omega}(\lambda) = \mathrm{Re}\ \mu_+^{i_\Omega+1}(\lambda)\} \tag{3.10}$$

を考える．これは大雑把に言うと式 (3.8) において回転しながら原点から離れていく（近づく），あるいは原点を中心に回転する解を持つことを意味しているが，しかるべき仮定のもとで L_p の固有値と次のような対応が付く.

定理 3.2. $(c,\ )$ が $(c_0,\ _0)$ に十分近ければ，任意の自然数 N に対して $\ \overset{\Omega}{}_{abs}$ に L_p の固有値が N 個存在する.

$\overset{\Omega}{}_{abs}$ を絶対スペクトルと呼ぶ．なぜ絶対スペクトルに固有値が集積するのか，なぜ回転することで固有値が発生するのかは，式 (3.8) が射影空間および Grassmann 多様体上に誘導する flow の性質を調べることにより明らかになるが，詳細は講演で述べたい.

参考文献

[1] J. Alexander, R. Gardner, C. Jones, *A topological invariant arising in the stability analysis of travelling waves*, J. Reine Angew. Math **410**,(1990).

[2] S. Nii , *Accumlation of eigenvalues for linear stability problem if traveling pulses bifurcating from coexisting unstable front and back waves*, Phycica D **Vol 142**(2000) 70-86.

[3] B.Sandstede and A.Scheel, *Gruing unstable fronts and back together can produce stable*, Nonlinearity **Vol.13**,(2000) 1465-1482.

[4] B.Sandstede and A.Scheel, *Absolute and convective instabilities of waves on unbounded and large bounded domains*, Phycica D **Vol 145**(2000) 233-277.

パラレルセッション
会場C

分類空間のループ余積と Van den Bergh 同型写像

内藤貴仁 *
信州大学 理学部 数理・自然情報科学科

概要

Chataur-Menichi により，コンパクト連結リー群の分類空間上のストリングトポロジーの理論が創始された．特にホモロジー上に，ループ余積と呼ばれる余代数構造が構成された．本講演では，分類空間上のループ余積と Van den Bergh により構成された Calabi-Yau 代数の Hochschild ホモロジーと Hochschild コホモロジーを繋ぐポアンカレ双対型の同型写像との関係について述べたい．

1 導入（ストリングトポロジー）

Chas-Sullivan([1]) によって創始されたストリングトポロジーの理論により，有向閉多様体 M の自由ループ空間 $\mathcal{L}M = \mathrm{Map}(S^1, M)$（つまり円周 S^1 から M への連続写像全体の成す空間）のホモロジー（以後**ループホモロジー**と呼ぶ）には次数付き代数や Batalin-Vilkovisky 代数といった豊かな代数構造が入る事が示された．特にこの次数付き可換代数構造はループ積と呼ばれ，多様体のホモロジー上に定義される交差積を自由ループ空間のホモロジーに持ち上げたものになっている．更にこの代数構造は，様々な一般化がなされれてきた．例えば，Cohen-Godin([3]) による，（余単位元を持たない）2 次元位相的量子場理論，つまり Frobenius 代数構造や，Godin([8]) によるホモロジー的共形場の理論といった数理物理を起源とする構造を持つ事が発見された．

さてストリングトポロジーの理論は多様体とは限らない空間においても考えられている．例えば，Chataur-Menichi はコンパクト連結リー群 G の分類空間 BG 上でストリングトポロジーの理論を展開を行っている．更に一般的に Félix-Thomas は，Gorenstein 空間と呼ばれる位相空間上でストリングトポロジーの理論を展開した．ここで Gorenstein 空間とは，ポアンカレ双対空間（特に有向閉多様体）やコンパクト連結リー群の分類空間，Borel 構成といった空間を含むクラスを成している事に注意しておく．

一方，BG の Sullivan モデルとして有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の次数付き多項式環 $A = \mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n]$（ただし，$\deg x_i$ は 2 以上の偶数）がとれる．また A は，（Ginzburg([7]) の意味での）Calabi-Yau 代数であることが知られている．更に Calabi-Yau 代数に対して，Van den Bergh([11]) により，Hochschild ホモロジーと Hochschild コホモロジーの間のポアンカレ双対型の同型写像

$$\Theta : HH_*(A, A) \xrightarrow{\cong} HH^*(A, A)$$

が構成された．

本稿では，コンパクト連結リー群のループホモロジーに定義される**ループ余積**と呼ばれる余積構造と上記の Van den Bergh の同型写像 Θ に関する筆者が得られた結果について紹介したい．

* naito@math.shinshu-u.ac.jp

2 準備

この章では, 主定理を紹介する為の準備を行う．以後, 簡単の為, $\mathbb{K}$ を体とし, $A=(A,d)$ を次数付き可換な $\mathbb{K}$ 上 dg 代数とする．

定義 1. ([5, §6 p.69]) A-加群 (P,d) が A-**semifree 加群**であるとは，P の部分 A-加群の列

$$P(0)\subset\cdots\subset P(k-1)\subset P(k)\subset\cdots\subset\bigcup_{k\geq 0}P(k)=P$$

で，$P(0)$ 及び各 $P(k)/P(k-1)$ が自由 A 加群で，その基底が cycle であるようなものが存在するものである．また A-加群 (M,d) に対し，semifree 加群 (P,d) 及び疑同型である A-加群の射 $\varepsilon:P\to M$ を (M,d) の A-**semifree 分解**と呼ぶ．

左 A-加群 L と, 右 A-加群 M と N に対し,

$$\mathrm{Tor}^*_A(M,L):=H^*(P\otimes_A L),\ \mathrm{Ext}^*_A(M,N):=H^*(\mathrm{Hom}_A(P,N))$$

と定義する．ただし $\varepsilon:P\to M$ を M の A-semifree resolution である．（詳しくは [4, Appendix] を見てもらいたい）．特に，L，M の A-加群構造が代数写像 $f:A\to L$, $g:A\to M$ で与えられており，その作用を強調したい時は,

$$\mathrm{Tor}^*_A(M,L)_{f,g}:=\mathrm{Tor}^*_A(M,L)$$

と記述することにする．また

$$HH_*(A,A):=\mathrm{Tor}^*_{A\otimes A^{op}}(A,A),\ HH^*(A,A)=\mathrm{Ext}^*_{A\otimes A^{op}}(A,A)$$

と置き，それぞれ **Hochschild ホモロジー**，**Hochschild コホモロジー**と呼ぶ．ただし，A^{op} は A の opposite 代数であり，A の $A\otimes A^{op}$-加群構造は，A の自然な A-A 両側加群構造から決まるものとする．また $HH^*(A,A)$ には，**カップ積**と呼ばれる積により，代数構造が与えられる事が知られている．

次に，Félix-Thomas による Gorenstein 空間上のストリングトポロジーについて少し触れることにする．まず Gorenstein 空間とは次で定義される位相空間である．

定義 2 ([4])**.** 位相空間 M が次の条件を満たす時, 次元 d の $\mathbb{K}$-**Gorenstein 空間**と呼ぶ :

$$\mathrm{Ext}^*_{C^*(M)}(\mathbb{K},C^*(M))\cong\begin{cases}0 & (*\neq d)\\ \mathbb{K} & (*=d).\end{cases}$$

ここで $C^*(M)$ は M の $\mathbb{K}$ 上特異コチェイン代数である．

この定義では, 直感的にどのような空間が Gorenstein 空間なのかは分からないが, 例えば $\mathbb{K}$-ポアンカレ双対空間（特に有向閉多様体）は $\mathbb{K}$-Gorenstein 空間であり，Gorenstein 空間としての次元とポアンカレ双対空間としての次元は一致する．またコンパクト連結リー群 G の分類空間も Gorenstein 空間であり，次元は $-\dim G$ で与えられる．

さて，Gorenstein 空間に対して Félix-Thomas は次の定理を示した．これは，Gorenstein 空間上でストリングトポロジーを展開するための鍵となる定理である．

定理 3 ([6])**.** M を単連結な次元 d の $\mathbb{K}$-Gorenstein 空間で，$\mathbb{K}$ 上コホモロジーが有限型であるものとする．この時，$\mathbb{K}$ 上ベクトル空間として次は同型である :

$$\mathrm{Ext}^*_{C^*(M^{\times 2})}(C^*(M),C^*(M^{\times 2}))\cong H^{*-d}(M;\mathbb{K}).$$

ここで $C^*(M)$ は，対角写像 $M \to M^{\times 2}$ から誘導された射により $C^*(M^{\times 2})$-加群とみなす．

この定理の $* = d$ の場合を見ると，次の同型が得られる：

$$\mathrm{Ext}^d_{C^*(M^{\times 2})}(C^*(M), C^*(M^2)) \cong H^0(M;\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}.$$

単位元 $1 \in \mathbb{K}$ に対応する，$\mathrm{Ext}^d_{C^*(M^{\times 2})}(C^*(M), C^*(M^2))$ の元を $\Delta^! : P \to C^*(M^{\times 2})$ と置くことにする．ここで $\varepsilon : P \to C^*(M)$ は $C^*(M)$ の $C^*(M^{\times 2})$-semifree resolution である．特に M が有向閉多様体の時は，$\Delta^!$ が誘導するコホモロジー間の写像

$$H(\Delta^!) : H^*(M) \longrightarrow H^{*+d}(M \times M)$$

の双対が交差積である．Félix-Thomas は，この定理を用いて Gorenstein 空間上のストリングトポロジーの理論を構築した．特に写像 $\Delta^!$ を用いて**双対ループ余積**と呼ばれるコホモロジー上の余代数構造

$$H^*(\mathcal{L}M;\mathbb{K}) \otimes H^*(\mathcal{L}M;\mathbb{K}) \longrightarrow H^*(\mathcal{L}M;\mathbb{K})$$

を構成した．詳細は [6] を参照して欲しい．

さて，双対ループ余積は，栗林，Menichi と筆者 ([10]) によって Eilenberg-Moore の同型写像を通じて Tor 関手を用いた記述が与えられている．ここで係数体 $\mathbb{K}$ が有理数体 $\mathbb{Q}$ の場合に，その記述について紹介する．M を単連結な次元 d の $\mathbb{K}$-Gorenstein 空間で，$\mathbb{K}$ 上コホモロジーが有限型であるものとし，A を M の Sullivan モデルとする．ここで Sullivan モデルの詳しい説明を述べる事は出来ないが，A は次数付き可換な $\mathbb{Q}$ 上微分代数であり，その性質として，擬同型な代数写像の列

$$C^*(M;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} \cdots \xleftarrow{\simeq} A$$

を持つ．詳しくは [5] を参照して欲しい．さらに，$\mu : A^{\otimes 2} \to A$ を A の積，$\nu : A^{\otimes 4} \to A^{\otimes 2}$，$\alpha : A^{\otimes 4} \to A^{\otimes 2}$ を

$$\begin{aligned}
\nu(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) &= (-1)^{\deg a_4(\deg a_1 + \deg a_2 + \deg a_3)} a_4 a_1 \otimes a_2 a_3, \\
\alpha(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) &= a_1 \otimes a_2 a_3 a_4
\end{aligned}$$

で与えられる写像とする．この時，写像 Dlcop を次の可換図式で定義する：

$$\begin{array}{ccc}
HH_*(A,A) \otimes HH_*(A,A) & \xrightarrow[\cong]{\otimes} & \mathrm{Tor}_{A^{\otimes 4}}(A^{\otimes 2}, A^{\otimes 2})_{\mu\otimes\mu,\mu\otimes\mu} \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tor}_1(\mu,1)} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Dlcop}} & & \mathrm{Tor}_{A^{\otimes 4}}(A, A^{\otimes 2})_{\mu(\mu\otimes\mu),\mu\otimes\mu} \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tor}_1(\Delta^!,1)} \\
HH_*(A,A) & \xleftarrow{\mathrm{Tor}_\alpha(\mu,\mu)} & \mathrm{Tor}_{A^{\otimes 4}}(A^{\otimes 2}, A^{\otimes 2})_{\nu,\mu\otimes\mu}.
\end{array}$$

定理 4. ([10]) Eilenberg-Moore 同型写像は，代数写像である*:*

$$\mathrm{EM} : (HH_*(A,A), \mathrm{Dlcop}) \xrightarrow{\cong} (H^*(\mathcal{L}M;\mathbb{Q}), \text{双対ループ余積}).$$

3 主定理

この章では，$A = \mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n]$ を分類空間 BG の Sullivan モデルとする．分類空間上のストリングトポロジーの理論は Chataur-Menichi([2]) に始まり，栗林-Menichi([9]) により調べられている．次の定理は，彼らの結果の有理数係数の場合である．

定理 5. ([9]) 次の代数としての同型が存在する：

$$(H^*(\mathcal{L}BG; \mathbb{Q}), \text{双対ループ余積}) \cong (HH^*(A, A), \text{カップ積}).$$

彼らはこの結果を，それぞれのホモロジーを計算し，その結果を見て対応付けを行う事により示している．一方，著者は Van den Bergh の同型写像 Θ と Dlcop との関係を考察する事により次の結果を得ることが出来た．

定理 6. Van den Bergh の同型写像 Θ に対し，次は代数写像である：

$$-\Theta : (HH_*(A, A), \text{Dlcop}) \xrightarrow{\cong} (HH^*(A, A), \text{カップ積}).$$

参考文献

[1] M. Chas and D. Sullivan, String topology, arXiv:math.GT/9911159.

[2] D. Chataur and L. Menichi, String topology of classifying spaces, arXiv:math.AT/0801.0174.

[3] R. L. Cohen, V. Godin, A polarized view of string topology, Topology, geometry and quantum field theory, 127-154, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[4] Y. Félix, S. Halperin, J. -C. Thomas, Gorenstein spaces. Adv. in Math. 71 (1988), no. 1, 92-112.

[5] Y. Félix, S. Halperin, J. -C. Thomas, Rational Homotopy Theory, Graduate Texts in Mathematics, 205. Springer-Verlag.

[6] Y. Félix and J. -C. Thomas, String topology on Gorenstein spaces, Math. Ann., 345 (2009), no. 2, 417-452.

[7] V.Ginzburg, Calabi-Yau algebras, arXiv:math.AG/0612139.

[8] V. Godin, Higher string topology operations, arXiv:math.AT/0711.4859.

[9] K. Kuribayashi and L. Menichi, On the loop (co)products on the classifying space of a Lie group, preprint.

[10] K. Kuribayashi, L. Menichi and T. Naito, Derived string topology and the Eilenberg-Moore spectral sequence, arXiv:1211.6833.

[11] M. Van den Bergh, A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings. Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 1345-1348; 130 (2002), 2809-2810.

微分空間の性質とその応用について

原口　忠之
環太平洋大学次世代教育学部

概要

可微分多様体を一般化した空間として定義された微分空間の基本的な性質を紹介する．特に，位相空間と深い関係があり，これらの間の関係について触れる．また，任意の微分空間には，ド・ラム・コホモロジーを定義できることが知られており，ホモトピー不変であることも証明されている．これらの応用として，マイヤー・ビエトリス完全系列の存在性を紹介すると同時に，完全系列が存在するような微分空間の例をあげる．

1　微分空間

微分空間は Kuo Tsai Chen [1] によって導入された differential space を起源として，J.-M. Souriau [5] によって，整備された概念であり，微分空間は次のように定義される．X を集合とし，D_X をユークリッド空間の任意の開集合から X への写像からなる集合とする．D_X が次の 3 つの条件を満たすとき，$(X,\ D_X)$ を微分空間とよぶ．

D1 X の任意の元 x と，0 以上の任意の整数 n に対して，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ から X への x に写す定置写像 $\mathbf{R}^n \to X$ は D_X の元になる．

D2 ユークリッド空間の開集合 U から X への任意の写像 $P\colon U \to X$ と，U の任意の元 r に対して，r の開近傍 V_r が存在して，V_r に制限した写像 $P|V_r$ が D_X の元であるならば，P も D_X の元である．

D3 D_X の任意の元 $P\colon U \to X$ とユークリッド空間の開集合の間の無限回微分可能写像 $Q\colon W \to U$ に対して，それらの合成写像 $P \circ Q\colon W \to X$ は D_X の元になる．

このとき，D_X を X の微分構造とよび，D_X の元 $P\colon U \to X$ を X のプロットとよぶ．

例 1.1. ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の微分構造 $D_{\mathbf{R}^n}$ をユークリッド空間の開集合から $\mathbf{R}^n$ への無限回微分可能写像全体からなる集合と定める．このとき，$D_{\mathbf{R}^n}$ は D1 から D3 の条件を満たすことは，容易に分かる．$(\mathbf{R}^n,\ D_{\mathbf{R}^n})$ を標準微分空間，$D_{\mathbf{R}^n}$ を標準微分構造とよぶ．ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ には今後，断らない限りこの微分構造を導入する．

微分空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ が滑らかな写像であるとは，X の任意のプロット $P\colon X \to Y$ に対して，合成写像 $f \circ P\colon U \to Y$ が Y のプロットになるときを言う．対象を微分空間とし，射を滑らかな写像で定める圏を **Diff** で表す．微分空間は，部分空間，直積，直和，商空間を定義でき，写像空間を定義できる．とくに，微分空間 $(X,\ D_X)$ の部分集合 A の微分構造 D_A を，$D_A = \{P\colon U \to A \mid j_A \circ P \in D_X\}$ とし，部分空間 $(A,\ D_A)$ を定める．ただし，$j_A\colon U \to A$ を包含写像とする．このとき，次の結果が知られている．

定理 1.2 ([2])**.** 圏 **Diff** は，*limit*，*colimit* に関して閉じており，デカルト閉圏である．

2 D-Topology

微分空間と位相空間の間には，関係性がある．それらを紹介すると同時に，微分空間における分離公理や，コンパクト性の定義を与える．微分空間 $(X,\ D_X)$ の部分集合 A が，D-開集合であるとは，X の任意のプロット $P\colon U \to X$ に対して，その逆像 $P^{-1}(A)$ が U の開集合になるときを言う．この D-開集合族 $O(D_X)$ は位相の公理を満たし，位相空間 $(X,\ O(D_X))$ を D-位相空間とよぶ．また，これを TX で表す．D-開集合で定義される A の閉包を $\overline{A}$ で表す．よって，位相空間の圏を **Top** とするとき，任意の微分空間 X を D-位相空間 TX に定める関手 $T\colon \mathbf{Diff} \to \mathbf{Top}$ が存在する．反対に，位相空間 $(Y,\ O_Y)$ において，Y の微分構造 $D(O_Y)$ をユークリッド空間の任意の開集合から Y への連続写像全体からなる集合とするとき，微分構造の 3 つの公理を満たす．この微分空間 $(Y,\ D(O_Y))$ を T-微分空間とよび，これを DY で表す．このとき，任意の位相空間 Y を T-微分空間 DY に写す関手 $D\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Diff}$ が存在する．関手 $T\colon \mathbf{Diff} \to \mathbf{Top}$ は $D\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Diff}$ の左随伴関手 [4] であることが知られている．

注意 2.1. 微分空間 $(X,\ D_X)$ の部分集合 A には，次のような位相の導入の仕方がある．

1. 部分空間 $(A,\ D_A)$ から誘導される D-位相空間 $(A,\ O(D_A))$
2. D-位相空間 $(X,\ O(D_X))$ から，相対位相を誘導する部分空間 $(A,\ O_A(D_X))$

このとき，微分空間の部分空間の定義の仕方から，2 つの位相は一致しているとは限らない．ただし，$O_A(D_X) \subset O(D_A)$ は常に満たされる．

注意 2.1 のようなことがあるので，D-位相空間を扱うときには，注意する必要がある．とくに微分空間におけるコンパクト性については，次のように微分空間の部分集合に定義する．

定義 2.2 (D-コンパクト [3])**.** 微分空間 X の部分空間 A が，X の D-コンパクトであるとは，X の D-開集合からなる A の任意の被覆は，A の有限被覆をもつときを言う．

次に，微分空間におけるパラコンパクト性を定義する．微分空間 X の被覆 $\{A_\lambda\}$ が局所有限であるとは，X の任意の元 x に対して，x の D-開近傍 U_x が存在して，U_x と共通部分をもつような A_λ は有限個だけ存在するときを言う．X の D-開集合からなる 2 つの被覆を $\{V_i\}_{i\in I},\ \{W_j\}_{j\in J}$ とする．$\{V_i\}_{i\in I}$ が $\{W_j\}_{j\in J}$ の細分であるとは，任意の $i \in I$ に対して，ある $j \in J$ が存在して $V_i \subset W_j$ を満たすときを言う．

定義 2.3 (D-パラコンパクト [3])**.** 微分空間 X の部分集合 A が X の D-パラコンパクトであるとは，X の D-開集合からなる A の任意の被覆は，局所有限な細分をもつときを言う．

次に，微分空間の分離公理を定義する．分離公理については，位相空間のときと同様に定義しても問題ない．

定義 2.4 (D-ハウスドルフ [3])**.** 微分空間 X が D-ハウスドルフであるとは，X の任意の元 $x,\ y$ に対して，x の D-開近傍 U_x と y の D-開近傍 U_y が存在して，U_x と U_y の共通部分が存在しないときを言う．

D-ハウスドルフ空間の任意の部分空間は D-ハウスドルフ空間であることは，容易に分かる．

3 Diffeological subcartesian spaces

この章では、多様体よりも条件が弱い subcartesian space[3] を定義する．また，subcartesian space には，1 の分割が存在することを紹介する．

定義 3.1 (Diffeological subcartesian spaces)**.** 微分空間 X が *subcartesian space* であるとは，次の条件を満たすときを言う．

1. X は D-パラコンパクト，D-ハウスドルフ空間である．
2. X の任意の元 x に対して，x の D-開近傍 U_x から $\mathbf{R}^{n_x}$ の部分集合 $\tilde{U}_x$ への微分同相写像 $\varphi_x \colon U_x \to \tilde{U}_x$ が存在する．($\tilde{U}_x$ は $\mathbf{R}^{n_x}$ の開集合である必要はない．)

定理 3.2. 微分空間 X を *subcartesian space* とする．このとき，D-開集合からなる X の任意の被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，1 の分割 $\{\phi_\lambda \colon X \to \mathbf{R} \mid \lambda \in \Lambda\}$ が存在する．

4 De Rham cohomology of diffeological spaces

微分空間におけるド・ラム・コホモロジーを紹介し，コンパクト・サポートが備わった微分形式 [3] を定義する．さらに，マイヤー・ビエトリス完全系列の存在性について説明する．p 個のユークリッド空間 $\mathbf{R}^k$ の直積空間からユークリッド空間 $\mathbf{R}$ への alternating map 全体からなる集合を $\mathrm{Alt}^p(\mathbf{R}^k)$ で表す．$\mathrm{Alt}^p(\mathbf{R}^k)$ には写像微分構造を導入して，微分空間として考えることができる．

定義 4.1 ([2, 6.28])**.** ω が微分空間 X の p 次微分形式であるとは，次の条件を満たすときを言う．

1. X の任意のプロット $P \colon U \to X$ に対して，$\omega(P) \colon U \to \mathrm{Alt}^p(\mathbf{R}^{\dim U})$ は滑らかな写像である．
2. X の任意のプロット $P \colon U \to X$ と，ユークリッド空間の開集合の間の無限回微分可能写像 $F \colon W \to U$ に対して，$\omega(P \circ F) = F^*(\omega(P))$ が成り立つ．

p 次微分形式全体からなる集合を $\Omega^p(X)$ で表す．また，$d \circ d = 0$ となるような外微分 $d \colon \Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X)$ を定義することができる．よって，X のド・ラム・コホモロジー群 $H^p_{dR}(X)$ を定めることができる．また，微分空間の間の滑らかな写像 $f \colon X \to Y$ に対して，自然に準同型写像 $f^* \colon H^p(Y) \to H^p(X)$ を得る．

定義 4.2 ([3])**.** 微分空間 X の p 次微分形式 ω のサポート $supp\ \omega$ を

$$supp\ \omega = \overline{\{x \in X \mid \forall P \colon U \to X,\ \forall r \in U,\ s.t\ P(r) = x,\ \omega(P)(r) \neq 0\}}$$

と定める．ω にコンパクト・サポートが備わっているとは，$supp\ \omega$ が X の D-コンパクトであるときを言う．コンパクト・サポートが備った p 次微分形式全体からなる集合を $\Omega^p_c(X)$ で表す．$\Omega^p_c(X)$ は，$\Omega^p(X)$ の部分集合であり，コンパクト・サポートが備わったド・ラム・コホロジー $H^p_c(X)$ を定めることができる．

微分空間の間の滑らかな写像を $g \colon X \to Y$ とする．Y の任意の D-コンパクト集合 K に対して，g による逆像 $g^{-1}(K)$ が，X の D-コンパクトになっているとき，g を固有写像とよぶ．固有写像 $g \colon X \to Y$ は，自然に準同型写像 $g^* \colon H^p_c(Y) \to H^p_c(X)$ を誘導する．

D-ハウスドルフ空間 X の D-開集合を A とする．A から X への包含写像を $i\colon A \to X$ とする．このとき，任意の $\omega \in \Omega_c^p(A)$ に対して，$i_*(\omega)$ を次のように定めることにより，チェイン写像 $i_*\colon \Omega_c^p(A) \to \Omega_c^p(X)$ を誘導する．

$$i_*(\omega) = \begin{cases} \omega & \text{on } A \\ 0 & \text{on } X \setminus supp\ \omega \end{cases}$$

よって，準同型写像 $i_*\colon H_c^p(A) \to H_c^p(X)$ を得る．次にド・ラム・コホモロジーのマイヤー・ビエトリス完全系列の存在性について触れる．

定理 4.3 ([3])**.** 微分空間 X の D-開集合の被覆を $\{A,\ B\}$ とし，1 の分割が存在するとする．このとき，次のマイヤー・ビエトリス完全系列が存在する．

$$\to H_{dR}^p(X) \xrightarrow{j_A^* \oplus j_B^*} H_{dR}^p(A) \oplus H_{dR}^p(B) \xrightarrow{i_A^* - i_B^*} H_{dR}^p(A \cap B) \xrightarrow{\delta} H_{dR}^{p+1}(X) \to \cdots$$

定理 4.4 ([3])**.** D-ハウスドルフ空間 X の D-開集合の被覆を $\{A,\ B\}$ とし，1 の分割が存在するとする．このとき，次のマイヤー・ビエトリス完全系列が存在する．

$$\to H_c^p(A \cap B) \xrightarrow{i_{A*} \oplus i_{B*}} H_c^p(A) \oplus H_c^p(B) \xrightarrow{j_{A*} - j_{B*}} H_c^p(X) \xrightarrow{\delta} H_c^{p+1}(A \cap B) \to \cdots$$

以上の結果より，可微分多様体でなくても，微分空間ではド・ラム・コホモロジーを定義することができる．さらに，1 の分割が存在すれば，マイヤー・ビエトリス完全系列が存在する．また，1 の分割が存在するような具体的な空間の例として，Diffeological subcartesian spaces を上げた．この空間は多様体よりも弱い条件であるため，今後，多様体でない微分空間でもマイヤー・ビエトリス完全系列を用いることが可能であり，様々な空間を計算するための幅が拡がるのではないかと考える．これらについては，今後の研究課題になる．

参考文献

[1] K. T. Chen, Iterated path integral, Bull. Am. Math. Soc., 83:831-879(1977).

[2] P. Iglesias-Zemmour, Diffeology Book, CNRS, Marseille, France, and The Hebrew University of Jerusalem, Israel.

[3] Tadayuki Haraguchi, Long exact sequences for de Rham cohomology of diffeological spaces, preprint.

[4] K. Shimakawa, K. Yoshida, and T. Haraguchi, Homology and cohomology via bifunctors, arXiv:1010.3336v1.

[5] Souriau, J. M. Groupes differentiels. In Differential geometrical methods in mathematical.

レンズ空間の E_6 状態和不変量について

岡崎 建太

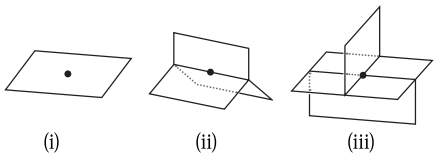
概 要

状態和不変量とは, 単体分割を用いて定義される 3 次元多様体の位相不変量である. 本稿ではレンズ空間の E_6 型部分因子環から定まる状態和不変量（E_6 状態和不変量）の値の計算結果について報告する.

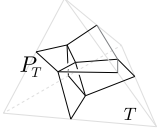
1 E_6 状態和不変量の構成

この節では, E_6 状態和不変量の構成法について復習する. 元来の定義 [Oc] では部分因子環の理論が用いられており, 具体的な計算は困難であった. 和久井 [W] は E_6 型部分因子環から得られる量子 $6j$ 記号の値を全て調べあげることで不変量を再定義した. 本稿で用いるのは E_6 線形スケインの括弧式を用いた定義である [Ok].

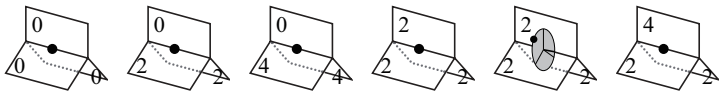
定義 1.1. M を閉 3 次元多様体, P を M へ局所平坦に埋め込まれた 2-複体とする. P が M の**単純 2-複体** (simple 2-polyhedron) であるとは, P の各点の近傍が次の (i)–(iii) のいずれかに同相となることである:



注意 1.2. 任意の閉 3 次元多様体 M に対して単体分割をとり, 各 3-単体 T 内の 2-単体 P_T を下図のように定めると, $P = \cup_T P_T$ は M の単純 2-複体となる. よって任意の閉 3 次元多様体は単純 2-複体を持つ.



P を M の単純 2-複体とする. 上述の (i) のような近傍をもつ P の点全体の連結成分を $F(P)$, (ii) のような近傍をもつ P の点全体の連結成分 $E(P)$, (iii) のような近傍をもつ P の点全体を $V(P)$ と表す. $F(P), E(P), V(P)$ の元を各々 P の**面**, **辺**, **頂点**と呼ぶ. P の面を集合 $\{0, 2, 4\}$ で, 辺を黒点 $\bullet$ と, 基点つきの灰色円盤 $\bullet$ からなる集合で彩色することを考える. つまり P の**彩色** (coloring) とは, $F(P)$ から $\{0, 2, 4\}$ への写像, および $E(P)$ から $\{\bullet, \bullet\}$ への写像全体とする. ただし, $\bullet$ で彩色されている辺は灰色円盤が辺と横断的に交わっているように描き, 3 つの半平面で切り取られる 3 つの領域のいずれかに基点が配置されているものとする（下図の右から 2 番目を参照）. P の彩色が**許容的** (admissible) であるとは, P の各辺の近傍での彩色が次のいずれかになっていることをいう.

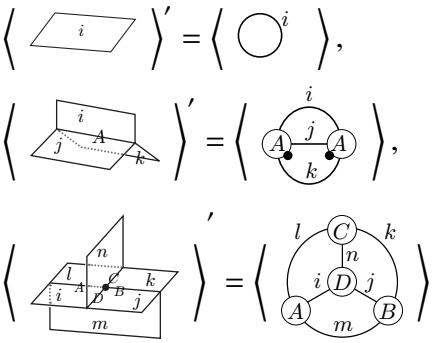


以上の準備のもとで, E_6 状態和不変量を定義する. M を有向閉 3 次元多様体, P を M の単純 2-複体とする. $w = 6 + 2\sqrt{3}$ とおく. χ を $M \setminus P$ の連結成分の個数とする.

定義 1.3. M の E_6 **状態和不変量** $Z^{E_6}(M)$ を次で定める.

$$Z^{E_6}(M) = w^{-\chi} \sum_{\lambda} \prod_{f \in F(P)} \langle (f, \lambda) \rangle' \prod_{e \in E(P)} \langle (e, \lambda) \rangle'^{-1} \prod_{v \in V(P)} \langle (v, \lambda) \rangle' .$$

ただし λ は P の許容的な彩色すべてを走り, $\langle\ \rangle$ を [Ok] で定めた E_6 線形スケインの括弧式とするとき, $\langle (f, \lambda) \rangle'$, $\langle (e, \lambda) \rangle'$, $\langle (v, \lambda) \rangle'$ を以下で定める:



$$(i, j, k, l, m, n \in \{0, 2, 4\},\ A, B, C, D \in \{\bullet, \bullet\}).$$

ここで右辺の彩色 3 価グラフの基点の位置は左辺の基点の位置から自然に定まるものをとることにする. $Z^{E_6}(M)$ は P のとり方によらない M の位相不変量である.

2　レンズ空間の E_6 状態和不変量

この節ではレンズ空間の E_6 状態和不変量の値が周期的であることを示す. 前節で定めた Z^{E_6} は, 境界付きコンパクト有向 3 次元多様体の不変量へと拡張することができる. これを用いて, 1 つ穴あきトーラスの写像類群 $SL(2,\mathbb{Z})$ の表現 Z を得ることが出来る. $SL(2,\mathbb{Z})$ は生成元 S,T と関係式 $S^4 = I, (ST)^3 = S^2$ で表示される. 表現 Z の具体的な表示は, この S,T を用いて

$$Z(S) = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{[3]} & \frac{1}{\sqrt{[3]}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{[3]}} & \frac{1}{[3]} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{[3]}} & \frac{2[2]}{[3][4]} & 0 & 0 & -\frac{[2]}{[4]} & -\frac{[2]}{\sqrt{[3]}[4]} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\omega^2[2]}{[4]} & -\frac{\omega[2]}{[4]} & \frac{1}{[4]} & -\frac{\sqrt{[3]}}{[4]} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\omega[2]}{[4]} & -\frac{\omega^2[2]}{[4]} & \frac{1}{[4]} & -\frac{\sqrt{[3]}}{[4]} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{[3]}} & -\frac{[2]}{[4]} & \frac{1}{[4]} & \frac{1}{[4]} & 0 & \frac{[2]}{\sqrt{[3]}[4]} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{[3]} & -\frac{[2]}{\sqrt{[3]}[4]} & -\frac{\sqrt{[3]}}{[4]} & -\frac{\sqrt{[3]}}{[4]} & \frac{[2]}{\sqrt{[3]}[4]} & -\frac{1}{[3]} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{pmatrix},$$

$$Z(T) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{[3]}} & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{[3]}} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{\sqrt{[3]}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{[3]}} & \frac{2[2]}{[3][4]} & 0 & 0 & -\frac{[2]}{[4]} & -\frac{[2]}{\sqrt{[3]}[4]} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{[2]}{[4]} & -\frac{\omega^2[2]}{[4]} & \frac{\omega}{[4]} & -\frac{\omega\sqrt{[3]}}{[4]} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\omega^2[2]}{[4]} & -\frac{[2]}{[4]} & \frac{\omega}{[4]} & -\frac{\omega\sqrt{[3]}}{[4]} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\omega^2}{\sqrt{[3]}} & -\frac{\omega^2[2]}{[4]} & \frac{\omega^2}{[4]} & \frac{\omega^2}{[4]} & 0 & \frac{\omega^2[2]}{\sqrt{[3]}[4]} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{[3]}} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{[3]}} & -\frac{[2]}{[4]} & -\frac{[3]}{[4]} & -\frac{[3]}{[4]} & \frac{[2]}{[4]} & -\frac{1}{\sqrt{[3]}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix},$$

で与えられる. 直接計算により, この Z が実際に関係式を保っていることも確かめられる.

この表現を用いて, レンズ空間の E_6 状態和不変量の値を求めることができる. p,q を互いに素な自然数とする. $aq - bp = 1$ となる $a,b \in \mathbb{Z}$ を 1 つとり固定する.

補題 2.1. ある $v \in \mathbb{C}^{10}$ が存在して,

$$Z^{E_6}(L(p,q)) = {}^t v Z\left(\begin{pmatrix} a & p \\ b & q \end{pmatrix}\right) v.$$

注意 2.2. [SW] により Z と共役な表現が与えられており, 同論文ではその表現を用いて $Z^{E_6}(L(p,q))$ の値を $q = 1, 2, 3$ の場合に与えている.

$SL(2,\mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma(12)$ を, $\Gamma(12) = \{A \in SL(2,\mathbb{Z}); A \equiv I_2 \mod 12\}$ で定める. ただし I_n はサイズ n の単位行列とする.

補題 2.3. $\Gamma(12)$ の任意の元 A に対して, $Z(A) = I_{18}$.

証明の概略. GAP プログラム (`http://www.gap-system.org/`) を用いることにより, $\Gamma(12)$ はある 18 個の元 $A_i \in SL(2,\mathbb{Z})$ $(i = 1, \ldots, 18)$ の正規閉包であることがわかる. この各元に対して, $Z(A_i) = I_{18}$ であることを, 上記の表現を用いて直接確かめればよい. □

これらの補題と少しの議論から, 次を得る.

定理 2.4. $(p,q), (p',q')$ を各々互いに素な自然数の組とする. このとき $p \equiv p', q \equiv q' \mod 12$ ならば,

$$Z^{E_6}(L(p,q)) = Z^{E_6}(L(p',q')).$$

注意 2.5. [SW] により $Z^{E_6}(L(p,q))$ の $1 \le p \le 12$ の場合の値は計算されているので, これで全てのレンズ空間の E_6 状態和不変量値が求められたことになる.

参考文献

[Oc] A. Ocneanu, *Chirality for operator algebras*, Subfactors (Proc. Taniguchi Symposium in 1993). World Scientific, Singapore, 1994.

[Ok] K. Okazaki, *The state sum invariant of* 3*-manifolds constructed from the* E_6 *linear skein*, Algebraic and Geometric Topology **13** (2013) 3469–3536.

[SW] K. Suzuki, M. Wakui, *On the Turaev–Viro–Ocneanu invariant of 3-manifolds derived from the* E_6*-subfactor*, Kyushu J. Math. **56** (2002) 59–81.

[W] M. Wakui, コクセターグラフ E_6 の量子 $6j$ 記号から作られる 3 次元多様体の Turaev-Viro-Ocneanu 不変量について, 数理解析研究所 講究録 **1053** (1998) 6–29 .

平面配置の対称性に関するいくつかの例

京都大学大学院人間・環境学研究科 D2　塚本 靖之*

概要

実 3 次元ユークリッド空間内の平面配置に対し，それに含まれる平面の置換で，全体に対する線型変換でも実現されるようなもの全体からなる群を，その配置の対称性と考える．ある組合せ型に対し，それを満たす平面配置は，どんなにうまく配置しても，その組合せ型がもつ対称性を実現できないということが知られている．今回の発表では，そのような組合せ論的な対称性と，その実現可能な対称性との違いについて説明したい．

1　超平面配置と対称性

d, n を自然数とする．基本的には $d = 3$ の場合を扱う．

本文で超平面とは全て実 d 次元ユークリッド空間内の線形超平面，すなわち，あるベクトル $c \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ によって，$H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c \cdot x = 0\}$ と表される集合とする．

$\mathbb{R}^d$ 上の有限個の超平面の集合 $\mathcal{A} := \{H_1, \ldots, H_n\}$ を超平面配置というが，ここでは次の条件を満たすと仮定する．

1. $H_i \neq H_j (i \neq j)$
2. $H_1 \cap \cdots \cap H_n = \{0\}$

これらの条件を満たさないような超平面配置の組合せ型は，より少ない超平面の集合，あるいはより低い次元の配置から得られるので，今回は扱わない．

$\mathcal{A} := \{H_1, \ldots, H_n\}\,(H_i = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c_i \cdot x = 0\}\,(i = 1, \ldots, n))$ を超平面配置とする．また，$E = \{1, \ldots, n\}$ を超平面のラベルの集合とする．線形変換 $B \in GL(d, \mathbb{R})$ に対し，$BH_i = \{Bx \mid x \in H_i\}$ とおく．このとき，置換 $\sigma : E \to E$ であって，$(H_{\sigma(1)}, \ldots, H_{\sigma(n)}) = (BH_1, \ldots, BH_n)$ となるような $B \in GL(d, \mathbb{R})$ が存在するもの全体は群を成すが，この群を超平面配置 $\mathcal{A}$ の対称性と呼ぶ．

1.1　有向マトロイド

超平面配置 $\mathcal{A} := \{H_1, \ldots, H_n\}\,(H_i = \{x \in \mathbb{R}^d \mid c_i \cdot x = 0\}\,(i \in E))$ を定めるような $c_1, \ldots, c_n$ を一つ固定する．各超平面に対し $H_i^\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathrm{sgn}(c_i \cdot x) = \epsilon\}(\epsilon \in \{0, \pm 1\})$ で向き付けを与える．向き付け，ラベル付けを固定した超平面配置 $\mathcal{A}$ に対し，符号ベクトルの集合

$$\mathcal{V}^*(\mathcal{A}) := \{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{0, \pm 1\}^n \mid H_1^{\epsilon_1} \cap \cdots \cap H_n^{\epsilon_n} \neq \emptyset\} \tag{1}$$

を $\mathcal{A}$ のコベクトルという．

* tsukamoto@i.h.kyoto-u.ac.jp

このコベクトルが，有向マトロイドという組合せ型の定義の一つである．有向マトロイドには，他にもいくつかの定義があり，互いに等価であることが知られている ([1])．

一般のコベクトル $\mathcal{V}^*$ は，ある公理系を満たすような符号ベクトルの集合であり，超平面配置から得られるとは限らない．コベクトル $\mathcal{V}^*$ に対し，$\mathcal{V}^* = \mathcal{V}^*(\mathcal{A})$ を満たす超平面配置 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{V}^*$ の実現といい，実現が存在するコベクトルは実現可能であるという．ここでは実現可能なコベクトルのみを扱う．

超平面配置 $\mathcal{A}$ のコベクトル $\mathcal{V}^*(\mathcal{A})$ に対し，置換 $\sigma : E \to E$ であって，超平面の向き付けの入れ替えに対応する符号ベクトル $(s_1, \ldots, s_n) \in \{\pm 1\}^n$ が存在して，

$$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \mathcal{V}^*(\mathcal{A}) \Leftrightarrow (s_1\epsilon_{\sigma(1)}, \ldots, s_n\epsilon_{\sigma(n)}) \in \mathcal{V}^*(\mathcal{A}) \tag{2}$$

を満たすもの全体は，やはり群になる．これがコベクトル $\mathcal{V}^*(\mathcal{A})$ の対称性，つまり $\mathcal{A}$ の組合せ論的な対称性である．

超平面配置 $\mathcal{A}$ の対称性は $\mathcal{V}^*(\mathcal{A})$ の対称性の一部（部分群）である．ここでの問題は，コベクトル $\mathcal{V}^*(\mathcal{A})$ が対称性をもつとき，その対称性を持つような実現が常に存在するか，ということである．この問には否定的な答えが示されており，Richter-Gebert によって $d = 3$, $n = 14$ の場合の反例が比較的小さいものとして与えられている ([2])．また，構成の動機が別だったため論文中にその記述はないが，$d = 3$, $n = 13$ の反例も存在し ([3])，知られている例の中では n が最小である．

今回紹介するのはこの $n = 13$ の例と，その類型として見つけた $n = 14$ の例を 2 個である（すべて $d = 3$）．特に，$n = 14$ の例の一方は次の性質を持つ．

“$\mathcal{V}^*(\mathcal{A})$ の対称性の非自明な部分群を対称性として持つような実現は存在するが，両者が一致するような実現は存在しない．”

2　例の構成

$\mathbb{R}^3$ 上の平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_n\}$ を，2 次元アフィン空間 $H' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\} \cong \mathbb{R}^2$ 上のアフィン直線配置 $\{H_1 \cap H', \ldots, H_n \cap H'\}$ として図示する．ただし，無限遠の直線に相当する平面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ が $\mathcal{A}$ に含まれるかどうかは別個に書く．

2.1　$n = 13$ の例 ([3])

図 1 右の様な配置を考える．組合せ型を明示するため，および上下方向の組合せ型の対称性を維持するように一部をあえて曲げて描いてある．これを実現する際，線形同値なものを除けば図 1 左の様な 3 個のパラメータ s, t, u が存在することが分かる．上下対称にするなら $s = t, u = 1/2$ でなければならないが，$u = 1/2$ のとき，あえて曲げて書いた部分で 3 直線が一点で交わってしまうことが初等的に証明できる．

2.2　$n = 14$ の例 1

図 2 の様な配置を考える．組合せ型では左右対称である．これを実現する際のパラメータは 1 個であり，図 2 のように s と置く．左右対称にするなら $s = 1/2$ でなければならないが，このとき 3 直線が一点で交わってしまい，実現とならない．

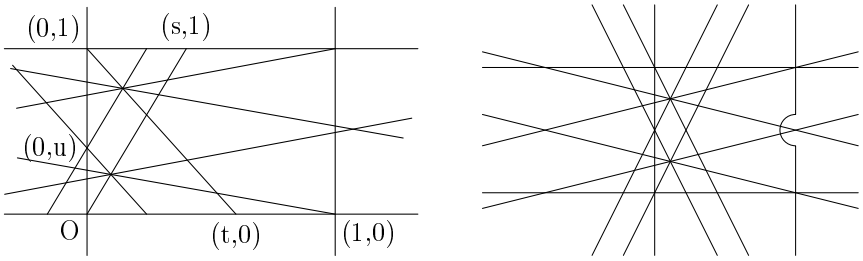


図 1　（無限遠の直線を含む）

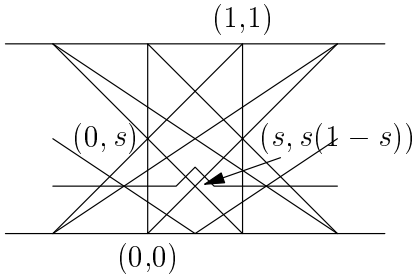


図 2　（無限遠の直線を含む）

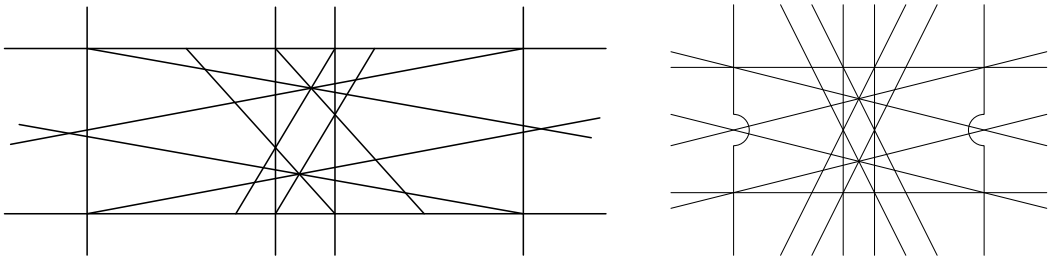


図 3　（無限遠の直線を含まない）

2.3　$n = 14$ の例 2

図 3 右の様な配置を考える．組合せ型では上下左右対称であり，実現の際にパラメータは 4 個ある（無限遠にも直線を置く場合は 2 個）．これに対し，上下や左右に対称な実現は存在しないが，点対称な実現は存在する（図 3 左）．

参考文献

[1] A. Bjorner, M. Las Vergnas, B. Sturmfel, N. White, G. Ziegler, *Oriented matroids,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications 46 (2nd edition), Cambridge University Press, 1999.

[2] J. Richter-Gebert, *Two interesting oriented matroids,* Documenta Mathematica 1, 1996, 137–148.

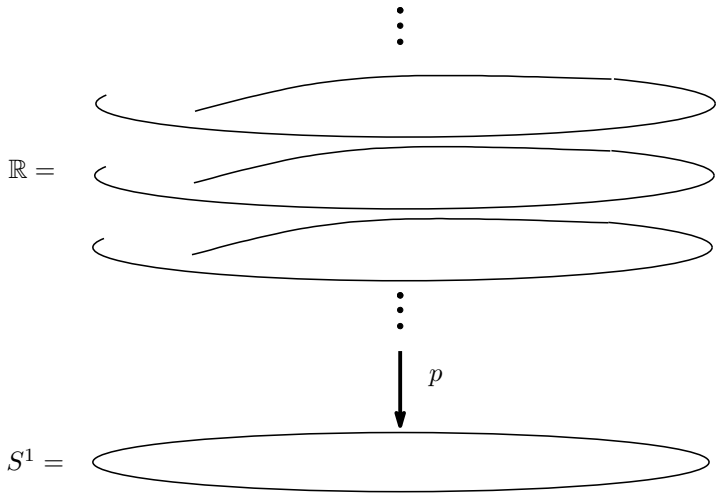
[3] T, *New examples of oriented matroids with disconnected realization spaces,* Discrete and Computational Geometry vol. 49 issue 2, 2013, 287–295.

Ramified coverings of small categories

野口 和範*(信州大学 非常勤講師)

1 被覆

被覆は幾何学をやる上で非常に有用な概念である。被覆とは、大きい空間 E から、それより小さい空間 B へのある種の全射のことで、E は B を複数回コピーしたような空間になっているものである。例えば、$p : \mathbb{R} \to S^1, p(t) = e^{2\pi it}$ は被覆であるが、これは円周 S^1 上で数直線 $\mathbb{R}$ をらせん状に巻いていったもので、図で書くと以下のとおりである。



この時 $\mathbb{R}$ は S^1 を $\mathbb{Z}$ 回コピーしたような形になっている。この被覆は S^1 の基本群 $\pi_1(S^1)$ が $\mathbb{Z}$ に同型であることの証明に使われるが、この事実が多くの応用を持っている。代数学の基本定理のトポロジー的証明や、連続写像 $h : D^2 \to D^2$ は必ず不動点（$h(x) = x$ なる $x \in D^2$）を持つこと、また連続写像 $f : S^2 \to \mathbb{R}$ に対し、$f(x) = f(-x)$ なる $x \in S^2$ が存在すること、つまり球面 S^2 上の点で日本とブラジルのように正反対の場所にあり、f による像が等しいものが必ず存在するという Borsuk-Ulam の定理など、その応用は多彩である。また、ホモトピー論（広くはモデル圏的な意味で）をやる上で欠かせないファイブレーションの原型としての意味もある。

一方、被覆の概念は幾何的なものだけでなく、category theory にも導入され種々の研究が進んでいるが、ここではその定義を述べるにとどめる。

Definition 1.1. Let C be a small category. For an object x of C, let $S(x)$ be the set of morphisms of C whose source is x:

$$S(x) = \{f : x \to * \in \mathrm{Mor}(C)\},$$

*E-mail : noguchi@math.shinshu-u.ac.jp

and $T(x)$ is the set of morphisms of C whose target is x:

$$T(x) = \{g : * \to x \in \mathrm{Mor}(C)\}.$$

A functor $P : \widetilde{C} \to C$ is an *unramified covering* if C is connected and the following two restrictions of P are bijections for any object $\tilde{x}$ of $\widetilde{C}$:

$$P : S(\tilde{x}) \longrightarrow S(x),$$

$$P : T(\tilde{x}) \longrightarrow T(x),$$

where $P(\tilde{x}) = x$.

この category の被覆は空間の被覆とも関係がある。small category の被覆 $P : E \to B$ に対して、その分類空間 BP は被覆空間になるという性質がある。ここで、分類空間とは、small category C に対して、ある位相空間 BC を対応させるもので、また functor $F : C \to D$ に対して、ある連続写像 $BF : BC \to BD$ を対応させるものである。

ここまでに上で考えてきた被覆は全て、分岐しない被覆、つまり「不分岐被覆」である。しかし、分岐する被覆も重要な概念で、例えばリーマン面を調べる上で欠かせない道具になっている。私は small category に対する分岐被覆を導入し、その性質について調べた。

2 分岐被覆の定義

分岐被覆の定義は以下の通りである。

Definition 2.1. Suppose that $P : \widetilde{C} \to C$ is a functor between small categories and C is connected. Then, P is a *ramified covering* if it satisfies the conditions:

1. The map $P : T(\tilde{x}) \to T(x)$ is a bijection for any object $\tilde{x}$ of $\widetilde{C}$ and $P(\tilde{x}) = x$;
2. For each object $\tilde{x}$ of $\widetilde{C}$, there exists a natural number $e(\tilde{x})$ such that the map $P : \overline{S}(\tilde{x}) \to \overline{S}(x)$ is an $e(\tilde{x})$ to one map, where $x = P(\tilde{x})$ and $\overline{S}(x) = S(x) \setminus \{1_x\}$.

The number $e(\tilde{x})$ is called the *ramification number of P at $\tilde{x}$*.

分岐被覆の定義は上記の不分岐の場合の source に関する対応を $1:1$ から $n:1$ に変えたものである。さらに、分岐被覆の次数が以下で定義される。

Definition 2.2. Suppose that $P : \widetilde{C} \to C$ is a ramified covering and the inverse image

$$P^{-1}(x) = \{\tilde{x} \in \mathrm{Ob}(\widetilde{C}) \mid P(\tilde{x}) = x\}$$

of any object x of C by P is finite. Define the *degree* of P by

$$\deg P = \sum_{\tilde{x} \in P^{-1}(x)} e(\tilde{x})$$

for an object x of C. It does not depend on the choice of x.

For a natural number d, P is a *d-fold ramified covering* if $\deg P = d$.

次数 $\deg P$ が x の取り方によらないことは定義から直ちに従うことではなく、いくつかの補題を組み合わせなければならないが、well-defined ではある。

3　リーマン・フルヴィッツの公式

リーマン・フルヴィッツの公式とは、リーマン面の分岐被覆 $p : \widetilde{F} \to F$ と、$\widetilde{F}, F$ のオイラー標数の関係を示すもので、

$$\chi(\widetilde{F}) = d \cdot \chi(F) - V$$

という等式のことを言う。ここで、d は p の次数、V は「分岐度から 1 を引いたもの」の総和である。

以下の結果は、リーマン・フルヴィッツの公式の圏論的類似である。

Theorem 3.1. *Suppose that $P : \widetilde{C} \to C$ is a d-fold ramified covering of finite categories. Then, $\widetilde{C}$ has Euler characteristic, if and only if C has Euler characteristic. In this case,*

$$\chi(\widetilde{C}) = d \cdot \chi(C) - V,$$

where

$$V = \sum_{\widetilde{x} \in \mathrm{Ob}(\widetilde{C})} (e(\tilde{x}) - 1).$$

4　デデキンド予想

デデキンド予想は「代数体 $K_1 \subset K_2$ に対し、K_1 のデデキンドゼータ関数 ζ_{K_1} は K_2 のデデキンドゼータ関数 ζ_{K_2} を割り切る」というもので、E. Artin の正則性予想等、その他の数論における予想とも関連した重要な問題である。デデキンドゼータ関数はリーマンゼータ関数の一般化であり、代数体とは有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体 K のことである。特に $K = \mathbb{Q}$ の時、$\zeta_{\mathbb{Q}}$ はリーマンゼータ関数である。small category の不分岐被覆と体の拡大の間には非常によく似た性質があり、多くの類似点が指摘されている。例えば、ガロアの基本定理は「K/F を有限次ガロア拡大としたときに、その中間体 L とガロア群 $\mathrm{Gal}(K/F)$ の部分群が一対一に対応する」というものであるが（左下図参照)、

$$\begin{array}{ccc} K & \longleftrightarrow & \{e\} \\ | & & \cap \\ L & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & H \\ | & & \cap \\ F & \longleftrightarrow & \mathrm{Gal}(K/F) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{E} & \longleftrightarrow & \{e\} \\ \downarrow & & \cap \\ E & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & H \\ \downarrow & & \cap \\ B & \longleftrightarrow & \pi_1(B) \end{array} \quad (\tilde{P})$$

small category の被覆 $\widetilde{P} : \widetilde{E} \to B$ に対して中間被覆の同型類と B の基本群 $\pi_1(B)$ の部分群が一対一に対応するという分類定理がある（右上図参照)。ここで $\widetilde{E}$ は普遍被覆である。分類定理は明らかにガロアの基本定理の類似であり、「体の拡大」と「small category の被覆」は非常によく似ているのである。デデキンド予想が、体の拡大とゼータ関数の関係を示すものであれば、その類似である small category の被覆とゼータ関数の関係を調べるのは自然である。私は [NogA] の中で、finite category のゼータ関数を定義し、finite category の不分岐被覆 $P : E \to B$ に対し、B のゼータが、E のゼータを割り切ることを証明した。そしてその結果は、分岐被覆に対して、以下のように拡張される。

Theorem 4.1. *Suppose that $P : \widetilde{C} \to C$ is a d-fold ramified covering of the finite category C. Then, we have*

$$\zeta_{\widetilde{C}}(z) = \zeta_C(z)^d (1-z)^V.$$

5 位相空間の分岐被覆

位相空間の（不分岐）被覆は被覆空間と呼ばれ、たいていの代数トポロジーの本には載っている。前述のように $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ の証明等に使われ、非常に有用であるが、分岐する被覆はないのかというと、1980 年代に L. Smith, A. Dold によって定義されている。最初に Smith[Smi83] が提案した定義を、後に Dold[Dol86] がより単純化し、一般化した。ここでは Dold のものを位相空間に対する分岐被覆とする。この時、以下の結果が成立する。

Theorem 5.1. *Suppose that a functor $P : \widetilde{C} \to C$ is a d-fold ramified covering. Then, the continuous map $BP : B\widetilde{C} \to BC$ is a d-fold ramified covering.*

よって、次数 d の category の分岐被覆の分類空間は、また次数 d の分岐被覆になるのである。次数が有限でない場合についてはよくわからない。というのも、Dold の定義は次数が有限の場合しか定義がされていないので、そもそも無限次数の分岐被覆の分類空間が無限次数の分岐被覆になるかという議論がそもそもできない。

6 まとめ

とりあえず、source に関する 1 : 1 対応をゆるめ、n : 1 にしても「分岐被覆らしい性質」を持っていることは分かった。次に考えるのは同時に target に関しても m : 1 にするとどうなるのかということであるが、その場合問題は極端に難しくなる。例えば、分岐被覆の次数が well-defined であることの証明には target に関しては 1 : 1 であるということをかなり使用していて、それがなくなると次数を定義すること自体が難しくなる。

今回紹介した分岐被覆の定義が完成形というわけではないが、まず最初の試みとしてはそれなりに満たすべき性質を満たしているので、及第点といったところだと思う。target に関しても m : 1 にした時の結果は、いつか研究、発表するかもしれない。

References

[Dol86] A. Dold. Ramified coverings, orbit projections and symmetric powers. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 99(1): 65–72, 1986.

[NogA] K. Noguchi. The zeta function of a finite category. *Documenta Math.*, in press.

[NogB] K. Noguchi. Ramified coverings of small categories. arXiv:1303.7046.

[Smi83] L. Smith. Transfer and ramified coverings. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 93(3): 485–493, 1983.

同じ射影を持つリンクダイアグラムの集合の領域交差交換による同値類について

橋爪　惠*

奈良女子大学大学院人間文化研究科博士前期課程 2 年数学専攻、2014 年 3 月

1 Introduction

1.1 用語

結び目 (*knot*) とは三次元球面 S^3 に埋め込まれた一つの単純閉曲線のことである．また，n 成分の**絡み目** (*link*) とは S^3 に埋め込まれた n 個の単純閉曲線のことである．今，絡み目を二次元球面 S^2 に射影することを考える．一般には絡み目を射影すると線が重なって見えるところや接しているところができる．必要ならば，射影する方向を少しずらすことにより線の交わりは横断的でかつ 2 重点のみになっているとしてよい．この射影図を $|D|$ で表すことにする．この射影図は 4 価の平面グラフとみなすことができる．以下では射影図 $|D|$ を **projection** と呼ぶ．さらに、線が交わっているところは次のようにひもの上下が上下の情報がわかるように描くことにする．

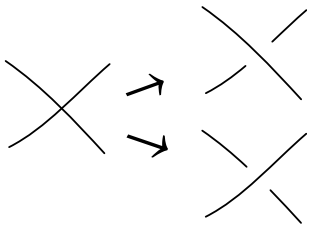


図 1:

こうして得られる S^2 上の図 D を**リンクダイアグラム** (*link diagram*) という．リンクダイアグラムの二重点の部分を**交差** (*crossing*) という．$|D|$ で切り取られる S^2 の各成分を D の**領域** (*region*) という．

そして，

定義 1.1. D をリンクダイアグラムとし、c を D の一つの交差とする．c での交差の上下の情報を入れ換える操作を c での**交差交換**という．

定義 1.2. D をリンクダイアグラムとし，R を D の一つの領域とする．R の境界に含まれる交差で交差交換を行って得られるダイアグラムを $D(R)$ とかくことにする．D から $D(R)$ を与える操作を R での region crossing change とよぶ．一般に領域の集合 $H = \{R_{i_1}, \ldots, R_{i_s}\}$ に対して，H の各成分での region crossing change の合成，つまり，D から $(\cdots(D(R_{i_1}))(R_{i_2})\cdots)(R_{i_s})$ を与える操作，を H での *region crossing change* と呼ぶ．

本稿では領域の集合 H が与えられたとき H に属する領域には色を付けることによって、H を幾何的に表すことにする．また、その色付けを **coloring** と呼ぶ．定義から容易にわかるように，region crossing change

*mam_hashizume@cc.nara-wu.ac.jp

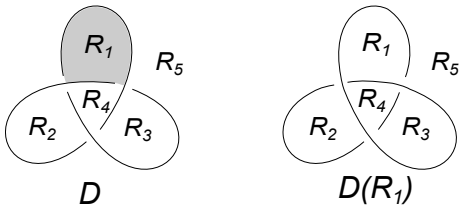


図 2:

はリンクダイアグラムの交差の上下の情報は変えるが，その proojection は変えない．今，ある proposition（4 価の平面グラフ）G が与えられたとする．この G に対して，その projection が G となっているようなリンクダイアグラムはいろいろあるが，そのようなリンクダイアグラム全体の集合を $\mathcal{D}_G$ と書くことにする．本研究では $\mathcal{D}_G$ に次のような同値関係を導入しその性質について調べる.;

$$D_1, D_2 \in \mathcal{D}_G, D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow \exists H : \text{set of regions of } G \text{ s.t.} D_1(H) = D_2$$

特に今回は次の問題について得られた結果を報告する．

問題,
G を S^2 内の 4 価の平面グラフとする．上の同値関係による $\mathcal{D}_G$ の同値類を具体的に記述せよ．

この問題の考察するために 2 節で D の領域（resp. 交差）の集合のべき集合 $2^{\mathcal{R}}(\text{resp.}2^{\mathcal{C}})$ に $\mathbf{Z}_2$-vector space の構造を導入し，更に region crossing change が $2^{\mathcal{R}}$ から $2^{\mathcal{C}}$ への $\mathbf{Z}_2$-linear map φ を自然に誘導することを示す．実はこの問題は φ の image と cokernel を具体的に与える問題として言い換えることができる．本稿の 2 節でこの定式化について紹介する．また，ある条件を満たすリンクダイアグラムに対して得られた結果（定理 2.1）を述べる．

2 Region crossing changeが導く線形写像

この節では D を n 成分のリンクの非分離なリンクダイアグラムとし，$k_1, \ldots, k_n$ を D の各成分を表す結び目のダイアグラムとする．ここでは記号を乱用して $D = k_1 \cup \cdots \cup k_n$ とかくことにする．また，$|D|$ が表す 4 価のグラフを G と書くことにする．D の交差の数を m とし、交差を $c_1, \ldots, c_m$ と書くことにする．そして，$\mathcal{C} := \{c_1, \ldots, c_m\}$ とする．このときオイラー標数の議論から D の領域の個数は $m+2$ 個になることがわかる．そこで、D の領域を $R_1, \ldots, R_{m+2}$ で表すことにし、$\mathcal{R} := \{R_1, \ldots, R_{m+2}\}$ と書くことにする．一般に集合 X に対して、そのべき集合を 2^X と書くことにする．今、$2^{\mathcal{C}}$, $2^{\mathcal{R}}$ に対称差によって和を導入する．つまり，$A, B \in 2^{\mathcal{R}}$ (resp. $2^{\mathcal{C}}$) に対して、$A+B$ を次で定義する；$A+B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$．さらに、$2^{\mathcal{C}}$, $2^{\mathcal{R}}$ にスカラー $\mathbf{Z_2}$ 倍を次で定義する；$A \in 2^{\mathcal{R}}$or $2^{\mathcal{C}}$ に対して、$0 \cdot A = \emptyset$, $1 \cdot A = A$．以上により $2^{\mathcal{R}}$ と $2^{\mathcal{C}}$ がそれぞれ $\mathbf{Z}_2$ 線形空間であることが容易にわかる．さらに，$\{\{R_1\}, \ldots, \{R_{m+2}\}\}$ は $2^{\mathcal{R}}$ の基底を成し、$\{\{c_1\}, \ldots, \{c_m\}\}$ は $2^{\mathcal{C}}$ の基底を成すこと（したがって、$2^{\mathcal{R}} \cong {\mathbf{Z_2}}^{m+2}$，$2^{\mathcal{C}} \cong {\mathbf{Z_2}}^{m}$ あること）が容易にわかる．次に，この線型空間 $2^{\mathcal{R}}$ から $2^{\mathcal{C}}$ への写像 φ を次で定義する

$$H(\in 2^{\mathcal{R}}), \varphi(H) = \{c \in \mathcal{C} | c \text{ は } H \text{ での region crossing change で交差交換される }\}$$

これが $\mathbf{Z}_2$ 線型写像なっていることも容易にわかる．以下，特に断らない限り，この報告では φ を上記の意味で使うことにする．φ の定義より $\mathcal{D}_G$ の同値類の各類はある交差の集合に $\mathrm{Im}\varphi$ を足した形をしていることがわかる．以上より，今回の**問題**は，次のように言い換えられることがわかる．;

問題′
$2^{\mathcal{C}}$ を対称差を演算に持つ群とみなした時の $\mathrm{Im}\varphi$ による coset 分解の表示を具体的に与えよ．

本報告の結果は次の通り

定理 2.1. $D = k_1 \cup \cdots \cup k_n, \mathcal{C}$ を上の通りとする．今，$k_1 \cap k_j \neq \emptyset (j = 2, \ldots, n)$ とする．

今，$k_s \cap k_r \neq \emptyset$ となる各 (r, s) に対して，$c_{rs} \in k_r \cap k_s$ を固定する．(もしも $k_s \cap k_r = \emptyset$ であれば c_{rs} は undefined である.）特に，$c_{rs} \neq c_{sr}$ とする．このとき，Imφ は次の集合によって生成される．;

$$\{\{c_p\} | c_p \in k_p \cap k_p (p \in \{1, \ldots, n\})\} \cup \{\{c_{t_1 t_2}, c_{t_2 t_3}, \ldots, c_{t_u t_1}\} | t_1, \ldots, t_u \in \{1, \ldots, n\}, t_1, t_2, \ldots, t_u : \text{mutual difference}\}$$

さらに，$2^{\mathcal{C}}$ は次のような coset 分解の表示を持つ.

$$\begin{aligned} 2^{\mathcal{C}} = \quad & \mathrm{Im}\varphi \\ & \amalg\{c_{12}\} + \mathrm{Im}\varphi \amalg \{c_{13}\} + \mathrm{Im}\varphi \amalg \cdots \amalg \{c_{1n}\} + \mathrm{Im}\varphi \\ & \amalg\{c_{12}, c_{13}\} + \mathrm{Im}\varphi \amalg \{c_{12}, c_{14}\} + \mathrm{Im}\varphi \amalg \cdots \amalg \{c_{1n-1}, c_{1n}\} + \mathrm{Im}\varphi \\ & \vdots \\ & \amalg\{c_{12}, c_{13}, \ldots, c_{1n}\} + \mathrm{Im}\varphi \end{aligned}$$

参考文献

[1] A.Shimizu, Region crossing change is an unknotting operation. to appear in Journal of the Mathematical Society of Japan.

[2] Z.Cheng, H.Gao. On region crossing change and incidence matrix, to appear in Science China Math.

[3] Z.Cheng. When is region crossing change an unknotting operation?, arXiv:1201.1735.

LR数が3の平面閉曲線の特徴付けについて

高岡 邦行　(早稲田大学大学院教育学研究科)*

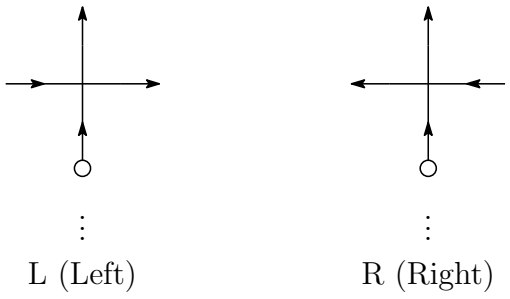
1. 問題意識

結び目ダイアグラムの交点に着目する際, 交点のover/under crossing, left/right crossing, positive/negative crossingの3通りの着目の仕方がある. 佐藤-比嘉-中西-山本は, 結び目ダイアグラムのover/under crossingの情報のみに着目してOU文字列を定義し, trefoilのダイアグラムのOU文字列がどのような文字列になるか, 加えてOU文字列の応用について研究した[1]. 本稿では交点のleft/right crossingのみに着目し, その情報から得られる文字列について考える. その性質上, 交点の上下の情報は必要ないので, 結び目ダイアグラムではなく, 平面閉曲線を考える.

2. 準備

文字Lと文字Rを同数個並べて出来る巡回的文字列をLR語という. LR語を次のように平面閉曲線と対応させる.

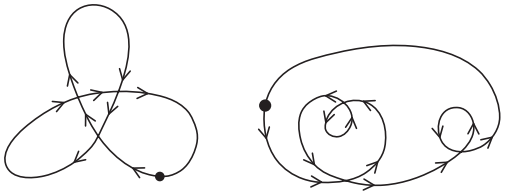
Pを横断的な2重点のみを持つ, S^2上の向き付けられた閉曲線とする. Pの各2重点に着目すると, その通過の仕方から, 次の2つの場合に分けて考えることが出来る.



L (Left)　　R (Right)

左の2重点の場合を文字L, 右の2重点の場合をRに対応させる. P上に基点をとり, 基点から向きに沿ってPを一周すると, 同じ2重点を2度通過するので, 各2重点の情報からLR語が得られる. これをPのLR語といい, w_Pで表す. 以下では, 横断的な2重点のみを持つ, S^2上の向き付けられた閉曲線のことを, 単に, 平面閉曲線と呼ぶことにする.

例 2.1. 左の平面閉曲線のLR語はRLRLRL, 右の平面閉曲線のLR語はLLRRLRである.



* 〒169-8050 東京都新宿区西新宿 1-6-1 早稲田大学大学院教育学研究科
e-mail: kuni.takaoka@akane.waseda.jp

P と 2 点のみで横断的に交わる S^2 上の任意の閉曲線 C に対して, C によって切り取られた P の部分曲線が存在して, その曲線が単純曲線であるとき, P は prime であるという.

平面閉曲線 P の LR 語 w_P に含まれる部分文字列 LR の個数を, P の LR 数と呼ぶことにする. 平面閉曲線の LR 数に関して, 次が成り立つ.

補題 2.2. P_1, P_2 を平面閉曲線とし, P_1 の LR 数を m, P_2 の LR 数を n とする. このとき, $P_1 \# P_2$ の LR 数は $m+n+1$, $m+n$, または $m+n-1$ のいずれかである.

さて, 任意の平面閉曲線 P に対して, 交点の情報から一意に LR 語が定まるが, 逆に LR 語が与えられたときに, P の LR 語がそれに一致するような P が存在するかという問題が考えられる. 次が成り立つ.

命題 2.3. 任意の LR 語 w に対して, $w_P = w$ となる平面閉曲線 P が存在する.

よって, 任意の LR 語に対して, P の LR 語がそれに一致するような prime な P が存在するかという問題が考えられるが, これは成り立たない (たとえば、定理 2.4.).

そこで, この報告では, 平面閉曲線の LR 数を用いて, LR 数が 3 以下の平面閉曲線についての特徴付けを試みた.

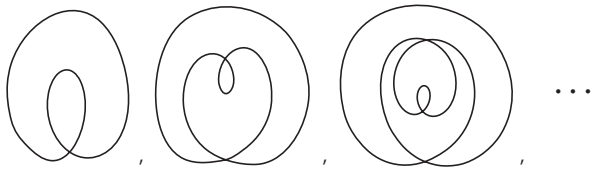
ただし, LR 数が 2 以下の平面閉曲線に関しては, 以下のことがわかっている.

次は, LR 数が 1 の場合である.

定理 2.4. P を平面閉曲線とする. 次は同値である.

(1) (P の LR 数)$= 1$

(2) P は以下の平面閉曲線のどれか.



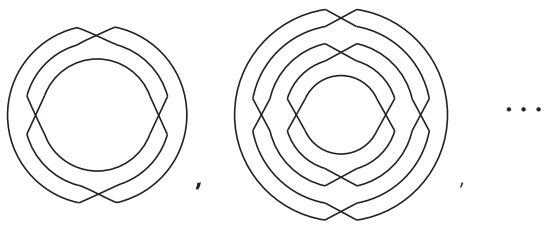
特に, *prime* な平面閉曲線は, 交点数が 1 の平面閉曲線 (一番左の平面閉曲線) のみである.

次は, LR 数が 2 の場合である.

定理 2.5. P を prime な平面閉曲線とする. 次は同値である.

(1) (P の LR 数)$= 2$

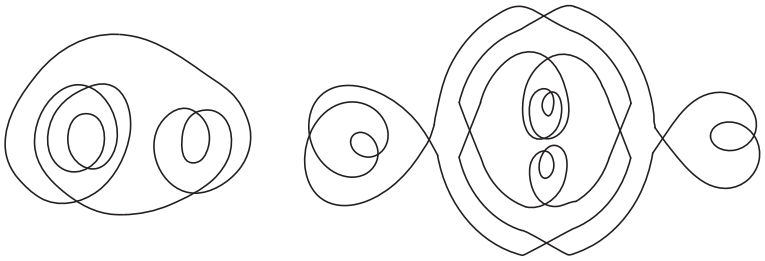
(2) P は以下の平面閉曲線のどれか.



補題 2.2, 定理 2.5 より, 次が得られる.

定理 2.6. LR 数が 2 の平面閉曲線は, 以下の場合に分類できる.
(1) (LR 数が 1 の平面閉曲線) # (LR 数が 1 の平面閉曲線),
(2) (LR 数が 1 の平面閉曲線) # (LR 数が 2 の *prime* な平面閉曲線).

下に例をあげる. 左の平面閉曲線は (1) の例, 右の平面閉曲線は (2) の例である.



3. 主結果

平面閉曲線のすべての交点を smoothing することで得られる Seifert circles が同心円状に並んでいるとき, その平面閉曲線を, 同心円状閉曲線と呼ぶ.
次が主定理である.

定理 3.1. LR 数が 3 以下の素な平面閉曲線は, すべて同心円状閉曲線である.

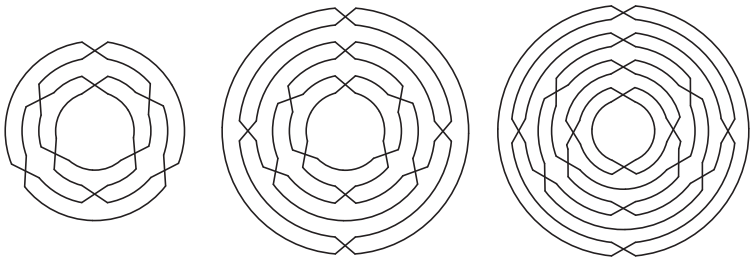
定理 3.3 を証明するためには, 次の補題が必要である. その前に用語の定義を行う.
$\mathcal{S}(P)$ を平面閉曲線 P の Seifert circles の集合とし, $I_+(\mathcal{S}(\mathcal{P}))$, $I_-(\mathcal{S}(\mathcal{P}))$ を次で定める.
$I_+(\mathcal{S}(\mathcal{P})) := \{\gamma \in \mathcal{S}(\mathcal{P}) \mid \gamma : \text{a clockwise inner-most circle.}\}$,
$I_-(\mathcal{S}(\mathcal{P})) := \{\gamma \in \mathcal{S}(\mathcal{P}) \mid \gamma : \text{an anti-clockwise inner-most circle.}\}$.
また, $c(\gamma)$ を, γ の 2 重点の個数とし, $i_{c_+}(P)$, $i_{c_-}(P)$ を次で定める.

$$i_{c_+}(P) := \sum_{\gamma \in I_+\mathcal{S}(\mathcal{P})} c(\gamma), \quad i_{c_-}(P) := \sum_{\gamma \in I_-\mathcal{S}(\mathcal{P})} c(\gamma).$$

このとき, 次の補題が成り立つ.

補題 3.2. P を平面閉曲線とする. $lr(w_P) \geq \max\{i_{c_+}(P),\ i_{c_-}(P)\}$.

実際に LR 数が 3 の prime な平面閉曲線を構成するには, 同じ向きを付けた複数の円を同心円状に並べ, それらの interval に smoothing の逆操作を施すことによる. 以下に LR 数が 3 である prime な平面閉曲線の例をあげておく.



さて, 補題 2.2, 定理 3.1 より, 次が成り立つ.

定理 3.3. LR 数が 3 の平面閉曲線は以下の場合に分類できる.

(1) (LR 数が 1 の平面閉曲線) # (LR 数が 1 の平面閉曲線),
(2) (LR 数が 1 の平面閉曲線) # (LR 数が 2 の平面閉曲線),
(3) (LR 数が 2 の平面閉曲線) # (LR 数が 2 の平面閉曲線),
(4) (LR 数が 1 の平面閉曲線) # (LR 数が 3 の *prime* な平面閉曲線).

以下は LR 数が 3 である平面閉曲線の例である.

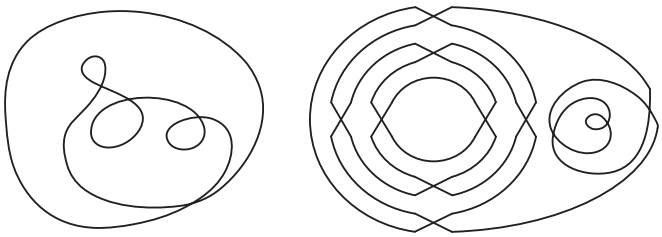


図 1: 左は (1) の例, 右は (2) の例.

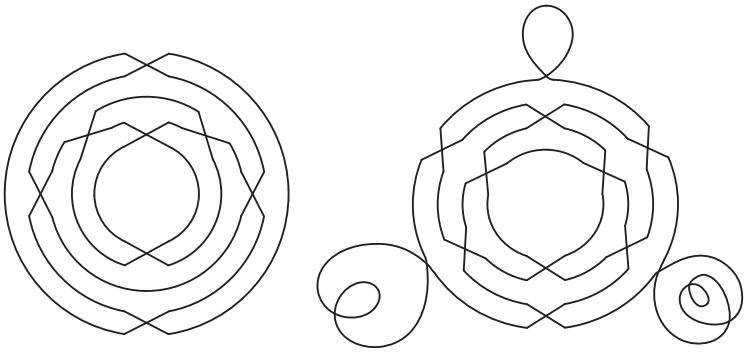


図 2: 左は (3) の例, 右は (4) の例.

LR 数が 2 以下の平面閉曲線の分類までは完了しているので, 定理 3.3 より LR 数が 3 以下の平面閉曲線について分類が完了したことになる.

参考文献

[1] R.Higa, Y.Nakanishi, S.Satoh, T.Yamamoto, *Crossing information and warping polynomials about the trefoil knot, Proceedings of Knots in Gumma*, HNSY, 2012.

TRUNCATED POLYAK ALGEBRA OF GAUSS WORDS AND CLASSIFICATION BY NUMERICAL FINITE TYPE INVARIANT

TAKAYUKI YAMAGUCHI
(JOINT WORK WITH T. FUKUNAGA AND T. YAMANOI)

Abstract. We show truncated Polyak algebras of some varieties of Gauss word, which are obtained by our computer program. Applying universal finite type invariant of Gauss word of rank 7 obtained from the truncated Polyak algebra, we have classified completely Gauss words of rank 5.

1. Preliminary

We introduce basic definitions and notations related to Gauss word [Tur06, Tur07a, Tur07b]. We also recall universal finite type invariant and Polyak algebra [GPV00, GI11].

A *Gauss word* of *rank* n is a sequence of $2n$ letters composed of n distinct letters. Two Gauss words w_1 and w_2 are *isomorphic* if there is a bijection between the sets of letters appearing in w_1 and w_2 so that a word created by mapping all letters of w_1 coincides with w_2.

We define *homotopy moves* for Gauss words as the following.

H1: $xAAy \leftrightarrow xy$
H2: $xAByBAz \leftrightarrow xyz$
H3: $xAByACzBCt \leftrightarrow xBAyCAzCBt$

Here, x, y, z, and t are arbitrary words that can be empty words. These moves correspond to Reidemaister moves defined for knots. If we consider closed Gauss words, we add another move which is called shift move;

HS: $AxAy \leftrightarrow xAyA$.

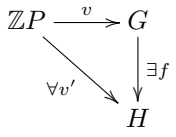
We define some groups to introduce finite type invariants on Gauss words. Let P be the set of homotopy classes of Gauss words and $\mathbb{Z}P$ be the free abelian group generated by the elements of P. Let $\mathbb{Z}\mathcal{I}$ be the free abelian group generated by isomorphism classes of Gauss words. Note that $\mathbb{Z}P$ coincides with $\mathbb{Z}\mathcal{I}$ modulo homotopy moves H1 to H3.

A word including a semi-letter $\dot{A}$ in $\mathbb{Z}\mathcal{I}$ is defined by

$$x\dot{A}y\dot{A}z = xAyAz - xyz, \tag{1}$$

where x, y, and z are arbitrary words that can be empty words. Let $v : \mathbb{Z}P \to G$ be a homotopy invariant for an abelian group G. The invariant v is a *finite type invariant* if there exists $n \in \mathbb{Z}$ so that $v(w) = 0$ for any $w \in \mathbb{Z}P$ including more than n semi-letters. Such a least n is called the *degree* of v.

A finite type invariant $v : \mathbb{Z}P \to G$ is a *universal invariant* if for any finite type invariant $v' : \mathbb{Z}P \to H$ of degree n for some abelian group H, there exists a homomorphism f so that the following diagram is commutative;

(2)


Goussarov et al. described a universal invariant of virtual knots as an angle bracket formula [GPV00]. Gibson and Ito [GI11] extended the formula to nanophrases. Let w_1 and w_2 be words. The word w_1 is a *subword* of the word w_2, which is written by $w_1 \triangleleft w_2$, if we can generate w_1 by deleting some letters from w_2. We define an angle bracket $\langle w_1, w_2 \rangle$ to be the number of subwords of w_2 isomorphic to w_1.

Polyak algebra G and truncated Polyak algebra G_n are defined as follows; We consider three other relations on $\mathbb{Z}\mathcal{I}$ different from the homotopy moves;

G1: $xAAy = 0$
G2: $xAByBAz + 2xAyAz = 0$
G3: $xAByACzBCt + xAByAzBt + xAyACzCt + xByCzBCt = xBAyCAzCBt + xBAyAzBt + xAyCAzCt + xByCzCBt$

Here, x, y, z, and t are arbitrary words. Let G be the group given by $\mathbb{Z}\mathcal{I}$ modulo the linearized homotopy moves. We consider another relation G4 for $n > 0$:

G4: If the rank of a word w is greater than n then $w = 0$.

Let G_n be the group given by $\mathbb{Z}\mathcal{I}$ modulo the linearized homotopy moves and G4.

We define a map $\theta : \mathbb{Z}\mathcal{I} \to \mathbb{Z}\mathcal{I}$ by

$$\theta(p) = \sum_{q \triangleleft p} q. \tag{3}$$

θ induces an isomorphism $\hat{\theta} : \mathbb{Z}P \to G$ We also define an additive map $O_n : \mathbb{Z}\mathcal{I} \to \mathbb{Z}\mathcal{I}$.

$$O_n(p) = \begin{cases} p & \text{if } \operatorname{rank}(p) \leq n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

Let P_n be the set of homotopy classes of Gauss words whose rank is n or less. We define $\tilde{\Gamma}_n : \mathbb{Z}P \to G_n$ by

$$\tilde{\Gamma}_n(p) := O_n \circ \hat{\theta}(p) = \sum_{q \triangleleft p} O_n(q) = \sum_{q \in P_n} \langle q, p \rangle q. \tag{5}$$

Proposition 1.1 ([Gib11])**.** *$\tilde{\Gamma}_n$ is a universal invariant of degree n.*

The following diagram means the above-mentioned situation;

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}\mathcal{I} & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{Z}\mathcal{I} & \xrightarrow{O_n} & \mathbb{Z}\mathcal{I} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}P & \xrightarrow{\hat{\theta}} & G & \xrightarrow{O_n} & G_n. \end{array} \qquad \tilde{\Gamma}_n : \mathbb{Z}P \to G_n$$

The part generated by the empty word is clearly $\mathbb{Z}$ and we consider H_n that is generated by words except for the empty word. We have

$$G_n = \mathbb{Z} \oplus H_n. \tag{6}$$

We define $\Gamma_n : \mathbb{Z}P \to H_n$ as the composite of $\tilde{\Gamma}_n$ and the natural map from G_n to H_n, that is,

$$\tilde{\Gamma}_n \left(\sum a_i w_i \right) = \left(\sum a_i, \Gamma_n \left(\sum a_i w_i \right) \right). \tag{7}$$

If we consider closed Gauss words then we append the relation

GS: $xAyA - BxBy = 0$.

In this case, the similar argument holds.

G_2	$\mathbb{Z}$
G_3	$\mathbb{Z}$
G_4	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
G_5	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6+\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
G_6	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{32}+(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^6+\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$
G_7	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{188}+(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{32}+(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^6+\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$

TABLE 1. Truncated Polyak algebra of open Gauss words

G_2	$\mathbb{Z}$
G_3	$\mathbb{Z}$
G_4	$\mathbb{Z}$
G_5	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
G_6	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$
G_7	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{15}$
G_8	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{48}+(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^7$

TABLE 2. truncated Polyak algebra of closed Gauss words

G_2	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
G_3	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3+\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
G_4	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{24}+(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3+\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$
G_5	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{211}+(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{24}+(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^3+\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$
G_6	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2325}+(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{211}+(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{24}+(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^3+\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$
G_7	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{30198}+(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{2325}+(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{211}+(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^{24}+(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z})^3+\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$

TABLE 3. Truncated Polyak algebra of open Gauss words without third type relations

G_2	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
G_3	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
G_4	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4+\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$
G_5	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{21}+(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4+\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$
G_6	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{176}+(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{21}+(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^4+\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$
G_7	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{1893}+(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{176}+(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{21}+(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^4+\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/64\mathbb{Z}$

TABLE 4. truncated Polyak algebra of closed Gauss words without third type relations

2. Structure of Truncated Polyak algebra and classification of Gauss words of rank 5

To obtain truncated Polyak algebra G_n and universal finite type invariants, our algorithm calculate Smith normal forms of matrices defined by generators and relations of H_n [FYY13].

The tables in this section show truncated Polyak algebras of the following four cases;

- Table 1: Open Gauss words (G1, G2, and G3)
- Table 3: Open Gauss words without third type relation (G1 and G2)
- Table 2: Closed Gauss words (G1, G2, G3, and GS)
- Table 4: Closed Gauss words without third type relation (G1, G2, and GS)

In first case, truncated Polyak algebras for $n = 0, \ldots, 4$ are obtained by Gibson and Ito [GI11] and for $n = 5, 6, 7$ by us [FYY13].

The universal invariant $\bar{\Gamma}_6$ of Gauss word could not classify two sets of Gauss words Gauss words of rank 5 [FYY13]. However, the universal invariant $\bar{\Gamma}_7$ obtained by our further computation can classify completely them. The table 5 shows the classification.

References

[FYY13] Tomonori Fukunaga, Takayuki Yamaguchi, and Takaaki Yamanoi, *Simplified numerical form of universal finite type invariant of gauss words*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications **22** (2013), no. 8, 1350037.

ABCDBEACED	ABCDECAEBD		
ABCADBECDE	ABCACDEDBE		
ABCBDAEDCE	ABCDCAEBDE		
ABCACDBEDE			
ABACDCEDBE			
ABACDCEBED	ABCDCAEDEB	ABCBDEDCAE	ABACDEDBCE
ABCDCEBDAE			
ABCBDCEAED			
ABCDECEADB			
ABCDCEDAEB	ABCDEBDACE		
ABCDEBECAD	ABCDCEBEAD	ABCDCAEBED	
ABCADBDECE	ABCDBDAECE		
ABACDCEBDE	ABACDEDBEC		
ABCADCDEBE			
ABACBDCEDE			
ABACDBECED	ABACDBDECE		
ABCDBEDEAC	ABCDEADBEC		
ABCBDCEDEA			
ABACDBCEDE	ABCBDCAEDE	ABACDBEDEC	
ABCADCEBED	ABCADEBECD		
ABCADEDCEB			
ABCBDCEADE	ABCBDEDAEC	ABCDACEDBE	ABCDAEBDEC
ABCDEDBECA	ABCBDAECDE	ABCBDEDCEA	ABCDCAEDBE
ABCDCEBDEA			
ABCDBECAED	ABCDBDEACE	ABCDEACEBD	
ABCDBEADEC	ABCDECADBE	ABCADEDBEC	
ABCDCADEBE			
ABCADECDBE	ABCADBEDEC	ABCDBECADE	ABCDBDEAEC
ABCADECEBD	ABCDBECEDA	ABCDECEBDA	ABCDBDECEA
ABCADBECED			
ABACDECEBD			
ABCDBDECAE			
ABCBDEAECD	ABCDEDACEB	ABCDCEAEDB	
ABACBDEDCE			
ABCDADECEB	ABCDAECEDB	ABCBDADECE	ABCDADBECE
ABCBDECEAD			
ABCBDAECED			
ABCBDAEDEC			
ABCDEDBEAC			
ABACDCBEDE	ABCBDACEDE		
ABACDCBD	ABCBDACD	ABCDCADB	
ABCACDBD	ABCADBDC	ABCDBDAC	
ABACBDCD			

TABLE 5. Complete classification of Gauss words of rank 5 or less under the universal invariant $\bar{\Gamma}_7$. Words excluded from the table are homotopic to the empty word. The invariant $\bar{\Gamma}_7$ distinguishes words in a row from words in another row. The words in each row are homotopic to each other.

[GI11] Andrew Gibson and Noboru Ito, *Finite type invariants of nanowords and nanophrases*, Topology Appl. **158** (2011), no. 8, 1050–1072. MR 2786675 (2012d:57016)

[Gib11] Andrew Gibson, *Coverings, composites and cables of virtual strings*, J. Knot Theory Ramifications **20** (2011), no. 8, 1173–1215. MR 2834122

[GPV00] Mikhail Goussarov, Michael Polyak, and Oleg Viro, *Finite-type invariants of classical and virtual knots*, Topology **39** (2000), no. 5, 1045–1068. MR 1763963 (2001i:57017)

[Tur06] Vladimir Turaev, *Knots and words*, Int. Math. Res. Not. (2006), Art. ID 84098, 23. MR 2276346 (2007k:57017)

[Tur07a] ———, *Lectures on topology of words*, Jpn. J. Math. **2** (2007), no. 1, 1–39. MR 2295606 (2008i:57024)

[Tur07b] ———, *Topology of words*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **95** (2007), no. 2, 360–412. MR 2352565 (2008i:57025)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HOKKAIDO UNIVERSITY, KITA 10, NISHI 8, KITA-KU, SAPPORO, HOKKAIDO, 060-0810, JAPAN

E-mail address: yt@math.sci.hokudai.ac.jp

Toeplitz 作用素を用いた Roe-Higson 指数定理の偶数次元への展開

瀬戸 樹*
名古屋大学大学院多元数理科学研究科 D1

概要

Atiyah-Singer の指数定理は閉多様体上の解析的指数と幾何的指数が結びつく定理である．この解析的指数は多様体のコンパクト性を外すと一般には定義できないので, コンパクトでない多様体で指数定理を考える場合は解析的指数の概念を一般化する必要がある．本稿では閉多様体上の指数定理を概観するところから始め, 開多様体における解析的指数のひとつの考え方と, 開多様体上での指数定理である Roe-Higson 指数定理と筆者の結果を紹介する．

1 閉多様体上の指数定理

閉曲面の種数 (いわゆる穴の数) を Gauss 曲率の積分で表わすという Gauss-Bonnet の定理は, 1943 年, Allendoerfer-Weil によって連結で向きづけられた偶数次元の閉 Riemann 多様体 M 上に拡張された [1]. Allendoerfer-Weil の議論は, 多様体が十分次元の高い Euclid 空間に埋め込めることを用いた外在的なものであった．その後, Gauss-Bonnet の定理は, Chern によって内在的な議論のみで証明された [5]. Gauss-Bonnet の定理は, $\chi(M)$ を Betti 数の交代和で定まる M の Euler 標数, $e(TM)$ を Euler 類, $[M]$ を M の基本類としたとき,

$$\chi(M) = \langle e(TM), [M] \rangle \qquad (*)$$

と表わされる．一方で Euler 標数は後述するように, 解析的な不変量であると解釈することができる．また, 右辺は, ホモロジー群とコホモロジー群の間の対写像で定まる幾何的な不変量である．ただし, Allendoerfer-Weil の論文 [1] や Chern の論文 [5] では, 右辺は Riemann 曲率から定まる微分形式の積分によって表されている．不変多項式に曲率を代入して特性類が定義されたのは Chern 類が定義された 1946 年 [6] であるので, Gauss-Bonnet の定理が $(*)$ の形で表わされたのは 1946 年以降である．

その後, この定理のように, 解析的な不変量と幾何的な不変量を結びつける定理が証明された．一般次元の閉多様体に対する符号数定理と, Riemann-Roch-Hirzebruch の定理である [10]. 符号数定理とは, 式 $(*)$ の左辺を多様体の符号数におきかえ, 右辺の Euler 類を, L 類 (これは Pontrjagin 類の多項式で書ける) におきかえたものである．Riemann-Roch-Hirzebruch の定理は複素閉多様体に対するものであるが, 式 $(*)$ の左辺を Dolbeault コホモロジーの次元の交代和, 右辺を Todd 類 (これは Chern 類の多項式で書ける) と $[M]$ との対写像におきかえたものである．

そして 1963 年, Atiyah-Singer の指数定理が発表された [2]. 偶数次元スピン閉多様体 M 上の Dirac 作用素 D [*1] に対する Atiyah-Singer の指数定理は, 次のように述べられる: M が偶数次元のときは D が作用する空

* m11034y@math.nagoya-u.ac.jp

[*1] D は楕円型微分作用素で, D^2 の主表象は接続 Laplacian の主表象と一致する． このことから, Dirac 作用素は標語的に “Laplacian の平方根” と呼ばれる．

間は $\mathbb{Z}_2$ 次数付きと見ることができる．そして, D^+ を正の次数の空間 (正スピノルの空間) への制限とする．D^+ も楕円型である．$\hat{\mathcal{A}}(TM)$ を $\hat{\mathcal{A}}$ 類 (これも Pontrjagin 類の多項式で書ける) とすれば,

$$\mathrm{index}(D^+)\left(:=\dim\mathrm{Ker}(D^+)-\dim\mathrm{Coker}(D^+)\right)=\langle\hat{\mathcal{A}}(TM),[M]\rangle$$

が成り立つ．ここで, M がコンパクトであることから D^+ は Fredholm 作用素となるので, その Fredholm 指数 $\mathrm{index}(D^+)$ は有限の値である．これは M の解析的な不変量であり, 右辺は幾何的な不変量である．Dirac 作用素の概念は, スピン多様体でない多様体に対しても一般化することができる[*2]．このとき, 右辺の幾何的な不変量も適切な変更をうけ, 指数定理が成り立つ．一般化の具体例として, 外積束上の外微分 d とその双対微分 δ の和 $d+\delta$ がある．$d+\delta$ を偶数次の微分形式全体の空間に制限すれば, その指数 $\mathrm{index}((d+\delta)^+)$ は $\chi(M)$ と一致し, Atiyah-Singer の指数定理から Gauss-Bonnet の定理が従う．

Dirac 作用素の指数定理の証明が基本となって楕円型微分作用素の指数定理が証明されるが, 奇数次元閉多様体では指数は 0 である．しかし, 楕円型擬微分作用素に対しては奇数次元閉多様体であっても指数が 0 になるとは限らない．そして, K 理論を用いることで, 楕円型擬微分作用素に対しても指数定理が成り立つことが証明されている [3].

偶数次元閉多様体では Dirac 作用素が基本となったが, 奇数次元では Toeplitz 作用素 T_ϕ が基本となる．ここで, Toeplitz 作用素は, 次のように定義される作用素である．閉多様体 M 上の Dirac 作用素を $D:L^2(S)\to L^2(S)$ とし, D の正の固有空間 $\mathcal{H}\subset L^2(S)$ を考え, $\mathcal{H}$ への射影を P とする．このとき, 連続写像 $\phi\in C(M;GL_l(\mathbb{C}))$ を用いて, 任意の $f\in\mathcal{H}^l$ に対して $T_\phi f:=P\phi f$ と定義する．ただし, P は直和によって $L^2(S)^l$ から $\mathcal{H}^l$ への射影とみなす．$T_\phi:\mathcal{H}^l\to\mathcal{H}^l$ は Fredholm 作用素になるので Fredholm 指数を考えることができ, その値は ϕ から作られる奇数次の Chern 指標を用いた幾何的な不変量を用いて表すことができる [4]. 特に S^1 上で Toeplitz 作用素の指数定理は次のようになる: S^1 上のスピン構造から定まる Dirac 作用素を $D=-i\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ とする．このとき $\mathcal{H}=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e^{ikx}\,;\,k=0,1,2,\dots\}\subset L^2(S^1)$ である．この $\mathcal{H}$ は Hardy 空間と呼ばれている．このとき, $\mathrm{index}(T_\phi)=-\deg(\det(\phi))$ が成り立つ．ここで deg は回転数をあらわす. Fredholm 作用素は解析的な指数であり, 回転数は幾何的な指数であるので, これは指数定理の原型とも呼べる公式である．実際, S^1 の場合は Atiyah-Singer の指数定理より前から知られている公式である [8].

2 開多様体上の指数定理

Atiyah-Singer の指数定理は閉多様体上の楕円型作用素に対する定理である．したがって, コンパクト性や, 境界が無いこと, 楕円型作用素であることといった仮定を変えた場合の指数定理を得るということは次に取り組むべき重要な課題となる．特に, コンパクト性が外れると, 楕円型作用素は一般には Fredholm 作用素にはならない．実際, $\mathbb{R}$ 上の Dirac 作用素 $-i\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ のスペクトルは $\mathbb{R}$ 全体となるので, $\mathbb{R}$ 上の Dirac 作用素 $-i\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ は Fredholm 作用素ではない．したがって, 指数定理を得るためには指数の概念を拡張する必要がある．一方, $\mathcal{L}$ をある Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素全体, $\mathcal{K}$ を H 上のコンパクト作用素全体, $\mathcal{Q}=\mathcal{L}/\mathcal{K}$ を Calkin 環としたとき, $K_1(\mathcal{Q})\cong K_0(\mathcal{K})\cong\mathbb{Z}$ なので, Fredholm 指数は $K_1(\mathcal{Q})$ や $K_0(\mathcal{K})$ の元であると考えることができる．そこで, 指数の概念を作用素環の K 群の元として一般化する．

Roe は閉多様体であるという条件を弱め, 完備 Riemann 多様体上で Roe 代数という C^* 環を定義し, その K_1 群の元として指数を定義してある指数定理を得た [11]．この指数定理はその後, Higson によって簡明な証明が与えられた [9]．そこで, 本稿ではこれを Roe-Higson 指数定理と呼ぶ.

M を完備 Riemann 多様体とし, M が図 1 のように閉超曲面 N で分割されているとする．このとき, M 上の Clifford 束 S に対して Dirac 作用素 D を考え, S の N への制限 S_N 上の Dirac 作用素を D_N とする．S_N

[*2] Dirac 作用素を定義できるようなベクトル束を Clifford 束と呼ぶ.

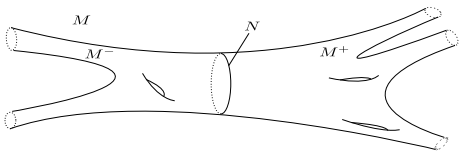


図 1　N によって分割された多様体 M

には $\mathbb{Z}_2$ 次数を入れることができるので, その正の空間への制限を D_N^+ と書く. 一方で, $C^*(M)$ を Roe 代数とし, D から $K_1(C^*(M))$ の元 odd-ind(D) を定義する. これを odd index class という. odd index class は, 代表元として $u_D := (D-i)(D+i)^{-1}$ をとることができる. 更に, Roe は Roe コサイクルという巡回 1 コサイクル ζ を定義し, odd index class とのペアリング $\langle \text{odd-ind}(D), \zeta \rangle$ を考えた. このペアリングは [7] によるものである. Roe-Higson 指数定理は, 定数倍を除いて次の公式が成り立つことを主張する定理である:

$$\langle \text{odd-ind}(D), \zeta \rangle = \text{index}(D_N^+)$$

右辺は Atiyah-Singer の指数定理より幾何的な不変量と結びつくので, これは指数定理の一種であると考えられる.

ところで, 一般に $C^*(M)$ の可逆元 u に対して, 定数倍を除いて

$$\langle [u], \zeta \rangle = \text{index}(\pi u^{-1} \pi : \pi(L^2(S)) \to \pi(L^2(S)))$$

が成り立つ. ここで, π は M^+ の定義関数である. したがって, Roe-Higson 指数定理を示すためにはこの右辺の形をした作用素の Fredholm 指数を計算すれば良いということになる.

Higson は, コンパクト集合の外では π と一致するような滑らかな関数 φ を用いて,

$$\text{index}\left(1 - \varphi + \varphi \frac{D-i}{D+i}\right)$$

を次のように計算した [9]: まず, 1 階の常微分方程式の解の個数を計算することで, $\mathbb{R} \times N$ の場合にこの値が index(D_N^+) と一致することを証明した. そして, 一般の分割された完備 Riemann 多様体 M に対しては, 次のようにして $\mathbb{R} \times N$ の場合に帰着させた. まず, M^+ を $[0, \infty) \times N$ におきかえた多様体, すなわち, $[0, \infty) \times N$ と M^- を N で貼り合わせた完備 Riemann 多様体を考えても, D や φ は変わるが index$(1 - \varphi + \varphi u_D)$ は変化しないことを証明した. そして, 同様の議論を適用して, 更に M^- を $(-\infty, 0] \times N$ におきかえれば, M に関する index$(1 - \varphi + \varphi u_D)$ と $\mathbb{R} \times N$ に関する index$(1 - \varphi + \varphi u_D)$ が一致するということを証明した. 一方, index$(1 - \varphi + \varphi u_D)$ は index$(\pi u_D^{-1} \pi : \pi(L^2(S)) \to \pi(L^2(S)))$ と一致するので, 一般の M で Roe-Higson 指数定理が証明された. Roe による証明は位相的 K 群なども用いた証明であったので, これによって非常に簡明な証明が与えられたと考えられる.

3　主結果

Roe-Higson 指数定理の右辺は, 考えている多様体が偶数次元, すなわち超曲面 N が奇数次元の場合には常に 0 となるので意味のある量を与えない. そこで, 偶数次元の場合に何らかの意味のある量を与える公式を得るという問題が考えられる. 一方, 偶数次元閉多様体の指数定理では Dirac 作用素が重要な役割を果たしたが, 奇数次元閉多様体では Toeplitz 作用素が重要な役割を果たした. そこで筆者は, 偶数次元完備 Riemann 多様体が分割されているとき, 多様体を分割している閉超曲面上の Toeplitz 作用素の Fredholm 指数を取り出すような指数定理を得るという問題を考え, 次の定理を得た.

Main Theorem
M を分割された完備 Riemann 多様体とする. S を M 上の $\mathbb{Z}_2$ 次数付き Clifford 束とし, ϵ を S の次数作用素とする. D を S の Dirac 作用素とする. $\phi \in C^1(N; GL_l(\mathbb{C}))$ とする. $S_N := S^+|_N$ と定義し, S_N の Dirac 作用素 D_N から得られる Toeplitz 作用素を T_ϕ と書く. さらに, ϕ を M 上で $grad(\phi)$ が有界連続になるように拡張する. このとき $u_\phi := (D+\epsilon)^{-1}\begin{bmatrix}\phi & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}(D+\epsilon)$ と定義すれば, 次が成り立つ:

$$\left\langle [u_\phi] - \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \phi\end{bmatrix}, \zeta \right\rangle = \frac{1}{8\pi i}\mathrm{index}(T_\phi).$$

証明は, まず $\mathbb{R}\times N$ の場合に左辺のペアリングを Fredholm 指数のホモトピー不変性を用いて計算する. そして Higson の議論を真似ることで一般の M の場合を $\mathbb{R}\times N$ の場合に帰着させる. 特に $\mathbb{R}\times S^1$ の場合には関数 e^{ikx} を用いることで一般の $\mathbb{R}\times N$ 場合よりも簡単に計算することができる.

参考文献

[1] Carl B. Allendoerfer and André Weil. The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 53, pp. 101–129, 1943.

[2] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators on compact manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 69, pp. 422–433, 1963.

[3] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators. I. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 87, pp. 484–530, 1968.

[4] Paul Baum and Ronald G. Douglas. K homology and index theory. In *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, Vol. 38 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pp. 117–173. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[5] Shiing-shen Chern. A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 45, pp. 747–752, 1944.

[6] Shiing-shen Chern. Characteristic classes of Hermitian manifolds. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 47, pp. 85–121, 1946.

[7] Alain Connes. Noncommutative differential geometry. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. 62, pp. 257–360, 1985.

[8] I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn. The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, Vol. 13, pp. 185–264, 1960.

[9] Nigel Higson. A note on the cobordism invariance of the index. *Topology*, Vol. 30, No. 3, pp. 439–443, 1991.

[10] Friedrich Hirzebruch. *Topological methods in algebraic geometry*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Translated from the German and Appendix One by R. L. E. Schwarzenberger, With a preface to the third English edition by the author and Schwarzenberger, Appendix Two by A. Borel, Reprint of the 1978 edition.

[11] John Roe. Partitioning noncompact manifolds and the dual Toeplitz problem. In *Operator algebras and applications, Vol. 1*, Vol. 135 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pp. 187–228. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

ミンコフスキー空間内の特異点を持つ離散極大曲面について

安本　真士
神戸大学大学院理学研究科*

概要

3 次元ミンコフスキー空間内の離散極大曲面について話をさせていただきます。滑らかな場合、極大曲面は一般に特異点を持つことが知られており、離散化した際にも離散極大曲面の特異点を定義できることが期待できます。今回の講演では、離散極大曲面の構成法と、離散極大曲面に現れるある種の特異点およびその判定法について紹介致します。

1　Introduction

まずは離散微分幾何学について簡単な紹介をさせていただきます。離散微分幾何学とは、微分幾何学的に良い構造を保つように曲面の離散化を行う研究であり、主にアプローチで曲面の離散化を行います。

- 変分的な性質に基づく離散化
- 可積分系の変換理論に基づく離散化

一般に、一方のアプローチに基づいて離散化を行うと他方の性質は保たれないため (というよりは一方の性質のみに着目して離散化を行うため、他方の性質には全く注意を払っていないという方が正しいかと思いますが)、この 2 つを両立して離散化を行うことは難しくかつ興味深い問題であると考えられます。今回私が紹介するのは後者の考え方に基づいた曲面の離散化です。可積分系と曲面論は非常に相性がよく、可積分系の技術を応用して特別なクラスの曲面を構成することができます。たとえば本テクニカルレポート集内の緒方勇太氏 [6] の解説をご覧ください。

離散極大曲面の紹介の前に、まずは Bobenko 氏と Pinkall 氏が構成した 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の離散極小曲面について紹介をさせていただきます。詳細は [1] をご覧ください。我々は双等温曲面 (通常は isothermic 曲面と呼びます) と呼ばれる特別なクラスの曲面の離散化を中心に行っています。双等温曲面とは、等温座標かつ曲率線座標を持つ曲面の総称であり、2 次曲面、回転面、$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面、平均曲率一定曲面などを含む重要なクラスの一つです。

まずは 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ を、

$$\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -ix_3 & -ix_1 + x_2 \\ -ix_1 - x_2 & ix_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{sl}_2\mathbb{C}$$

と同一視し、$X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathbb{R}^3$ とします。このとき、

$$Q(X_1, X_2, X_3, X_4) = (X_1 - X_2)(X_2 - X_3)^{-1}(X_3 - X_4)(X_4 - X_1)^{-1}$$

の固有値の組 $\{q, \bar{q}\}$ のことを、(X_1, X_2, X_3, X_4) の複比ということにします。

Remark.

- 複比は Moebius 不変である。
- (X_1, X_2, X_3, X_4) が同一円周上にある $\Leftrightarrow$ 複比が実数となる。
- 複比が負の実数となるとき、(X_1, X_2, X_3, X_4) は基本四角形となる。(ただし、4 点は一直線上にはないとする)

□

$\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな双等温曲面に対して次の性質が知られています。

* myasu@math.kobe-u.ac.jp

Proposition 1. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^3$ をはめ込みとし、（十分小さな）ϵ に対し、

$$f_1 = f+\epsilon(-f_u-f_v)+\frac{\epsilon^2}{2}(f_{uu}+2f_{vv}+2f_{uv}),$$
$$f_2 = f+\epsilon(f_u-f_v)+\frac{\epsilon^2}{2}(f_{uu}+2f_{vv}-2f_{uv}),$$
$$f_3 = f+\epsilon(f_u+f_v)+\frac{\epsilon^2}{2}(f_{uu}+2f_{vv}+2f_{uv}),$$
$$f_4 = f+\epsilon(-f_u+f_v)+\frac{\epsilon^2}{2}(f_{uu}+2f_{vv}-2f_{uv})$$

とすると、$f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^3$ が双等温曲面 $\Leftrightarrow Q(f_1,f_2,f_3,f_4)=-I+\mathcal{O}(\epsilon)$

この性質に基づいて、離散双等温曲面を次のように定義します。

Definition 1. $F:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{R}^3$ が

$$Q(F,F_1,F_{12},F_2)=-\frac{\alpha_m}{\beta_n}I$$

をみたすとき、F を離散双等温曲面という。ここで、$m,\,n\in\mathbb{Z}$ に対し

$$F=F_{m,n},\ F_1=F_{m+1,n},\ F_{12}=F_{m+1,n+1},\ F_2=F_{m,n+1}$$

と略記し、$\alpha_m>0$ (resp. $\beta_n>0$) は m (resp. n) のみに依存するスカラー関数で、F の複比生成関数といいます。

Remark. F のターゲットが $\mathbb{C}$ となっているとき、F を離散正則関数といい、F を g と表すことにします。 □

離散極小曲面は次の連立差分方程式を解くことで得られることが知られています。離散極小曲面の定義については [1] をご覧ください。

Theorem 1. 離散極小曲面 F は、離散正則関数 g を用いて表される連立差分方程式

$$\begin{cases} \Delta_1 F=\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_m}{\Delta_1 g}\begin{pmatrix}1-g_{m+1,n}g_{m,n}\\ i+ig_{m+1,n}g_{m,n}\\ g_{m+1,n}+g_{m,n}\end{pmatrix}\right),\\ \Delta_2 F=-\mathrm{Re}\left(\frac{\beta_n}{\Delta_2 g}\begin{pmatrix}1-g_{m,n+1}g_{m,n}\\ i+ig_{m,n+1}g_{m,n}\\ g_{m,n+1}+g_{m,n}\end{pmatrix}\right)\end{cases} \tag{1}$$

を解くことで与えられる。ここで、α_m、β_n は g の複比生成関数であり、

$$\Delta_1 F:=F_{m+1,n}-F_{m,n},\ \Delta_2 F:=F_{m,n+1}-F_{m,n}.$$

とする。逆に、任意の離散極小曲面はある離散正則関数 g を用いて構成することが出来る。

2 Discrete maximal surfaces in Minkowski space

3 次元ミンコフスキー空間内の離散極大曲面の構成について簡単な紹介をさせていただきます。詳細は [4] をご覧ください。以後、$\mathbb{R}^{2,1}:=(\{(x_1,x_2,x_3)|x_j\in\mathbb{R}\},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ をローレンツ計量

$$\langle(x_1,x_2,x_0),(y_1,y_2,y_0)\rangle=x_1y_1+x_2y_2-x_0y_0.$$

を持つ 3 次元ミンコフスキー空間とします。このとき、$\mathbb{R}^{2,1}$ を

$$\mathbb{R}^{2,1}\ni(x_1,x_2,x_0)=\begin{pmatrix}\mathrm{i}x_0 & x_1-\mathrm{i}x_2\\ x_1+\mathrm{i}x_2 & -\mathrm{i}x_0\end{pmatrix}\in\mathrm{sl}_{1,1}\mathbb{C}$$

と同一視します。

Definition 2.

- $X_1,X_2,X_3,X_4\in\mathbb{R}^{2,1}$ とします。このとき、

$$\hat{Q}(X_1,X_2,X_3,X_4)=(X_1-X_2)(X_2-X_3)^{-1}(X_3-X_4)(X_4-X_1)^{-1}$$

の固有値の組のことを、(X_1,X_2,X_3,X_4) の複比といいます。

- $F:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{R}^{2,1}$ とします。F が

$$\hat{Q}(F,F_1,F_{12},F_2)=-\frac{\alpha_m}{\beta_n}I$$

をみたすとき、F を離散双等温曲面という。

- F を離散双等温曲面とします。このとき以下の差分方程式

$$F^*_{m+1,n} - F^*_{m,n} = \alpha_m \frac{F_{m+1,n} - F_{m,n}}{\|F_{m+1,n} - F_{m,n}\|^2},$$

$$F^*_{m,n+1} - F^*_{m,n} = -\beta_n \frac{F_{m,n+1} - F_{m,n}}{\|F_{m,n+1} - F_{m,n}\|^2}$$

  によって得られる曲面 F^* のことを F の双対曲面といいます。
- F を離散双等温曲面とし、F^* を F の双対曲面とします。このとき F が離散極大曲面であるとは、F^* のノルム 2 乗が常に -1 となることをいいます。(つまり双対曲面が F の双曲ガウス写像になるということです)

Remark.

- $x_3 = 0$ のとき、上記の複比は通常の（複素関数の意味での）複比と上の意味での複比とは一致する。
- 複比は等長変換、相似変換のもとで不変である。
- (X_1, X_2, X_3, X_4) が 円錐曲線 上にある $\Rightarrow$ 複比が実数となる。
- 3 次元ユークリッド空間の場合とは違い、複比が負の実数であっても、(X_1, X_2, X_3, X_4) は基本四角形になるとは限らない。
- F の像からできる四角形 (F, F_1, F_{12}, F_2) は平行移動された光錐の上にあるとします。

□

さらに離散極大曲面の” 特異点”を定義いたします。

Definition 3. 面 $\mathcal{F} = (F, F_1, F_{12}, F_2)$ が空間的平面上にないとき、$\mathcal{F}$ のことを特異面 (singular face) という。

このように定めた理由は、

1. 離散極大曲面の面は空間的平面上にあってほしい。
2. 離散極大曲面の特異点は、離散正則関数 g が $\mathbb{S}^1$ の近くで現れてほしい。

という 2 点が挙げられます。

まずは離散極大曲面に対する Weierstrass 型の表現公式を紹介いたします。

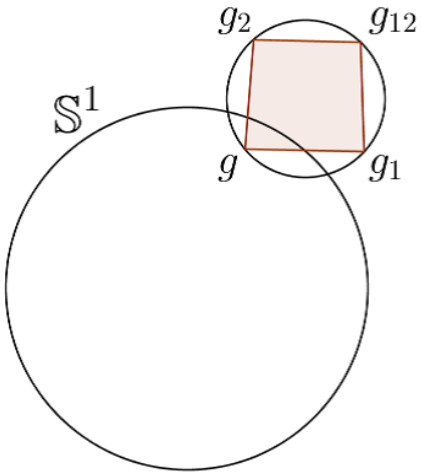
Theorem 2. 離散極大曲面 F は、離散正則関数 g を用いて表される連立差分方程式

$$\begin{aligned} \Delta_1 F &= \mathrm{Re}\left(\frac{\alpha_m}{\Delta_1 g}\begin{pmatrix} 1 + g_{m+1,n}g_{m,n} \\ \mathrm{i} - \mathrm{i}g_{m+1,n}g_{m,n} \\ -(g_{m+1,n} + g_{m,n}) \end{pmatrix}\right), \\ \Delta_2 F &= -\mathrm{Re}\left(\frac{\beta_n}{\Delta_2 g}\begin{pmatrix} 1 + g_{m,n+1}g_{m,n} \\ \mathrm{i} - \mathrm{i}g_{m,n+1}g_{m,n} \\ -(g_{m,n+1} + g_{m,n}) \end{pmatrix}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

を解くことで与えられる。ここで、α_m、β_n は g の複比生成関数とする。逆に、任意の離散極大曲面はある離散正則関数 g を用いて構成することが出来る。

また、離散極大曲面の特異面の判定条件は以下の通りです。

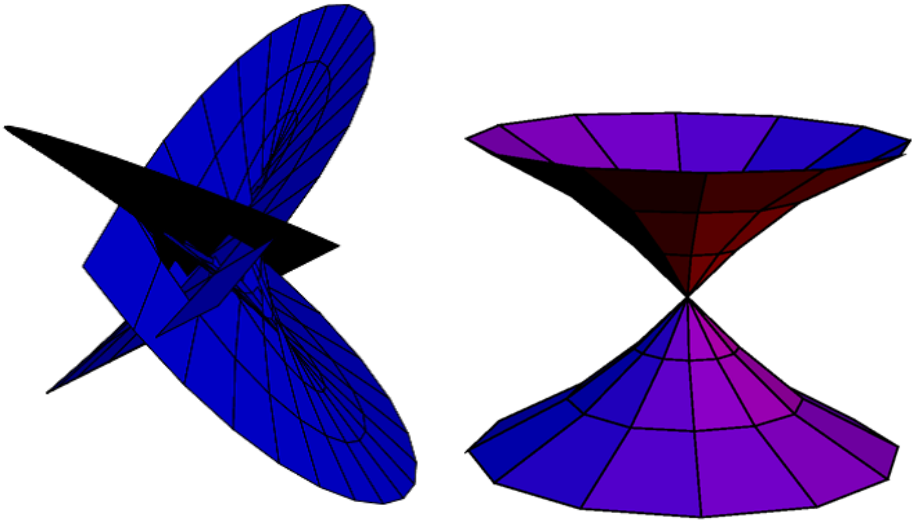
Theorem 3. g を離散正則関数とし、F を g を用いて構成される離散極大曲面とする。このとき、面 $\mathcal{F} = (F, F_1, F_{12}, F_2)$ が特異面となるための必要十分条件は、F, F_1, F_{12}, F_2 に対応する正則関数で構成される面 $\mathcal{G} = (g, g_1, g_{12}, g_2)$ の頂点を通る円が $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と共有点を持つことである。



次に、簡単な例を 2 つ紹介致します。

Example 1. Theorem 2 で g を

$$g(m, n) = c(m + \mathrm{i}n) \ (c \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$



とすると離散極大 Enneper 曲面が得られる。

Example 2. Theorem 2 で g を

$$g(m,n) = \exp(\alpha m + \mathrm{i}\beta n) \ (\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

とすると離散懸垂面が得られる。

最後になりますが、私は [2] のアイデアと今回紹介した内容に基づいて、$\mathbb{R}^{2,1}$ 内の半離散極大曲面の構成および特異点の解析を行いました。半離散曲面論は滑らかな曲面と離散曲面との間にある対応関係を調べるのに利用できると期待されています。特異点を持つ曲面の離散化というのはかなり新たな研究テーマなので、様々な離散化された曲面の特異点の解析は興味深い研究テーマになるのではないかと期待しています。

参考文献

[1] A. I. Bobenko and U. Pinkall, Discrete isothermic surfaces, J. Reine Angew. Math., 475 (1996), 187-208.

[2] W. Rossman and M. Yasumoto, Weierstrass representation for semi-discrete minimal surfaces, and comparison of various catenoids, J. Math-for-Ind. 4B (2012), 109-118.

[3] M. Umehara and K. Yamada, Maximal surfaces with singularities in Minkowski space, Hokkaido Math. J. 35 (2006), 13-40.

[4] M. Yasumoto, Discrete maximal surfaces with singularities in Minkowski space, preprint.

[5] M. Yasumoto, Semi-discrete maximal surfaces with singularities in Minkowski space, in preparation.

[6] 緒方勇太, The DPW method in $\mathbb{S}^{2,1}$, $\mathbb{H}^{2,1}$, 本テクニカルレポート集内.

DPW method for constant mean curvature surfaces in 3-dimensional Lorentzian spaceforms

緒方　勇太

1 Introduction

私は微分幾何学、特に曲面論を研究している。曲面論が対象とする重要な曲面のクラスとして、「平均曲率一定曲面 (CMC 曲面)」がある。CMC 曲面の構成方法はいくつかあり、例えば正則関数を使った「DPW の方法」や調和写像を使った「剱持の方法」などが知られている。今回の講演では、DPW の方法を紹介する。DPW の方法は、J. Dorfmeister 氏と F. Pedit 氏、H. Wu 氏によって 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の CMC 曲面を構成するために考案された理論である。([4]) この DPW の方法は、近年では $\mathbb{R}^3$ だけではなく、3 次元球面空間 $\mathbb{S}^3$ や 3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$、3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{2,1}$ 内の空間的な CMC 曲面の構成のために応用されている。([3]) 曲面が「空間的」とは、その法ベクトルのノルムが常に負になるものである。今回はこの DPW の方法を 3 次元ドジッター空間 $\mathbb{S}^{2,1}$ 内と 3 次元アンチドジッター空間 $\mathbb{H}^{2,1}$ 内の空間的な CMC 曲面に応用する。

2 Theory for the DPW method

まず正則関数のデータである正則ポテンシャル ξ を考える：

Definition 2.1 (正則ポテンシャル). Σ を $\mathbb{C}$ 内の単連結領域とし、$z \in \Sigma$ かつ $\lambda \in \mathbb{C}$ とする。このとき、正則ポテンシャル ξ を以下で定義する。

$$\xi := A dz, \quad A = A(z, \lambda) = \sum_{j=-1}^{\infty} A_j(z) \lambda^j.$$

ただし、$A_j(z)$ は 2×2 行列で以下の条件を満たすものとする：

- λ に依存しない
- $z \in \Sigma$ に対し、各成分が正則関数
- トレースが 0
- j が偶数 *(resp.* 奇数*)* のときは、対角行列 *(resp.* 非対角行列*)*
- $A_{-1}(z)$ の右上成分は 0 でない

今、上で定義した正則ポテンシャル ξ が与えられたとする。このとき、以下の初期条件付きの微分方程式を考える：

$$d\phi = \phi\xi, \quad \phi(z_*) = I \quad \text{for} \quad \phi \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), {}^{\exists}z_* \in \Sigma,$$

上の微分方程式を解くことで得られた ϕ に対し、さらに「行列の岩澤分解」を行う。今回は $\mathbb{S}^{2,1}$ や $\mathbb{H}^{2,1}$ の CMC 曲面を構成したいので、リー群 $\mathrm{SU}_{1,1}$ への岩澤分解を用いる。具体的には、

$$\phi = F \cdot B,$$

where

$$F = F(z, \bar{z}, \lambda) \in \mathrm{SU}_{1,1} := \left\{ A \in M_{2\times 2} \middle| \det(A) = 1, A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

and

$$B = B(z, \bar{z}, \lambda) \in \Lambda^+_{\mathbb{R}}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}).$$

(ここで B に関しては定義等が複雑なので述べない。[3] を参照。)

そして最後に、得られた F を「Sym-Bobenko 型の公式」(Section 3 で詳しく述べる。) に代入して、$\mathbb{S}^{2,1}$ 内や $\mathbb{H}^{2,1}$ 内の CMC 曲面が得られる。これらの一連の CMC 曲面の構成方法を **DPW の方法**と呼んでいる。そして、この DPW の方法は「CMC 曲面は正則ポテンシャルを必ず持つ」という逆の命題まで保証する。(証明は [3], [4], [6] 参照。)

3 Result1(Sym-Bobenko 型の公式)

ここでは、私が構成した $\mathbb{S}^{2,1}$ と $\mathbb{H}^{2,1}$ の Sym-Bobenko の公式について紹介する。講演の際には、先行研究 [3] のローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{2,1}$ 内の CMC 曲面についても触れたいので、ここで $\mathbb{R}^{2,1}$ の Sym-Bobenko 型の公式も紹介する。

Theorem 3.1 ($\mathbb{R}^{2,1}$ の Sym-Bobenko 型の公式 [3]). *$F \in \mathrm{SU}_{1,1}$ を Section 2 の ϕ を岩澤分解して得られたものとする。そのとき、f と N を以下のように定義する：*

$$f = \left[\frac{1}{2H} F i\sigma_3 F^{-1} + \frac{i}{H} \lambda(\partial_\lambda F) F^{-1} \right] \Big|_{\lambda=1}, \tag{3.1}$$

$$N = -\left[F i\sigma_3 F^{-1} \right] \Big|_{\lambda=1}. \tag{3.2}$$

このように定義された f は、$\mathbb{R}^{2,1}$ 内の空間的な CMC $H \neq 0$ 曲面で、その法ベクトルは N で与えられる。特に、(3.1) を $\mathbb{R}^{2,1}$ 内の空間的な CMC 曲面の **Sym-Bobenko 型の公式**と呼ぶ。

Theorem 3.2 ($\mathbb{S}^{2,1}$ の Sym-Bobenko 型の公式). *F を Section 2 の ϕ を岩澤分解して得られたものとする。ここで $q, \psi \in \mathbb{R}$ に対し、$F_0 := F|_{\lambda=e^{\frac{q}{2}e^{i\psi}}}$ とする。 そのとき、f と N を以下のように定義する：*

$$f = F_0 \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}q} & 0 \\ 0 & -e^{-\frac{1}{2}q} \end{pmatrix} \overline{F_0}^t, \tag{3.3}$$

$$N = -F_0 \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}q} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}q} \end{pmatrix} \overline{F_0}^t. \tag{3.4}$$

このように定義された f は、$\mathbb{S}^{2,1}$ 内の空間的な *CMC* $H = -\coth(-q)$ 曲面で、その法ベクトルは N で与えられる。特に、(3.3) を $\mathbb{S}^{2,1}$ 内の空間的な *CMC* 曲面の **Sym-Bobenko 型の公式**と呼ぶ。

Theorem 3.3 ($\mathbb{H}^{2,1}$ 内の Sym-Bobenko 型の公式). $F \in \mathrm{SU}_{1,1}$ を *Section 2* の ϕ を岩澤分解して得られたものとする。ここで、$\gamma_1 - \gamma_2 \neq n\pi$ *($n \in \mathbb{Z}$)* となる $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ に対し、$F_1 := F|_{\lambda = e^{i\gamma_1}}$, $F_2 = F|_{\lambda = e^{i\gamma_2}}$ とする。そのとき、f と N を以下のように定義する：

$$f = iF_1 \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i(\gamma_1 - \gamma_2)} & 0 \\ 0 & -e^{-\frac{1}{2}i(\gamma_1 - \gamma_2)} \end{pmatrix} \overline{F_2}^t, \tag{3.5}$$

$$N = -F_1 \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i(\gamma_1 - \gamma_2)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i(\gamma_1 - \gamma_2)} \end{pmatrix} \overline{F_2}^t. \tag{3.6}$$

このように定義された f は、$\mathbb{H}^{2,1}$ 内の空間的な *CMC* $H = -\cot(\gamma_1 - \gamma_2)$ で、その法ベクトルは N で与えられる。特に、(3.3) を $\mathbb{H}^{2,1}$ 内の空間的な *CMC* 曲面の **Sym-Bobenko 型の公式**と呼ぶ。

※この 3 つに定理のうち、$\mathbb{S}^{2,1}$ のケースのみが厳密には、「$F \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$」であることを注意しておく。($F \in \mathrm{SU}_{1,1}$ では強すぎる) 詳しくは、[6], [9]。

4 Result2(曲面の可視化)

ここまで CMC 曲面の構成方法である DPW の方法について述べてきたが、ここで**曲面の可視化**についても触れておく。まず、$\mathbb{S}^{2,1}$ ついてだが、$\mathbb{S}^{2,1}$ は $\mathbb{R}^{3,1}$ の部分空間として以下のように定義される空間であった：

$$\mathbb{S}^{2,1} := \{x \in \mathbb{R}^{3,1} | \langle x, x \rangle = 1\}, \quad \text{ただし、} \langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 1.$$

このままだと CMC 曲面を作っても視ることができないので、[5], [7], [8], [11] と同様の方法で $\mathbb{S}^{2,1}$ を「hollow ball model」という可視化モデル $\mathcal{H}$ に変更する：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{2,1} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ \cup & & \cup \\ (x_1, x_2, x_3, x_0) & \longmapsto & \left(\frac{e^{\arctan(x_0)}}{\sqrt{1+x_0^2}} x_1, \frac{e^{\arctan(x_0)}}{\sqrt{1+x_0^2}} x_2, \frac{e^{\arctan(x_0)}}{\sqrt{1+x_0^2}} x_3 \right) \end{array}. \tag{4.1}$$

次に $\mathbb{H}^{2,1}$ ついてだが、$\mathbb{H}^{2,1}$ は $\mathbb{R}^{2,2}$ の部分空間として以下のように定義される空間であった：

$$\mathbb{H}^{2,1} := \{x \in \mathbb{R}^{2,2} | \langle x, x \rangle = -1\}, \quad \text{ただし、} \langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = -1. \tag{4.2}$$

こちらも同様に、このままだと CMC 曲面を作っても視ることができない。そこで今回、私は「tube model $\mathcal{T}$」という可視化モデルを構成した：

$$\begin{aligned} & \mathcal{T} \\ = \; & \left\{ \left(\left\{ 5 + \left(e^{\arctan\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)} - 1 \right) \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \right\} \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}}, \right. \right. \\ & \left. \left. \left\{ 5 + \left(e^{\arctan\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)} - 1 \right) \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \right\} \frac{x_4}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}}, \left(e^{\arctan\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)} - 1 \right) \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

. ※ [9] では、より一般的な genaral tube model についても触れている。

講演当日は、これらの理論の詳細とより多くの例をお見せするつもりである。

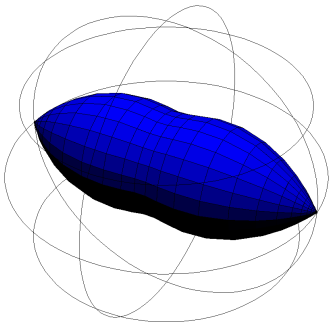


Fig. 1: hollow ball model で可視化した
$\mathbb{S}^{2,1}$ 内の CMC 曲面

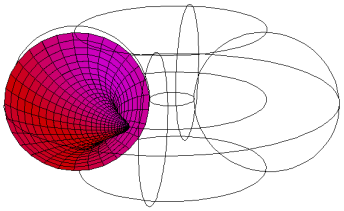


Fig. 2: tube model で可視化した
$\mathbb{H}^{2,1}$ 内の CMC 曲面

Bibliography

[1] G. D. Birkhoff, *Singular points of ordinary linear differential equations*, Trans. Amer. Soc. **10** (1909), 436-470.

[2] G. D. Birkhoff, *A theorem on matrices of analytic functions*, Math. Ann. **74** (1913), 122-133.

[3] D. Brander, W. Rossman and N. Schmitt, *Holomorphic representation of constant mean curvature surfaces in Minkowski space: consequences of non-compactness in loop group methods*, Adv. Math. **223** (2010), no. 3, 949-986.

[4] J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. **6(4)** (1998), 633-668.

[5] S. Fujimori, *Spacelike mean curvature 1 surfaces of genus 1 with two ends in de Sitter 3-space*, Kyushu J. Math. **61** (2007), no.1, 1-20.

[6] S. Fujimori, S.-P. Kobayashi and W. Rossman, *Loop group Methods for Constant Mean Curvature Surfaces*, Rokko Lecture Series 17 (2005).

[7] Y.-W. Kim and S.-D. Yang, *The geodesic reflection principle for spacelike constant mean curvature surfaces in de Sitter three-space*, preprint.

[8] S. Lee and S.-D. Yang, *Spacelike mean curavature -1 trinoids in de Sitter three-space.*, Osaka J. Math. To appear.

[9] Y. Ogata, *DPW method for constant mean curvature surfaces in 3-dimensional Lorentzian spaceforms*, in preparation.

[10] A. Pressley and G. Segal, *Loop groups*, Oxford Math. monographs, Carendon Press, Oxford, 1986.

[11] S.-D. Yang, *Bjoerling formula for spacelike surfaces of constant mean curvature in the de Sitter space*, preprint.

A型・D型Dynkin図形に付随したS^3の$\mathbb{R}^4$へのはめ込み

金城 就実　(信州大学大学院理工学系研究科)*

1. はじめに

二つの多様体が与えられたとき，それらの間に埋め込み（はめ込み）が存在するかを判定すること，さらにそのような写像全体を分類することは，位相幾何学の中心的な話題のひとつである．多様体のはめ込みの正則ホモトピーによる分類問題は，Smale-Hirschの理論によりホモトピー論に帰着した．特に，n次元球面S^nのp次元空間$\mathbb{R}^p$へのはめ込みの場合，はめ込み$S^n \looparrowright \mathbb{R}^p$全体を正則ホモトピーによって分類した空間$\mathrm{Imm}[S^n, \mathbb{R}^p]$には連結和により群構造が入り，Stiefel多様体$V_{p,n}$のn次ホモトピー群$\pi_n(V_{p,n})$と同型となる．この同型によって与えられる$\pi_n(V_{p,n})$の値をはめ込みの**Smale不変量**と呼ぶ．Smale-Hirschの理論により，はめ込みの正則ホモトピーによる分類は完了したが，この分類がはめ込みの幾何的な情報をどのように反映しているかを読み取ることは難しい．そこで，Smale不変量をはめ込みの幾何（例えば，二重点の数やSeifert膜の指数）から読み取ろうとする研究（[11], [7], [1]など）が行われてきた．

本稿では，S^3の$\mathbb{R}^4$へのはめ込みの具体的な構成と，そのSmale不変量について紹介する．第2章でSmale-Hirschの定理について紹介し，第3章ではめ込み$S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$のSmale不変量の公式を紹介する．第4章と第5章で具体的にはめ込みを構成し，そのSmale不変量を求める．

2. Smale-Hirschの定理

Mをn次元多様体，Nをp次元多様体とする．多様体間の写像$f\colon M \to N$が**はめ込み**であるとは，任意の$x \in M$におけるfの微分

$$df_x\colon T_xM \to T_{f(x)}N$$

が単射であるときをいう．また，二つのはめ込み$f, g\colon M \looparrowright N$が**正則ホモトピック**であるとは，$f$と$g$を結ぶホモトピー$F\colon M \times I \to N$が存在して，各$t \in I$に対して$F_t := F(x,t)\colon M \to N$がはめ込みとなるときをいう．写像$F$のことを**正則ホモトピー**と呼ぶ．

$\mathrm{Imm}(M,V)$をMからNへのはめ込み全体の集合にC^∞-位相を入れた空間，$\mathrm{Mon}(TM,TV)$をMの接ベクトル空間TMからNの接ベクトル空間TNへの単射全体の集合へコンパクト開位相を入れた空間とする．ここで，接ベクトル空間の間の単射とは，各ファイバーT_xMへの制限が単射となるようなバンドル写像$TM \to TN$のことである．

定理 1 (Smale-Hirschの定理). MとVを先に定義した多様体で$n < p$とする．このとき，はめ込み$f\colon M \to N$に対して，その微分dfを対応させる写像

$$d\colon \mathrm{Imm}(M,V) \longrightarrow \mathrm{Mon}(TM,TV),$$
$$f \longmapsto df$$

は弱ホモトピー同値である[1].

* e-mail: skinjo@math.shinshu-u.ac.jp

[1] つまり，dが誘導するホモトピー群の間の写像d_*は全て同型であり，それぞれの弧状連結成分は1対1に対応する．

3. 特異Seifert膜とSmale不変量

ここからは，次元を固定し S^3 の $\mathbb{R}^4$ へのはめ込みの場合を扱う．Smale-Hirsch の理論により，$\mathrm{Imm}[S^3, \mathbb{R}^4]$ は $\pi_3(SO_4) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ と同型であることが分かる．また，[6] や [2] においてはめ込み $S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ のSmale不変量に関する研究が行われている．特に，[2] ではSmale不変量を**特異Seifert膜**に現れる特異点の言葉で書き下している．

定義 2. はめ込み $f\colon S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ に対し，f の特異Seifert膜とは次の条件を満たす滑らかな写像 $F\colon V \to \mathbb{R}^4$ である．

(i) V は $\partial V = S^3$ であるコンパクト向き付け可能4次元多様体であり，F の境界への制限は与えられたはめ込み f に一致する．

(ii) F は V の境界 $\partial V = S^3$ 近くでは特異点を持たない．

(iii) 任意の $p \in V$ に対して，F の微分 $dF_p\colon T_pV \to T_{F(p)}\mathbb{R}^4$ の rank は常に2以上で，$\mathrm{rk}\, dF_p = 2$ となる点は孤立している．

定理 3 (Ekholm-Takase [2])**.** $f\colon S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ をはめ込み，$F\colon V^4 \to \mathbb{R}^4$ を f の特異Seifert膜とすると，

$$\Omega(f) = \left(D(f) - 1, \frac{-H(f) - 2(D(f) - 1)}{4} \right).$$

ここで $D(f)$ は f の法写像度，$H(f) := -3\sigma(V) - \sharp\Sigma^2(F)$ であり，$\sigma(V)$ は V の指数，$\sharp\Sigma^2(F)$ は写像 F に現れる rank 2 の点を代数的に数えた値である．

注意 4. 向き付けられた4次元多様体間のgeneric写像のrank2の特異点は0次元多様体であり，hyperbolic umbilic point と elliptic umbilic point と呼ばれる二種類のみであることが知られている．定理 3 の $\sharp\Sigma^2(F)$ は，F をホモトピーを用いて摂動しgeneric写像としたとき，umbilic point を符号付で数えたものに一致する．

4. Plumbing

plumbing とは S^n 上の D^n 束たちを局所自明化を用いて底空間とファイバーを入れ換えて貼り合わせて得られる $2n$ 次元多様体（またはその操作）のことである．

定義 5. $E_1 \to S_1^n$ と $E_2 \to S_2^n$ をそれぞれ向き付けられた S^n 上の D^n-束とする．さらに，$D_i^n \subset S_i^n$ を低空間に埋め込まれた n 次元円板とし，

$$\varphi_i\colon D_i^n \times D^n \to E_i|_{D_i^n}$$

を制限束 $E_i|_{D_i^n}$ の自明化とする．このとき E_1 と E_2 の **plumbing** とは，各 $(x, y) \in D^n \times D^n$ に対して，$\varphi_1(x, y)$ と $\varphi_2(y, x)$ を同一視することで得られる $2n$ 次元多様体のことである．

ここでは4次元のplumbingについて考える．$E(\xi_k)$ をEuler類が k の S^2 上の D^2 束とする．$n > 0$ とし，$(A_n, m_1, \cdots, m_n)$ と $(D_n, m_1, \cdots, m_n)$ をそれぞれ次で表される重み付きのDynkin図形とする．

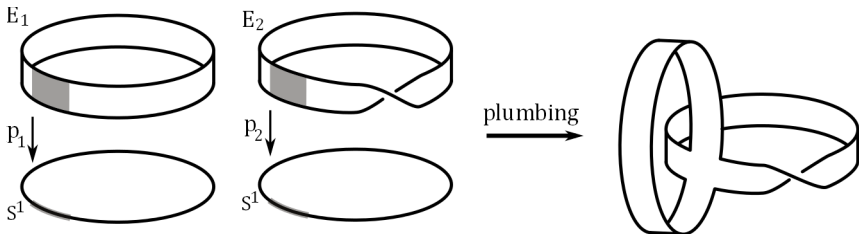
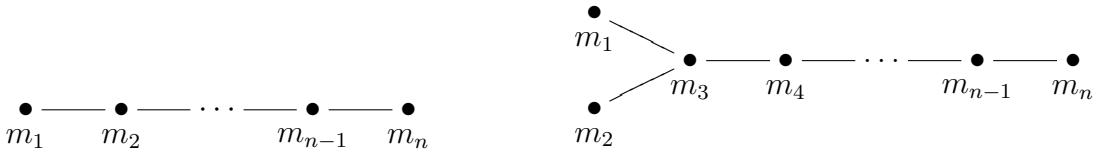


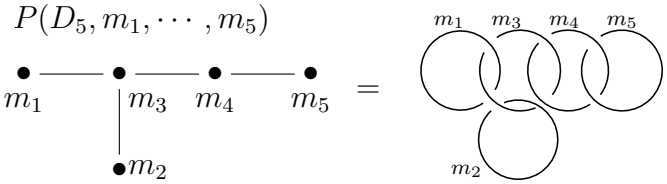
図 1: 自明束とメビウスの帯の plumbing



定義 6. 重み付き Dynkin 図形 $(A_n, m_1, \cdots, m_n)$（または D_n）に沿った plumbing とは，グラフの各頂点に $E(\xi_{m_i})$ $(i = 1, ..., n)$ を対応させ，辺の部分で定義 5 のような操作を施して得られる 4 次元多様体のことである．また，このようにして得られた多様体を $P(A_n, m_1, \cdots, m_n)$ や $P(D_n, m_1, \cdots, m_n)$ と表す．

注意 7. 重み付きの Dynkin 図形に沿った plumbing により得られる 4 次元多様体は，Kirby 図式で表すことができる（例えば，[4, §4.6] に詳しい説明がされている）．例えば，重み付きの Dynkin 図形 $(D_5, m_1, \cdots, m_5)$ に沿った plumbing の場合，次のように表される．

$P(D_5, m_1, \cdots, m_5)$



5. Dynkin 図形に付随したはめ込み

この章では，plumbing を用いて $L(n, 1)$ と S^3/Dic_n の $\mathbb{R}^4$ へのはめ込みを構成し，さらにこのはめ込みに普遍被覆写像を合成して得られるはめ込み $S^3 \to L(n, 1) \to \mathbb{R}^4$, $S^3 \to S^3/\mathrm{Dic}_n \to \mathbb{R}^4$ の Smale 不変量を決定する．

重み付き A 型と D 型の Dynkin 図形に沿った plumbing を考えると，その境界は，

$$\partial P(A_{n-1}, 2, \cdots, 2) = L(n, 1),$$
$$\partial P(D_{n+2}, 2, \cdots, 2) = S^3/\mathrm{Dic}_n$$

となることが知られている（[9, §6.2], [5, §8]）．

また，$E(\xi_{2k})$ は $\mathbb{R}^4$ へのはめ込むことができる（[2] で具体的に構成されている）．これらのはめ込み $E(\xi_{m_i}) \looparrowright \mathbb{R}^4$, $m_i = 2k$ を $\mathbb{R}^4$ 内でグラフ $(T, m_1, \cdots)$ に沿って plumbing することではめ込み $P(T, m_1, \cdots) \looparrowright \mathbb{R}^4$ が得られる．特に，$T = A_{n-1}$ または D_{n+2} であり，Euler 類が全て $m_i = 2$ の場合，はめ込み $L(n, 1) \looparrowright \mathbb{R}^4$, $S^3/\mathrm{Dic}_n \looparrowright \mathbb{R}^4$ を得る．さらに，それぞれ普遍被覆写像との合成を考えることで，S^3 のはめ込み

$$f_n \colon S^3 \to L(n, 1) \looparrowright \mathbb{R}^4,$$
$$g_n \colon S^3 \to S^3/\mathrm{Dic}_n \looparrowright \mathbb{R}^4.$$

をが定義される．このとき，これらのはめ込みの無限列について次の定理が成り立つ．

定理 8 ([8])**.** $n>0$ に対して，はめ込み $f_n\colon S^3\to L(n,1)\to\mathbb{R}^4$ と $g_n\colon S^3\to S^3/\mathrm{Dic}_n\to\mathbb{R}^4$ の Smale 不変量 $\Omega(f_n)$, $\Omega(g_n)$ はそれぞれ次で与えられる．

$$\Omega(f_n)=(n^2-1,0)\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},$$
$$\Omega(g_n)=(4n^2+12n-1,0)\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

$\mathrm{Cob}(3,4)$ を 3 次元多様体の 4 次元多様体へのはめ込みの同境群とする．このとき，Pontryagin-Thom 構成により $\mathrm{Cob}(3,4)$ は球面の 3 次安定ホモトピー群 π_3^S と同型である [3]．また [10] より，$\pi_3^S\cong\mathbb{Z}_{24}$ であり，$\mathrm{Imm}[S^3,\mathbb{R}^4]=\pi_3\,SO_4=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ から $\mathrm{Cob}(3,4)=\pi_3^S=\mathbb{Z}_{24}$, への対応は $(a,b)\mapsto a+2b\ (\mathrm{mod}\,24)$ で与えられる．よって，次が得られる．

系 9 ([8])**.** f_n と g_n のはめ込みの同境類は

$$[f_n]=(n^2-1)\bmod 24\ \in\mathbb{Z}_{24}\cong\pi_3^S,$$

$$[g_n]=(4n^2+12n-1)\bmod 24\ \in\mathbb{Z}_{24}\cong\pi_3^S.$$

となる．特に，f_n と g_n はそれぞれ n が 6 の倍数，3 の倍数のとき π_3^S の生成元を表す．

定理の証明には Kirby 計算を用いる（注意 7 より，plumbing は Kirby 図式と思える）．

参考文献

[1] T. Ekholm A. Szűcs, Geometric formulas for Smale invariants of codimension two immersions, *Topology* **42** (2003) 171–196.

[2] T. Ekholm and M. Takase, Singular Seifert surfaces and Smale invariants for a family of 3-sphere immersions, *Bull. London Math. Soc.* **43** (2011) 251–266.

[3] M. Freedman, Quadruple points of 3-manifolds in S^4, *Comment. Math. Helv.* **53** (1978) 385–394.

[4] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, 4-manifolds and Kirby calculus, Graduate Studies in Mathematics **20**, American Mathematical Society, Providence, RI, (1999).

[5] F. Hirzebruch, W. D. Neumann and S. S. Koh, Differentiable manifolds and quadratic forms, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Volume **4**, Marcel Dekker, Inc., New York (1971).

[6] J. Hughes, Bordism and regular homotopy of low-dimensional immersions, *Pacific J. Math.* **156** (1992) 155–184.

[7] J. Hughes P. Melvin, The Smale invariant of a knot. *Comment. Math. Helv.* **60** (1985) 615–627.

[8] S. Kinjo, Immersions of S^3 into $\mathbb{R}^4$ associated with Dynkin diagrams of types A and D, preprint, arXiv:1309.6526.

[9] P. Orlik, Seifert manifolds, Lecture Notes in Math. **291**, Springer-Verlag (1972).

[10] N. Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton Mathematical Series **14**, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1951).

[11] H. Whitney, The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space, *Ann. of Math. (2)* **45** (1944) 220–246.

5−membered ringed chains のなす配置空間のトポロジー

八木　潤 [1]
[1]nyagi-hi@chive.ocn.ne.jp,

1　背景

n 本の bonds $\beta_0, \cdots, \beta_{n-1}$ と n 個の vertices $v_0, \cdots, v_{n-1}$ からなる $\mathbf{R}^3$ 内の polygon を n-closed chain という。特に 2 つの隣接した bonds の間の角度を bond angle という。n-員環環状分子の数理モデルとして、全ての bonds の長さが 1 であって、隣り合った 2ヶ所の bond angles を除いて各 bond angle の大きさが全て同じであるような n-closed chain（本講演では n−membered ringed chain と呼ぶ）が考えられる [1]。そのような closed chains のなす集合は配置空間と呼ばれ、その配置空間を調べることは closed chains の動きを追跡することにあたる。S. Goto と K. Komatsu は環状分子の標準的な bond angle を考えたとき、bond angle が固定されていることを用いて、n=5,6,7 の場合の配置空間は $(n-4)$ 次元球面に同相であることを示した [1]。これにより、飽和 5 員環、飽和 6 員環の配置空間がそれぞれ円周、球面になることが、数理モデルの立場から説明できる。2012 年、S. Goto, Y. Hemmi, K. Komatsu, J. Yagi [2] によって bond angle を $\frac{n-4}{n-2}\pi < \theta < \frac{n-2}{n}\pi$ としたときもそれぞれ $(n-4)$ 次元球面になることが示されているが、任意の bond angle で配置空間がどのような構造を持つかということは分かっていない。本講演の目的は、bond ngale が $0 \leq \theta < \pi$ のときの 5−membered ringed chains のなす配置空間のトポロジーを決定することである。

2　主結果

Bond angle θ は $0 \leq \theta < \pi$ を満たすとする。このとき、n−membered ringed chains のなす配置空間を次のように定義する：

$$M_n(\theta) = \left\{ \begin{array}{c} V = (V_0, \cdots, V_{n-1}) \in \mathbf{R^{3n}} \\ V_i, V_j \in \mathbf{R^3} \end{array} \middle| \begin{array}{l} |V_i - V_{i+1}| = 1, \angle V_j = \theta \\ \forall\ i,\ j \bmod n, j \neq 0, n-1 \end{array} \right\} /G.$$

ここで G は $\mathbf{R}^3$ の等長変換群であり、$\angle V_j = \angle V_{j-1} V_j V_{j+1}$ とする。

明らかに $n = 3$ のときの配置空間は $\theta = \frac{\pi}{3}$ で 1 点となり、$n = 4$ のときは $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ でそれぞれ（折り畳まれた）直線と正方形（図 1 を参照）が得られ、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき歪んだ菱形（図 2 を参照）が得られるので、配置空間 $M_4(\theta)$ は 1 点（$\theta = 0, \frac{\pi}{2}$）と 2 点（$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$）の 2 種類がある。

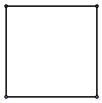


図 1: Square

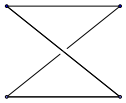


図 2: Rhombus

各 bond angle が全て一定であるような $n-$closed chains のなす配置空間については、$n \leq 6$ のとき closed chains 動きを明示的に表示することで分類される [3]。今回その方法を応用することで $M_5(\theta)$ を決定することができた。この証明のポイントは、V_0, V_2, V_4 を固定しても一般性を失わないことにある。

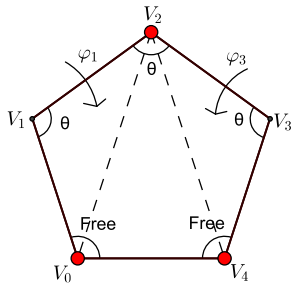


図 3: A closed $5-$chain

$\angle V_1V_2V_3 = \theta$ であることから、V_3 の動きは V_1 に依存して決まる。このことを用いて、次の定理を示すことができる。

Theorem 1. $n = 3, 4, 5$ のとき、$M_n(\theta)$ は次のように分類できる：

$$M_3(\theta) \cong \begin{cases} \{1\ point\} & (\theta = \frac{\pi}{3}) \\ \emptyset & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$M_4(\theta) \cong \begin{cases} \{1\ point\} & (\theta = 0,\ \frac{\pi}{2}) \\ \{2\ points\} & (0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \\ \emptyset & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$M_5(\theta) \cong \begin{cases} \{1\ point\} & (\theta = \frac{3\pi}{5},\ \cos^{-1}(\frac{7}{8})) \\ \mathcal{M} & (\theta = \frac{\pi}{3}) \\ S^1 \vee S^1 & (\theta = \frac{\pi}{5}) \\ S^1 \sqcup S^1 & (\frac{\pi}{3} > \theta > \frac{\pi}{5}) \\ S^1 & (\frac{3\pi}{5} > \theta > \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{5} > \theta > \cos^{-1}(\frac{7}{8})) \\ \emptyset & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ここで $\mathcal{M} \cong \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \mid (x+\frac{1}{2})^2+y^2 = \frac{1}{4}\} \cup \{(x,y) \mid (x-\frac{1}{2})^2+y^2 = \frac{1}{4}\}$.

またこの結果は、$5-$membered ringed chains のなす配置空間が S^1 になるための条件を与えている。

特に $\theta = \frac{3\pi}{5}$, $\cos^{-1}(\frac{7}{8})$ のときは、それぞれ以下の configuration が対応している。

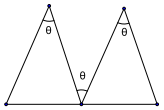


図 4: $\theta = \cos^{-1}(\frac{7}{8})$

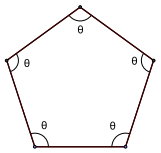


図 5: $\theta = \frac{3\pi}{5}$

本講演では、主に証明の概略と、時間が余れば今後の課題についてお話する予定である。

参考文献

[1] S. Goto and K. Komatsu, The configuration space of a model for ringed hydrocarbon molecules, Hiroshima Math. J. 42 (2012), 115-126.

[2] S. Goto, Y. Hemmi, K. Komatsu and J. Yagi, The closed chains with spherical configuration spaces, Hiroshima Math. J. 42-2 (JUL. 2012), 143-291.

[3] J. O'Hara, The configuration space of equilateral and equiangular hexagons, Osaka J. Math. Volume 50, Number 2 (2013), 477-489.

パラレルセッション
会場D

道代数上の前射影傾加群のなす半順序集合について

大阪大学 情報科学研究科　加瀬遼一

導入

本稿で主に扱う傾加群はBrenner-Butlerによって定式化された加群で, 導来圏における森田型の同値を誘導する非常に重要な加群である. したがって与えられた有限次元代数において, 傾加群を分類することは一つの大きな問題である. この問題への一つのアプローチがRiedtmann-Schofieldによって導入された傾変異の理論である. 傾変異は与えられた傾加群から別の傾加群を作る操作であるが, Happel-Unger によって基本的な傾加群 (の同型類) 上に定まるある半順序が傾変異と密接に関わっていることが示された. 以来この半順序集合の研究が盛んになされている.

目的

本稿では前射影的な傾加群がなす部分半順序集合と分配束と呼ばれる半順序集合のクラスの関係について得られた結果を紹介する. 有限分配束について以下の定理がよく知られている:

Theorem 0.1. (*Birkhoff's representation Theorem* [3], [4]) L を有限分配束とする. この時, ある有限半順序集合 P が存在して次の半順序同型が成立する.

$$L \simeq \mathcal{I}(P).$$

ここで $\mathcal{I}(P)$ は I のイデアルがなす半順序集合 $(\{I \text{ のイデアル }\}, \subset)$ である.

本稿ではまず前射影傾加群のなす半順序集合が無限分配束になる為の必要十分条件を与え, その場合に上の定理の類似が成り立つ事を述べる.

設定

本稿の設定は以下の通り.

- Q:有限連結な非輪状クイバー (有向グラフ)
- Q_0: Q の頂点集合, $Q_1 : Q$ の辺集合
- kQ:代数閉体 k 上の Q の道代数
- mod-kQ:有限次元右 kQ-加群のなす圏

1 準備

$M \in \text{mod-}kQ$ とする. この時, M は一意的な直既約分解

$$M \simeq M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots M_r$$

を持つことが知られている (Krull-Schmidt). そこで M の非同型な直既約因子の個数を $|M|$ で表し, 各直既約因子が互いに非同型な時, M を基本的と呼ぶ.

1.1 道代数の表現論

ここでは道代数の表現論の基本的な事実をまとめる. 詳しくは [1],[2] 等を参照して下さい.

Proposition 1.1. 次の 4 つの集合の間には (自然な) 1 対 1 対応が存在する.
- Q の頂点集合 Q_0
- 既約 kQ-加群の同型類
- 直既約射影 kQ-加群の同型類
- 直既約入射 kQ-加群の同型類

以下では頂点 $a \in Q_0$ に対応する直既約射影 kQ-加群を $P(a)$ で表す.

Theorem 1.2. (Gabriel) 次は同値.
(1) kQ が有限表現型（つまり直既約 kQ-加群が同型を除いて有限個）.
(2) Q が Dynkin-クイバー.

mod-kQ には Auslander-Reiten 移動と呼ばれる 2 つの対応 $\{\tau, \tau^{-1}\}$ が存在して次を満たす. X を直既約 kQ-加群とする.
- X が射影加群 $\Leftrightarrow \tau X = 0$.
- X が入射加群 $\Leftrightarrow \tau^{-1} X = 0$.
- X が射影加群でなければ $\tau^{-1}\tau X \simeq X$.
- X が入射加群でなければ $\tau\tau^{-1} X \simeq X$.

この時, 前射影加群が次で定義される.

Definition 1.3. $M \in \text{mod-}kQ$ が前射影加群であるとはある非負整数 r が存在して $\tau^r M = 0$ となる時に言う.

Remark 1.4. $M \in \text{mod-}kQ$ が前射影加群である事と M の任意の直既約因子が $\tau^{-r} P(a)$ の形をしている事は同値.

Theorem 1.5. Q が Dynkin-クイバーでないとする. この時, 写像 $(r, a) \mapsto \tau^{-r} P(a)$ は 1 対 1 対応

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} \times Q_0 \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{ \text{直既約前射影加群の同型類} \}$$

を誘導する.

1.2 傾加群上の半順序

ここでは傾加群上の半順序を導入する. 詳しくは [5],[6] 等を参照してください. まず道代数上の傾加群が次で定義される.

Definition 1.6. kQ-加群 T が次の条件 (1),(2) を満たす時, T を傾加群と呼ぶ.
(1) $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(T,T)=0$.
(2) $|T|=\#Q_0$.

ここで $\mathcal{T}(Q):=\{kQ$ 上の基本的傾加群 (の同型類)$\}$ とする.

Proposition 1.7. $\mathcal{T}(Q)$ 上の関係 $\geq$ を次で定める:

$$T\geq T' \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \mathrm{Ext}^1_{kQ}(T,T')=0.$$

この時, 関係 $\geq$ は $\mathcal{T}(Q)$ 上の半順序となる.

1.3 分配束

Definition 1.8. P を半順序集合とする.
(1) P が束であるとは, 任意の 2 つの元 x,y に対して, それらの共通上界の最小限 $(x\vee y)$ 及び共通下界の最大限 $(x\wedge y)$ が存在する時に言う.
(2) P が分配束とは任意の 3 つの元 x,y,z に対して, 次が成り立つ時に言う.

$$(x\wedge y)\vee z=(x\vee z)\wedge(y\vee z).$$

半順序集合 P の部分集合 I が順序に関して下に閉じている時, I をイデアルと呼ぶ. 本稿では $\mathcal{I}(P)$ で P のイデアル全体が包含関係に関してなす半順序集合を表す事にする.

2 主結果

この節では本稿の主結果を述べる. $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(Q):=\{T\in\mathcal{T}(Q)\mid T:$ 前射影加群 $\}$ 上に $\mathcal{T}(Q)$ から定まる半順序を入れ, 以下では $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(Q)$ を半順序集合とみなす.

Theorem 2.1. $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(Q)$ が無限分配束になる事と, Q が次の条件 (C) を満たす事は同値.

(C) 任意の Q の頂点が少なくとも 2 本の辺と接する.

以下では Q は条件 (C) を満たすとする. 特に Q は Dynkin-クイバーではない事に注意する.

Definition 2.2. $\Gamma_{\mathrm{p}}(Q)$ を以下で定まるクイバーとする:
• 頂点は直既約前射影加群（の同型類）.
• 次のどちらかを満たす時, $\tau^{-r}P(a)$ から $\tau^{-s}P(b)$ に矢を描く:
(i) $r=s$ かつある Q 上の矢 $b\to a$ が存在する.
(ii) $r+1=s$ かつある Q 上の矢 $a\to b$ が存在する.

Remark 2.3. 本稿では詳しく述べないが, 上で定めたクイバーは mod-kQ の Auslander-Reiten クイバーの前射影成分と呼ばれるものになっている.

Definition 2.4. 半順序集合 $P(Q)$ を以下で定める:
• 集合として $P(Q) = \Gamma_{\mathrm{p}}(Q)_0$.
• $X > Y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} X$ から Y にパスが存在する.

この時, 無限分配束 $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(Q)$ に関して Birkhoff の表現定理の類似が次で得られる.

Theorem 2.5. Q は条件 (C) を満たすとする. この時, 次の半順序同型が成り立つ.

$$\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(Q) \simeq \mathcal{I}(P(Q)) \setminus \{\emptyset\}$$

参考文献

[1] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø, Representation theory of artin algebras, Cambridge University Press, 1995.

[2] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, Elements of the representation theory of associative algebras Vol. **1**, London Mathematical Society Student Texts **65**, Cambridge University Press, 2006.

[3] G. Birkhoff, Lattice Theory, 3rd ed. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1967.

[4] G. Gratzer, Lattice Theory: First Concepts and Distributive Lattices, San Francisco, CA: W. H. Freeman, 1971.

[5] D. Happel and L. Unger, On a partial order of tilting modules, Algebr. Represent. Theory **8** (2005), no.2, 147-156.

[6] C. Riedtmann and A. Schofield, On a simplicial complex associated with tilting modules, Comment. Math. Helv **66** (1991), no.1, 70-78.

Littlewood–Richardson 係数にまつわる組合せ論

穂坂 秀昭*

2013 年 12 月 27 日

概要

Littlewood–Richardson 係数は古くから知られている数学的対象で, 組合せ論, 表現論や Grassmann 多様体の幾何など色々なものと関連する面白い性質を持つ. 今回の講演では, Littlewood–Richardson 係数が持つある種の対称性が Littlewood–Richardson 盤と呼ばれるものの集合の間に全単射が存在することを導く様子と, その全単射を実現する Azenhas のアルゴリズムを紹介したい. また余裕があれば, Azenhas のアルゴリズムを拡張する研究も紹介する.

1 基本的な用語の定義

本論に入る前に, 必要な用語に対して最低限の定義を与えておく.

1.1 対称函数

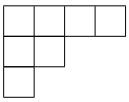
Littlewood–Richardson 係数とは何かを説明するため, まずは対称多項式環の「無限変数版」に相当する対称函数環を導入する. 技術的な細かいことに興味のない読者はこの節を飛ばしても, 2 章以降で出てくる「対称函数」を全て「十分大きい n に対する n 変数対称多項式」と読み替えればその後の議論に差し支えはない.

Definition 1.1 (対称函数環)**.** (1) 整数係数の n 変数多項式環 $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ には, 変数の入れ替えによって自然に n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ が作用する. この作用で不変な元 (つまり n 変数の対称多項式) 全体のなす環を $\Lambda^{(n)} := \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ と書く. また $\Lambda^{(n)}$ の中で d 次斉次な多項式全体のなす部分加群を $\Lambda^{(n)}_d$ と表す.
(2) n 変数の対称多項式に $x_n = 0$ を代入すると $n-1$ 変数の対称多項式が得られる. これによって全射環準同型 $\varphi^{(n)}\colon \Lambda^{(n)} \to \Lambda^{(n-1)}$ を定める. $\varphi^{(n)}$ は次数を保つ写像なので, 各 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ごとに $\varphi^{(n)}_d\colon \Lambda^{(n)}_d \to \Lambda^{(n-1)}_d$ ができる. これによって射影系 $\cdots \to \Lambda^{(2)}_d \to \Lambda^{(1)}_d$ ができるので, 射影的極限を用いて $\Lambda_d := \varprojlim \Lambda^{(n)}_d$ と定める. そして $\Lambda := \bigoplus_{d=0}^{\infty} \Lambda_d$ と定め, **対称函数環**と呼ぶ.

1.2 Young 図形

Young 図形は組合せ論において最も有名な対象の一つであり, 対称群の表現論ほか様々なものと深く関わる. 今回のテーマも例に漏れず Young 図形に関連するので, その定義をしておく.

Definition 1.2 (Young 図形)**.** (1) 正整数の有限な非増加列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0)$ のことを整数 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_l$ の**分割**という. l を分割 λ の**長さ**という. 非負整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の分割全体の集合を $\mathcal{P}_n$ と書き, これを全ての n にわたって集めたものを $\mathcal{P} := \coprod_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$ と書く.
(2) 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ を「1 行目に λ_1 個の箱, 2 行目に λ_2 個の箱,... を左揃えで並べる」という方法で図示したものを **Young 図形**という.

Example 1.3. 7 の分割 $(4,2,1)$ に対応する Young 図形は  である.

* 東京大学大学院数理科学研究科 博士 3 年, hosaka@ms.u-tokyo.ac.jp

分割と Young 図形は明らかに 1 対 1 に対応するので, 以下では両者を同一視する. また, 分割を数列と見なすこともする.

Definition 1.4 (歪 Young 図形)**.** (1) Young 図形 $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ に対し, μ の箱が全て λ の箱にもなっているとき $\mu \subset \lambda$ と書く.
(2) $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ が $\mu \subset \lambda$ を満たすとする. λ の箱から μ の箱を全て取り去ってできる図形を λ/μ という. この形に書ける図形を**歪 Young 図形**という.

2 Littlewood–Richardson 係数について

タイトルにある通り, 今回説明したいのは Littlewood–Richardson 係数にまつわる組合せ論である. そこでまず, この章全体を通して Littlewood–Richardson 係数の定義を与える.

Definition 2.1. (1) 長さ n の非負整数列 $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対し, n 変数多項式成分の行列 $a_{(p_1,\dots,p_n)}$ を $(a_{(p_1,\dots,p_n)})_{ij} := x_i^{p_j}$ で定める.
(2) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $\lambda \in \mathcal{P}$ を長さ n 以下の Young 図形とする. また $\delta_n := (n-1, n-2, \dots, 0)$ とする. このとき n 変数 **Schur 多項式** $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ を $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) := \det a_{\delta_n+\lambda} / \det a_{\delta_n}$ と定める[*1].

Schur 多項式は次の性質を持つ.

Lemma 2.2 (Schur 多項式の性質)**.** (1) $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ は n 変数の斉次な対称多項式である.
(2) $s_\lambda(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = s_\lambda(x_1, \dots, x_{n-1})$ が成り立つ.

ここで対称函数環の定義を思いだそう. 対称多項式の斉次部分について変数を増やす射影的極限を取り, 各斉次部分について足し合わせたのが対称函数環 Λ である. よってこの補題から, Schur 多項式たちが Λ の元を定めることが従う. しかも Schur 多項式たちによって, Λ の基底が得られることが知られている.

Definition 2.3. $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し, $\left(s_\lambda(x_1, \dots, x_n)\right)_{n=0}^\infty$ の定める対称函数環 Λ の元を s_λ と書く. また s_λ たちを **Schur 函数**という.

Theorem 2.4. Schur 函数たちは対称函数環 Λ の $\mathbb{Z}$ 上の基底を与える. つまり全ての対称函数は, Schur 函数たちの $\mathbb{Z}$ 係数の線型結合で表せる.

これで Littlewood–Richardson 係数の定義をする準備が整った.

Definition 2.5 (Littlewood–Richardson 係数)**.** $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ とする. このとき $s_\lambda, s_\mu \in \Lambda$ の積 $s_\lambda s_\mu$ は, Theorem 2.4 より Schur 函数の $\mathbb{Z}$ 係数線型結合で表せる. そこで $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c_{\lambda\mu}^\nu s_\nu$ という式で $c_{\lambda\mu}^\nu \in \mathbb{Z}$ を定め, これを **Littlewood–Richardson 係数** (LR 係数) と呼ぶ.

このように, Littlewood–Richardson 係数は 3 つの Young 図形 $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{P}$ でパラメトライズされる整数である. 対称函数環は可換環だから, Littlewood–Richardson 係数の定義から明らかに $c_{\lambda\mu}^\nu = c_{\mu\lambda}^\nu$ が成り立つ. ところがこの式が, 大変非自明な組合せ論的結果を導くのである. それを次に紹介する.

[*1] この分母は計算すると差積 $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ に一致する. det の交代性から分子が交代式になることが従うので, 分子は差積で割り切れて s_λ はちゃんと多項式になる.

3 Littlewood–Richardson 係数の組合せ論的な特徴付け

対称函数環 Λ において Schur 函数を基底に取った時の構造定数として Littlewood–Richardson 係数を定義したわけだが, それが実は「Littlewood–Richardson 盤と呼ばれるものの個数」と一致することが知られている. この両者の見方を比較することで, 組合せ論的に面白い結果がいくつも得られる[*2].

まず, Littlewood–Richardson 盤を定義しよう.

Definition 3.1 (Littlewood–Richardson 盤)**.** (1) 歪 Young 図形 λ/μ のそれぞれの箱に正整数を書き込んだものを, **shape が λ/μ の歪 Young 盤**という. Shape が λ/μ の歪 Young 盤に対し, $T(i,j)$ で T における i 行 j 列の箱の中身を表す. また歪 Young 盤 T に対し T の 1 の個数, 2 の個数,... を順に並べてできる整数列を T の **weight** という.
(2) Shape が λ/μ の歪 Young 盤 T が以下の 2 条件を満たすとき, **Littlewood–Richardson 盤**であるという.

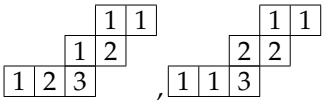
(i) 横に隣接する 2 つの箱について, $T(i,j) \leq T(i,j+1)$
(ii) 縦に隣接する 2 つの箱について, $T(i,j) < T(i+1,j)$
(iii) 全ての正整数 i,j に対して次が成り立つ:

$$T \text{ における}, i \text{ 行目までの } j \text{ の個数} \geq T \text{ における}, i+1 \text{ 行目までの } j+1 \text{ の個数}$$

(3) Shape が ν/λ で weight が μ の[*3]Littlewood–Richardson 盤全体のなす集合を $\mathcal{LR}(\nu/\lambda,\mu)$ と書く.

定義が複雑で分かり辛いので, 1 つ例を挙げておく.

Example 3.2. $\nu=(5,4,3), \lambda=(3,2), \mu=(4,2,1)$ の場合, $\mathcal{LR}(\nu/\lambda,\mu)$ は次の 2 つの元からなる.



そして, 次が成り立つことが知られている.

Theorem 3.3. 任意の $\lambda,\mu,\nu \in \mathcal{P}$ に対し, $c^{\nu}_{\lambda\mu} = \#\mathcal{LR}(\nu/\lambda,\mu)$ である[*4].

これと Littlewood–Richardson 係数の対称性より, 直ちに次を得る.

Corollary 3.4. 任意の $\lambda,\mu,\nu \in \mathcal{P}$ に対し, $\#\mathcal{LR}(\nu/\lambda,\mu) = \#\mathcal{LR}(\nu/\mu,\lambda)$ が成り立つ.

対称函数環 Λ で Littlewood–Richardson 係数を定義したときは, その対称性は自明であった. しかし「Littlewood–Richardson 盤の個数」という意味を持たせたとき, 対称性が「Littlewood–Richardson 盤からなる 2 つの集合の個数が一致する」という全く非自明な帰結をもたらすのである. すると自然に「対称函数環を経由せず, 直接的にこの定理を証明できないか」という発想が生まれる. これは実際可能である.

[*2] たとえば「個数」の見方に立てば, 整数 $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ が非負であることが直ちに従う. これは対称函数環だけ見ていても全く気づけない.
[*3] 実は Littlewood–Richardson 盤の weight は, 整数の分割になる.
[*4] # は集合の元の個数を表す.

4 Littlewood–Richardson 係数の対称性を与える全単射

Corollary 3.4 を直接的に証明するには, $\mu, \lambda \subset \nu$ なる 3 つの Young 図形 λ, μ, ν が与えられたときに全単射 $\mathcal{LR}(\nu/\lambda, \mu) \to \mathcal{LR}(\nu/\mu, \lambda)$ が存在することを示せばよい. この構成には何通りかの方法が知られているが, ここでは Azenhas によるものを紹介する. 一般の場合は煩雑になるので, 具体例でその方法を説明しよう.

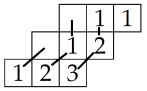
Example 4.1 (Azenhas の全単射)**.** $\nu = (5,4,3), \lambda = (3,2), \mu = (4,2,1)$ とする. Example 3.2 で挙げた

$$T = \begin{array}{ccccc} & & & 1 & 1 \\ & & 1 & 2 & \\ 1 & 2 & 3 & & \end{array} \in \mathcal{LR}(\nu/\lambda, \mu)$$

から, $\mathcal{LR}(\nu/\mu, \lambda)$ の元を次の手順で作る.

1. 一番下の行の一番右にある $\boxed{3}$ に対し「一つ上の行にある, 自分より小さい数の中で最も右にある箱と繋ぐ」という手順を繰り返して path を作る. ただし空箱には 0 が入っていると考え, 一番上の行に達したら path は終わる. それが終わったら, 既にどこかの path に含まれた箱を除外して, 一番下の行の $\boxed{2}$, $\boxed{1}$ に対しても同じ手順で path を作る. 下図における, 黒い線で繋がった一連の箱が 1 つの path に対応する.

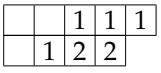
$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & 1 \\ & & 1 & 2 & \\ 1 & 2 & 3 & & \end{array} \in \mathcal{LR}(\nu/\lambda, \mu)$$



2. 上の手順に作った path において
   - 3 から始まる path では, 3 を削除する.
   - それ以外の path では, path に沿って中身を 1 個上にずらす.

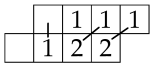
   その結果, 次の歪 Young 盤ができる.

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 2 & \end{array}$$



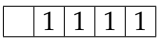
3. 手順 1 と同様, 2 行目の一番右の箱から順に path を作る. 空箱は, 単独で path と見なす.

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 2 & \end{array}$$



4. $\boxed{2}$ の箱は削る. その後 path に沿って, 中身を 1 個ずつ上の行にずらし, 空箱 $\boxed{}$ は削る.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$



5. 同様の手順をあと 1 回繰り返すことで, 空の Young 盤ができる.
6. これまでの歪 Young 盤を 1 行ずつ削る作業を元に, 次のように新しい歪 Young 盤 T' を作る: i 行目を削る step において,
   - $\boxed{i}$ の箱があったら, その個数だけ空箱を T' の i 行目に付け足す.
   - 箱の中身をスライドさせる過程で, j 行目の空箱が 1 個消えるのに応じて $\boxed{j}$ を T' の i 行目に足す.
   - 空の箱 $\boxed{}$ があったら, その個数だけ $\boxed{i}$ を T' の i 行目に付け足す.

   こうして, 次の $T' \in \mathcal{LR}(\nu/\mu, \lambda)$ ができる.

$$T' = \begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & 1 & 2 & \\ & 1 & 2 & & \end{array}$$

さて唐突であるが, Grassmann 多様体のコホモロジー環は Schur 多項式で書けることが知られている. ここでコホモロジー環の代わりに K 群を使うと, **Grothendieck 多項式**が得られる. この Grothendieck 多項式の積に対して最近, 岡山理科大学の池田岳, 島崎達史の両氏により “set-valued good semisitandard tableau” を使う表示が得られた. これは Schur 多項式と Littlewood–Richardson 係数の関係の類似であり, Azenhas の全単射の拡張可能性が期待される. 既に部分的な結果があるので, 余裕があれば講演当日に紹介したい.

解析数論にあらわれる関数方程式

池田 創一 (名古屋大学多元数理科学研究科)

1 はじめに

解析数論では、リーマンゼータ関数をはじめ、何らかの関数方程式の解となるような関数が重要な役割を果たす。ここでの関数方程式とは、極限操作を含まない、狭い意味での関数方程式をさしている。この文書では、まずそのような関数方程式についての簡単な説明や実例を述べる。その後に、解析数論にあらわれるいくつかの関数の関数方程式による特徴付けについて述べる。

2 関数方程式について

先ほど「極限操作を含まない、狭い意味での関数方程式」と述べたが、このようなものがあるのか、またあるとすればどんなものかが分かりにくいと思うので、簡単に説明する。以下では $f(x), g(x)$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数とする。具体例としては、コーシーの方程式

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

やウィルソンの方程式

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(x) \tag{2}$$

などがある。コーシーの方程式を満たす関数を加法的関数と呼ぶことがある。また、$f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x$ などはウィルソンの方程式を満たす。これらの方程式はどれも微分や積分やその他の極限操作を含んでいないが、これが「極限操作を含まない」という意味である。つまり、微分方程式や積分方程式は「極限操作を含まない、狭い意味での関数方程式」ではない。しかし、微分方程式などがこの文書で話題にする関数方程式と全く関係ないというわけでもない。このあたりのことは後で少し述べる。それから、上記の二つの方程式を見れば分かるように、この文書で話題にする関数方程式には二つ以上の変数や未知関数が含まれることがある。

このような関数方程式は、具体的なものについては、昔から研究されていたようであるが、統一的 (総合的) な研究を行ったのは J. Aczél が最初のようである。歴史的なことについては [1] に記述がある。

さて、以下ではコーシーの方程式 (1) を例にとって、関数方程式の解法の例を示す。コーシーの方程式を解くことは難しくない。説明のために、三つの方法で解くことにする。

解法 1　$f(x)$ は C^1 級と仮定する。(1) の両辺を x で微分することで $f'(x+y) = f'(x)$ を得る。$x = 0$ とすることで $f'(x)$ は定数であることが分かる。よってある定数 c, d が存在して、$f(x) = cx + d$ となる。一方、$f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ より $f(0) = 0$ である。したがって $f(x) = cx$ (c は定数) となる。

解法 2　$f(x)$ は連続であるとする。解法 1 で述べたように、$f(0) = 0$ である。ゆえに、$0 = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ なので、$f(-x) = -f(x)$ を得る。次に任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$f(nx) = nf(x)$ となることを帰納法で示そう。$n = 1$ のときは正しい。$n \geq 1$ で正しいなら、

$$f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = (n+1)f(x)$$

より $n + 1$ のとき正しい。以上により示せた。これにより、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$f(x/n) = f(x)/n$ が成り立つことも分かる。以上をまとめると、任意の $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して、

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1)$$

が成り立つ。すなわち、$c = f(1)$ とおくと $f(x) = cx$ が任意の $x \in \mathbb{Q}$ について成り立つ。f は連続なので、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = cx$ となる。

解法 3　ここでは $f(x)$ の連続性などは仮定しない。任意の零でないベクトル空間には基底が存在するので、とくに $\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底が存在する。そのような基底を B とする。すなわち、任意の実数は B の有限個の元の有理数係数の線型結合で書けるとする。各 $b_\lambda \in B$ ($\lambda \in \Lambda$) に対して、$f(b_\lambda)$ の値を決めれば、f はコーシーの方程式の解となる。

以上三つの解法を見てきたが、最も簡単なのは解法 1 であろう。しかし、解法 2 では微分可能性を仮定せずに解いている。一般に、できる限り弱い仮定のもとで解くことが好まれる。その点では解法 3 は何も仮定がいらないから良いように見える。しかし、$\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底 B を具体的に計算することができるわけではないから、具体的に解を書き下すことはできない。

解法 1 と 2 では変数に 0 などの特別な値を代入することが行われたが、このような計算は多変数の関数方程式を解く上での常套手段である。また、解法 1 のように微分することで微分方程式として解くこともたまにある。

3　解析数論における関数方程式

解析数論には、何らかの関数等式を満たすような関数が現れる。つまり、それらの関数は何らかの関数方程式の解となっている。そのような関数でもっとも重要なものの一つがリーマンゼータ関数である。以下では $s = \sigma + it$ $(\sigma, t \in \mathbb{R})$ とする。リーマンゼータ関数とは

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\sigma > 1)$$

と定義され、$\mathbb{C}$ 上の有理型関数として解析接続される。また、関数等式

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s) \tag{3}$$

を満たす。ここで

$$\chi(s) = 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

であり、$\Gamma(s)$ はガンマ関数である。この関数等式による $\zeta(s)$ の特徴付けを与える定理として以下が知られている ([4, p. 31] を参照)。

Hamburger の定理　$G(s)$ を位数有限の整関数、$P(s)$ を多項式とし、$f(s) = G(s)/P(s)$ であるとする。また

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

であり、この和は $\sigma > 1$ で絶対収束するとする。加えて

$$g(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{1-s}}$$

は $\sigma < -\alpha < 0$ で絶対収束するとする。このとき

$$f(s) = \chi(s)g(1-s)$$

ならば $f(s) = C\zeta(s)$ (C は定数) である。

このような関数方程式の解として具体的な関数を特徴づける結果はいろいろあり、また古くからやられている。

さて、k を正の整数として、k 重ゼータ関数

$$\zeta_k(s_1,\ldots,s_k)=\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^{s_1}}\sum_{n_2=n_1+1}^{\infty}\frac{1}{n_2^{s_2}}\cdots\sum_{n_k=n_{k-1}+1}^{\infty}\frac{1}{n_k^{s_k}}$$

というものがある。これは $\sigma_k>1$, $\sigma_{k-1}+\sigma_k>2$, $\ldots$, $\sigma_1+\cdots+\sigma_k>k$ のとき絶対収束する。もともとは ζ_k の正の整数点での値に関心が持たれていたが、$\mathbb{C}^k$ 上へ有理型関数として解析接続できることが示された (例えば [2] を参照)。最近では解析的な性質もいくらか研究されており、[3] では二重ゼータ関数 $\zeta_2(s_1,s_2)$ の関数等式が示された。筆者は最近、名古屋大学の松岡謙晶氏との共同研究により、二重ゼータ関数についての Hamburger の定理の類似物を得た。

参考文献

[1] J. Aczél, Lecture on functional equations and their applications, Dover Publications, Inc, 2006.

[2] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers, Acta Arith. **98** (2001), 107-116.

[3] K. Matsumoto, Functional equations for double zeta-functions, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **136** (2004) 1-7.

[4] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-function, Second Edition, revised and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

Riemann ゼータ関数と多重ゼータ関数

松岡謙晶

名古屋大学多元数理科学研究科　博士後期課程２年

1　概要

Riemann ゼータ関数の Lindelöf 予想および 2 乗平均値について概説した後、最近行われている Euler の二重ゼータ関数の解析的な挙動の研究について簡単に述べる。

2　Riemann のゼータ関数

$s = \sigma + it$ を複素変数とする。Riemann ゼータ関数は

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\sigma > 1)$$

と定義されるが、実は

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \qquad (\sigma > 1)$$

と書くことが出来る。ここで p は全ての素数をわたる。この表示は素数分布の問題を考える上で重要であり、Riemann ゼータ関数の非自明な零点と素数との関係を導くことが出来る（詳しくは Titchmarsh[7] の三章を参照)。Riemann ゼータ関数は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続されることが知られていて、負の偶数点を自明な零点といい、それ以外の零点のことを非自明な零点と言う。Riemann ゼータ関数の解析接続の方法はたくさんあるが、ここでは次の Euler-Maclaurin の公式を用いる。

Euler-Maclaurin の公式
$f(x)$ を $[a, b]$ 上の C^1 級とする。このとき、次の式が成り立つ

$$\sum_{a<n \ \ b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b (x - [x] - 1/2)f'(x)dx + \\ + (a - [a] - 1/2)f(a) - (b - [b] - 1/2)f(b)$$

Euler-Maclaurin の公式から

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{x - [x] - 1/2}{x^{s+1}} dx$$

である。x が整数でないとき

$$x - [x] - 1/2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}$$

が成り立つことから

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(s\pi/2)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

を得る。この式は Riemann ゼータ関数の関数等式と呼ばれていて、Riemann ゼータ関数の理論ではとても重要な式である。関数等式において Riemann ゼータ関数以外の関数の挙動は容易に分かるので、$\zeta(s)$ の挙動が分かれば $\zeta(1-s)$ の挙動が分かるということになる。したがって、$\sigma > 1/2$ における Riemann ゼータ関数の挙動が分かれば $\sigma < 1/2$ における Riemann ゼータ関数の挙動が分かるのであるが、$\sigma = 1/2$ の場合は事情が異なり何か特別な意味があるのではないかと考えられる。その特別な意味のひとつが「Riemann ゼータ関数の非自明な零点は $\sigma = 1/2$ 軸上にあるであろう」という Riemann 予想かもしれない。さて、Riemann ゼータ関数に関する有名な未解決問題として Lindelöf 予想と呼ばれる予想がある。これは、$\zeta(\sigma + it) \ll t^{A(\sigma)}$ を満たす関数 $A(\sigma)$ を求める問題である。

Lindelöf 予想

$$\mu(\sigma) = \limsup_{t\to\infty} \frac{\log|\zeta(\sigma+it)|}{\log t}$$

とする。このとき

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 & (\sigma > 1/2) \\ -\sigma + 1/2 & (\sigma \quad 1/2) \end{cases}$$

が成り立つであろう。

この予想が正しいとすると $\sigma = 1/2$ で挙動が変化していることが分かるので、このような意味で $\sigma = 1/2$ が特別であると考えることが出来る。Lindelöf 予想は未解決であるが、Riemann 予想の成立を仮定すると Lindelöf 予想が成り立つことが知られている。Phragmén-Lindelöf の定理と関数等式から Lindelöf 予想は全ての $\epsilon > 0$ に対して $|\zeta(1/2+it)| \ll t^\epsilon$ が成り立つことと同値なことが分かる。これと

Kusmin-Landau の不等式および Weyl-van der Corput の不等式などから、全ての $1 < N < t$ および $N < N_1 < 2N$ に対して

$$\sum_{N<n<N_1} n^{it} \ll N^{1/2} t^{\epsilon}$$

が成り立つことが、Lindelöf 予想が成立するための十分条件であることが分かる。このように、十分に滑らかな実関数 f に対して

$$\sum_{N<n<N_1} \exp(2\pi i f(n))$$

を評価することが解析数論の分野では問題になることがある。これは指数和の評価の問題としてよく知られているが、とても難しい問題である（Ivić [3] の二章に解説がある）。

Lindelöf 予想は非常に難しいので、$|\zeta(\sigma + it)|$ の平均的な挙動を考察する。ここでは二乗平均値

$$I_\sigma(T) = \int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt$$

を考える。$I_\sigma(T)$ の評価は Lindelöf 予想に比べるとはるかに簡単であり、以下の式が成り立つことが知られている。

$$I_\sigma(T) \quad \begin{cases} \zeta(2\sigma)T & (\sigma > 1/2) \\ T \log T & (\sigma = 1/2) \\ \frac{(2\pi)^{2\sigma} \ {}^1\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma} T^{2-2\sigma} & (\sigma < 1/2) \end{cases}$$

ここで $f(x) \quad g(x)$ であるとは $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$ であるという意味である。$I_\sigma(T)$ の挙動を見ると $\sigma = 1/2$ で挙動が変化していることが見て取れる。

3 Euler の二重ゼータ関数

$s_1 = \sigma_1 + it_1$ および $s_2 = \sigma_2 + it_2$ を複素変数とする。Euler の二重ゼータ関数 $\zeta_2(s_1, s_2)$ は

$$\zeta_2(s_1, s_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^{s_2}} \qquad (\sigma_1 + \sigma_2 > 2, \sigma_2 > 1)$$

と定義される。上式の右辺は $\sigma_1 + \sigma_2 > 2$ かつ $\sigma_2 > 1$ において絶対収束し、さらに $\mathbb{C}^2$ 上の有理型関数に解析接続されることが知られている。Euler の二重ゼータ関数の解析的な性質は、上述の $I_{1/2}(T)$ の精密な公式である Atkinson の公式を導く際に利用された。Atkinson [1] は Riemann ゼータ関数を調べる道具として Euler の二重ゼータ関数を利用したのであるが、最近では Euler の二重ゼータ関数その

ものに対して色々な研究が活発に行われている。解析的な研究としては、例えば、Kiuchi and Tanigawa [4] および Kiuchi, Tanigawa and Zhai [5] による $|\zeta_2(s_1, s_2)|$ の評価の研究、Matsumoto and Tsumura [6] による $\int_2^T |\zeta_2(s_1, s_2)|^2 dt_2$ の評価の研究などがある。$|\zeta_2(s_1, s_2)|$ の評価のためには二次元の指数和の評価が重要になるが、一次元の指数和の場合と同様に非常に難しい問題であり、よい評価を得るのは難しい。実際、Kiuchi and Tanigawa [4] および Kiuchi, Tanigawa and Zhai [5] はある条件下で非常によい評価を得ているが、一般の場合は困難であると思われる。このように、$|\zeta_2(s_1, s_2)|$ を評価するのは難しいので、Riemann ゼータ関数で二乗平均値を考えたように Euler の二重ゼータ関数についても二乗平均値を求めることが考えられる。Euler の二重ゼータ関数の二乗平均値の研究は Matsumoto and Tsumura [6] により初めて行われ、筆者も [2] で Euler の二重ゼータ関数の二乗平均値について共同研究を行ったが、まだまだ分かっていない部分が多いというのが現状である。

参考文献

[1] F. V. Atkinson, The mean value of the Riemann zeta-function, Acta Math. **81** (1949), 353-376.

[2] S. Ikeda, K. Matsuoka and Y. Nagata, On certain mean values of the double zeta-function, preprint.

[3] A. Ivić, The Riemann zeta-function, Wiley, New York, 1985.

[4] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, Bounds for double zeta-functions, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. Ser. V **5** (2006), 445-464.

[5] I. Kiuchi, Y. Tanigawa and W. Zhai, Analytic properties of double zeta-functions, Indag. Math. **21** (2011), 16-29.

[6] K. Matsumoto and H. Tsumura, Mean value theorems for double zeta-functions, J. Math. Soc. Japan, to appear.

[7] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-function, Second Edition, Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

有限群のウィッテンゼータ関数とウィッテン L-関数について

閔 正媛

1 序論

ウィッテンゼータ関数とは, コンパクト位相群 G について,

$$\zeta_G^W(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\rho\in\widehat{G}} (\deg\rho)^{-s}$$

と定義されるものであり, またウィッテン L-関数とは, $g\in G$ について,

$$\zeta_G^W(s;\, g) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\rho\in\widehat{G}} \frac{\chi(g)}{\deg\rho}(\deg\rho)^{-s},\ \chi(g) = \mathrm{trace}(\rho(g))$$

と定義されるものである. ただし,

$$\widehat{G} = \{G \text{ の既約ユニタリ表現 }\}/\sim$$

である. 有限群のウィッテン L-関数は, 次より, $g\neq e$ のとき, $\zeta_G^W(-2;\, g) = 0$ となる性質をもつ;

$$\begin{aligned}\zeta_G^W(-2;\, g) &= \sum_{\rho\in\widehat{G}} \chi(g)\deg\rho \\ &= \sum_{\rho\in\widehat{G}} \mathrm{trace}(\rho(g))\mathrm{trace}(\rho(e)) \\ &= \sum_{\rho\in\widehat{G}} \mathrm{trace}(\rho(g))\overline{\mathrm{trace}(\rho(e))} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{1}$$

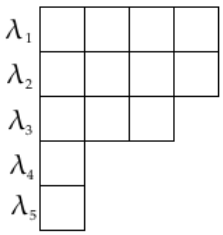
今回の講演では, $G = S_n$, $S_n\times\cdots\times S_n$ の場合について, 零点となる $s=-2$ の位数について考える.

2 S_n の既約表現

$\sigma\in S_n$ は, 可換な巡回置換の積で表せる. 例えば,

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&3&1&5&6&4&2\end{pmatrix}\in S_7$$

は, $(1\,7\,2\,3)(4\,5\,6)$ と表せる. さらに, 巡回置換の長さが同じものはすべて共役なので, S_n を共役類を n の Partition に対応させることができる. Partition とは, $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_k$ かつ $\lambda_1+\cdots+\lambda_k = n$ をみたす自然数の順序対 $\lambda := (\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ のことである. この λ_i たちを上から下に並べ, 「ヤング図形」という図を描く. 例えば, $n=13$ の Partition $\lambda = (4,4,3,1,1)$ について, ヤング図形は次のように描ける.



ここでもう一つ，Partition $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ に対して，共役 Partition $\lambda' = (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_l)$ を定義しよう．Partition λ の共役 Partition とは，λ のヤング図形を 45° の直線を中心に鏡対称させたものである．例えば，右の図 1 のようなものである．

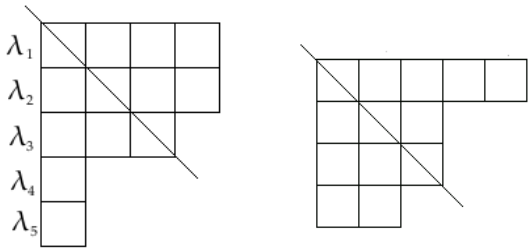


図 1　共役 Partition

Partition λ に対応する表現を V_λ と書く．そうすると，表現の次元 $D_\lambda := \dim V_\lambda$ と指標 χ_λ は次のように定義される．

まず，ヤング図形の「hook length」を定義しよう．ヤング図形の i 行 j 列の箱を ij-箱と呼ぶことにしよう．この ij-箱から右と下にそれぞれ足をおろしたものを ij-hook と呼ぶ．そのとき，ij-hook の中に含まれている箱の数を hook length と呼び，h_{ij} と書く．そうすると，

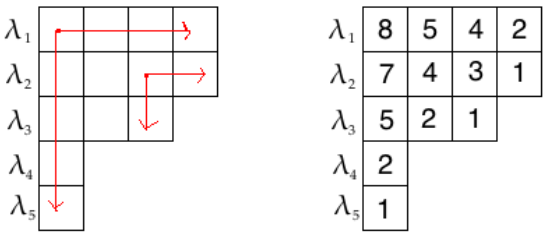


図 2　The hook lengths

$$h_{ij} = 1 + (\lambda_i - j) + (\lambda'_j - i)$$

となる．また，この hook length たちをすべてかけたものを H_λ と書く．これらを図示すると，下の図のようになる;

実は，V_λ の次元 D_λ は，次のように hook length の式で表される;

定理 1 (Hook length formula)**.** V_λ の次元 D_λ は次のように表される;

$$D_\lambda = \frac{n!}{H_\lambda}.$$

次に, 指標の話をしよう. その前に, S_n の共役類を表す, Partition 以外のもう 1 つの書き方を導入しよう. $C_{\mathbf{i}}$ を, 次のようなものとしよう.

$$\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_n), \text{ ただし } \sum \alpha i_\alpha = n.$$

これは, $C_{\mathbf{i}}$ が, i_1 個の長さ 1 の巡回置換, i_2 個の長さ 2 の巡回置換, $\cdots$, i_n 個の長さ n の巡回置換の積で表されるようなもので構成されていることを意味する.

また, 多項式 $f(x) = f(x_1, \cdots, x_k)$ の項 $x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k}$ の係数を $[f(x)]_{(l_1, \cdots, l_k)}$ と表す. ここで, Partition $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ について, そのヤング図形の i 行 1 列の hook length たちを l_i と書くことにしよう. つまり, 次のようなことである.

$$l_1 = \lambda_1 + k - 1,\ l_2 = \lambda_2 + k - 2,\ \cdots,\ l_k = \lambda_k.$$

そうすると, 表現 V_λ について, $g \in C_{\mathbf{i}}$ における指標 $\chi_\lambda(g)$ は次のようになる.

定理 2 (Frobenius formula)**.** 表現 V_λ について, $g \in C_{\mathbf{i}}$ における指標 $\chi_\lambda(g)$ は次のような式で表される.

$$\chi_\lambda(g) = \left[\prod_{1 \le i \le j \le k} (x_i - x_j) \cdot \prod_{1 \le j \le n} \left(x_1^j + \cdots + x_k^j \right)^{i_j} \right]_{(l_1, \cdots, l_k)}.$$

3 結果

我々は本研究で次のような結果を得た.

定理 3. $g \in S_n$ が奇置換の場合, Witten L-関数 $\zeta_{S_n}^W(s;\, g)$ は消える.

証明. λ の共役 partition λ' について, $D_{\lambda'} = D_\lambda$, $V_{\lambda'} \simeq \mathrm{sgn} \otimes V_\lambda$ となることから直ちにわかる. □

定理 4. 奇数 n について, $g \in S_n$ が長さ n の巡回置換の場合, $s = -2$ における $\zeta_{S_n}^W(s;\, g)$ の位数は 1 となる.

証明. まず, $\zeta_{S_n}^W(s;\, g)$ を微分して次を得る.

$$\zeta'_{S_n}(s;\, g)|_{s=-2} = -\sum_\lambda \chi_\lambda(g) D_\lambda \log D_\lambda, \tag{2}$$

ただし, $\zeta'_{S_n}(s;\, g) = \dfrac{d}{ds}\zeta_{S_n}^W(s;\, g)$ のこと. そして, Hook length formula と Frobenius formula より, 次元と指標は次のようになる.

$$D_\lambda = \binom{n-1}{k}, \quad \chi_\lambda(g) = \begin{cases} (-1)^k & \lambda = (n-k, \underbrace{1, \cdots, 1}_{k \text{ 個}}),\ 0 \le k \le n-1 \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他.} \end{cases} \tag{3}$$

よって,

$$\zeta'_{S_n}(-2;\, g) = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{2m}{k} \log \binom{2m}{k}$$

を得る.

ここで, l を, $m < l < 2m$ なる最大の素数とする. ベルトラン−チェビシェフの定理より, このような素数は必ずと

れる. そうすると,

$$l \mid \binom{2m}{i},\ l^2 \nmid \binom{2m}{i} \quad \text{for } 2m-l+1 \le i \le l-1$$

となることがわかる. ここで指標がすべて整数であるので, $\zeta'_{S_n}(-2;\, g)$ を次のように書き換えることができる.

$$\zeta'_{S_n}(-2;\, g) = -\sum_{k=2m-l+1}^{l-1} (-1)^k \binom{2m}{k} \log l + \sum \log \frac{q_2}{q_1},$$

ただし $q_1,\, q_2 \in \mathbb{N}$ は l で割り切れないものである. ここで,

$$-\sum_{k=2m-l+1}^{l-1} (-1)^k \binom{2m}{k} < 0$$

より,

$$\zeta'_{S_n}(-2;\, g) \neq 0$$

がわかり, 主張が証明できた. □

定理 5. n が素数の場合, $\sum_{\lambda:\text{hook}} \chi_\lambda(g) D_\lambda \neq 0$ の場合, $s=-2$ における $\zeta^W_{S_n}(s;\, g)$ の位数は 1 となる. ただし, hook とは, $\lambda = (n-k,\, \underbrace{1,\, \cdots,\, 1}_{k\text{ 個}})$ のような partition のことをさす.

証明. Hook length formula より,

$$\begin{cases} p \mid D_\lambda,\ p^2 \nmid D_\lambda & \lambda\text{が hook でない場合} \\ p \nmid D_\lambda & \lambda\text{が hook の場合} \end{cases} \tag{4}$$

となることがわかる. よって, 上の定理 4 と同様に証明ができる. □

定理 6. 有限群 $G_1, \cdots, G_k$, $(g_1, \cdots, g_k) \in G_1 \times \cdots \times G_k$ について, Witten L-関数 $\zeta^W_{G_1 \times \cdots \times G_k}(s;\, (g_1, \cdots, g_k))$ の $s=-2$ における位数は, $\zeta^W_{G_j}(s;\, g_j)$ の $s=-2$ における各々の位数を足し合わせたものとなる.

証明. k 個の表現 $(G_1, V_1), \cdots, (G_k, V_k)$ について, $G_1 \times \cdots \times G_k$ の既約表現は, $G_1, \cdots, G_k$ の既約表現たちのテンソル積で表される. なので, $(g_1, \cdots, g_k) \in G_1 \times \cdots \times G_k$ について, $G_1 \times \cdots \times G_k$ の既約表現の指標は次のように表せる.

$$\chi_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_k}((g_1, \cdots, g_k)) = \chi_{V_1}(g_1) \cdots \chi_{V_k}(g_k)$$

したがって, $G_1 \times \cdots \times G_k$ の Witten ゼータ関数と Witten L-関数について, 次が成り立つ.

$$\zeta^W_{G_1 \times \cdots \times G_k}(s) = \zeta^W_{G_1}(s) \cdots \zeta^W_{G_k}(s), \tag{5}$$

$$\zeta^W_{G_1 \times \cdots \times G_k}(s;\, (g_1, \cdots, g_k)) = \zeta^W_{G_1}(s;\, g_1) \cdots \zeta^W_{G_k}(s;\, g_k). \tag{6}$$

よって, $G_1, \cdots, G_k$ がすべて有限群のときは, Witten L-関数の $s=-2$ における位数は, $\zeta^W_{G_j}(s;\, g_j)$ の $s=-2$ における位数をすべて足し合わせたものとなることがわかる. □

$A^{(1)}_{n-1}$ 型巡回 KLR 代数の分類

小西 正秀 *

名古屋大学多元数理科学研究科

概 要

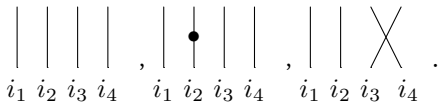
箙 Γ 及びその頂点への重み付け α という二つのデータから定まる Khovanov-Lauda-Rouquier 代数 (以下 KLR 代数) 及び，もう一つの頂点への重み付け Λ を与えることで得られる巡回 KLR 代数について，定義を述べる．実際に例を見ることで KLR 代数の取り扱いに慣れるため，箙 Γ を $A^{(1)}_n$ とした際，ある性質を満たすような α，Λ を決定するまでの流れを見てみる．

1 KLR 代数及び巡回 KLR 代数

先ずはループ及び多重辺を持たない箙 Γ を与える．[1] この頂点 Γ_0 は後に糸の色として用いられ，箙は図の間に関係を与えるために用いられる．

次に頂点への重み付け $\alpha = \sum_{i\in\Gamma_0} a_i\alpha_i (a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を与える．これは各色の糸を何本づつ用いるのかを定めており，合計 $|\alpha| = \sum_{i\in\Gamma_0} a_i$ 本の糸を用いた図が KLR 代数のベクトル空間としての生成元となる．

さて,「図」とはなんぞやという疑問が出ている頃だろうが，大雑把に言えば「糸の上に黒玉を乗せることも可能な，色つきの組み紐」である．例を見れば一目瞭然だろうので，下に代表的な三つの図を挙げる．



色の付いた平行に並んだ糸四本，それの二番目に黒玉を付けたもの，三番目と四番目の糸を交差させたものの三つで，これは後に $\mathbf{e}(\mathbf{i})$, $y_2\mathbf{e}(\mathbf{i})$,$\psi_3\mathbf{e}(\mathbf{i})$ ($\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3, i_4)$) で表される代数の生成元となる．

代数の生成元と書いたが，積がどのように定まるのかを述べていなかった．しかし生成元 x と y に対し積 xy を定める方法は至って単純である．まず x の図の下に y の図を繋げる．そして結合部の色が一致していればその図を xy とし，そうでなければ xy は 0 とする．

また，糸の色についての情報として，次の記号を導入する．$m = |\alpha|$ として，

$$\mathrm{Seq}(\alpha) = \{(i_1, i_2, \cdots, i_m) \in (\Gamma_0)^m \mid \text{各 } i \in \Gamma_0 \text{が } a_i \text{回表れる } \}$$

例えば $\Gamma_0 = \{0, 1\}$，$\alpha = 2\alpha_0 + \alpha_1$ としたとき，$\mathrm{Seq}(\alpha) = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ となる．

雑に言えば，先程 $\mathbf{e}(\mathbf{i})$ と書いたものは，平行に並んだ m 本の糸に $i_1, i_2, \cdots, i_m$ という色をつけた図，y_k は平行に並んだ m 本の糸の k 番目に黒玉を乗せた図の総和，ψ_l は平行に並んだ m 本の糸の l 番目と $(l+1)$ 番目を交差させた図の総和である．y_k と ψ_l によって組み紐の形を定め，$\mathbf{e}(\mathbf{i})$ により色を定めたものとして複雑な図が得られる．y_k，ψ_l はともに色の付け方に関する総和をとっているが，関係の中には色に依存するものがあるため，$\mathbf{e}(\mathbf{i})$ を掛けることで色を指定することがある．紙面の都合上次頁では関係式のみを並べてあるが，一部については図で表記したものをおまけに載せてある．残りについては前回のテクニカルレポートを参照，或いは各自試しに書いてみることをお勧めする．

*m10021t@math.nagoya-u.ac.jp

[1] 元々は無向グラフであったり，Cartan matrix まで拡張されたりするが，今回はこの設定の下で話を進める．

定義 1.1. KLR 代数 $H_{\Gamma,\alpha}$ とは，次の生成元と，その間の関係で与えられる代数である．$m=|\alpha|$ とする．

- 生成元 : $\{\mathbf{e}(\mathbf{i})\,|\,\mathbf{i}\in \mathrm{Seq}(\alpha)\}\cup\{y_1,\cdots,y_m\}\cup\{\psi_1,\cdots,\psi_{m-1}\}$
- 関係 :

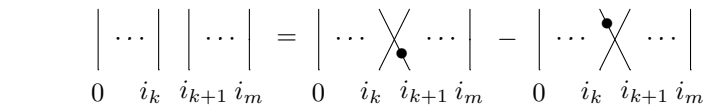
$$\mathbf{e}(\mathbf{i})\mathbf{e}(\mathbf{j})=\delta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\mathbf{e}(\mathbf{i}),$$
$$\sum_{\mathbf{i}\in\mathrm{Seq}(\alpha)}\mathbf{e}(\mathbf{i})=1,$$
$$y_k\mathbf{e}(\mathbf{i})=\mathbf{e}(\mathbf{i})y_k,$$
$$\psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i})=\mathbf{e}(\mathbf{s_k}\cdot\mathbf{i})\psi_k,$$
$$y_ky_l=y_ly_k,$$
$$\psi_ky_l=y_l\psi_k\ (l\neq k,k+1),$$
$$\psi_k\psi_l=\psi_l\psi_k\ (|k-l|>1),$$
$$\psi_ky_{k+1}\mathbf{e}(\mathbf{i})=\begin{cases}(y_k\psi_k+1)\mathbf{e}(\mathbf{i}) & (i_k=i_{k+1})\\ y_k\psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) & (\text{それ以外})\end{cases},$$
$$y_{k+1}\psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i})=\begin{cases}(\psi_ky_k+1)\mathbf{e}(\mathbf{i}) & (i_k=i_{k+1})\\ \psi_ky_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) & (\text{それ以外})\end{cases},$$
$$\psi_k^2\mathbf{e}(\mathbf{i})=\begin{cases}0 & (i_k=i_{k+1})\\ \mathbf{e}(\mathbf{i}) & (i_k\text{と }i_{k+1}\text{の間に矢がない})\\ (y_{k+1}-y_k)\mathbf{e}(\mathbf{i}) & (i_k\to i_{k+1})\\ (y_k-y_{k+1})\mathbf{e}(\mathbf{i}) & (i_k\leftarrow i_{k+1})\\ (y_{k+1}-y_k)(y_k-y_{k+1})\mathbf{e}(\mathbf{i}) & (i_k\leftrightarrow i_{k+1})\end{cases},$$
$$\psi_k\psi_{k+1}\psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i})=\begin{cases}(\psi_{k+1}\psi_k\psi_{k+1}+1)\mathbf{e}(\mathbf{i}) & (i_k=i_{k+2}\text{かつ }i_k\to i_{k+1})\\ (\psi_{k+1}\psi_k\psi_{k+1}-1)\mathbf{e}(\mathbf{i}) & (i_k=i_{k+2}\text{かつ }i_k\leftarrow i_{k+1})\\ (\psi_{k+1}\psi_k\psi_{k+1}-2y_{k+1}+y_k+y_{k+2})\mathbf{e}(\mathbf{i}) & (i_k=i_{k+2}\text{かつ }i_k\leftrightarrow i_{k+1})\\ \psi_{k+1}\psi_k\psi_{k+1}\mathbf{e}(\mathbf{i}) & (\text{それ以外})\end{cases},$$

さて，$\Lambda=\sum_{i\in\Gamma_0}b_i\Lambda_i(b_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を定め，I^Λ を $\left\{y_1^d\mathbf{e}(\mathbf{i})\,|\,\mathbf{i}\in\mathrm{Seq}(\alpha),d=b_{i_1}\right\}$ で生成される $H_{\Gamma,\alpha}$ のイデアルとする．このとき，$H_{\Gamma,\alpha}^\Lambda=H_{\Gamma,\alpha}/I^\Lambda$ を巡回 KLR 代数と呼ぶ．

イデアルの生成元は各 $\mathbf{e}(\mathbf{i})$ の左端に b_{i_1} 個の黒玉が乗った図である．$\mathbf{i}$ に対し i_1 を見て，更に b_{i_1} を参照しなければならず，混乱を招きやすい部分なので注意されたい．

今回問題となるのは，次の関係式である [2]:

$\mathbf{e}(\mathbf{i})=\psi_ky_{k+1}\mathbf{e}(\mathbf{i})-y_k\psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i})\ (i_k=i_{k+1})$



左辺は明らかに冪等元であるが，右辺の各項も冪等元であることが簡単な計算から分かる．つまり，この場合 $\mathbf{e}(\mathbf{i})$ は原始冪等元とならない．[3]

一般に，KLR 代数であれば $a_i\geq 2$ なる $i\in\Gamma_0$ が存在すれば，即ち同じ色を二回使うことがあれば，先程の関係式から原始冪等元ではない $\mathbf{e}(\mathbf{i})$ が必ず存在する．実際，同じ色が隣り合う ($i_k=i_{k+1}$ となる) ように $\mathbf{i}$ を取ればよい．しかし，巡回 KLR 代数の場合，$\mathbf{e}(\mathbf{i})$ 自体が 0 になったり，右辺のうちどちらかが 0 となることがあるので，同じ色を二回使うことがあっても全ての (0 でない)$\mathbf{e}(\mathbf{i})$ が原始冪等元になりうる．

そのような α，Λ の決定を試みるが，箙 Γ の形に依存するため，次節では Γ が $A_n^{(1)}$ である場合についての結果を述べる．

[2] 関係式の八番目，上式を移項したもの．
[3] 関係式の十一番目の一部も $\mathbf{e}(\mathbf{i})$ の原始冪等性を崩すが，今回は考えないで良い．

2　問題設定と解き方

箙 $A_n^{(1)}$ $(n \geq 1)$ とは，頂点が $\{1, \cdots, n+1\}$ であり，各 k から $k+1$ $(1 \leq k \leq n)$，及び $n+1$ から 1 へと矢が伸びているものとする．

また，この箙が「本質的」に KLR 代数の構造に関わるように，α において，$a_i > 0 (1 \leq i \leq n+1)$ を仮定する．

このとき，$H^{\Lambda}_{\Gamma,\alpha}$ の Γ を省略することにする．

定理 2.1. 巡回 KLR 代数 H^{Λ}_{α} において，0 でない全ての $\mathbf{e}(\mathbf{i})$ が原始冪等元となることと，α と Λ が次のいずれかを満たすことは同値である．

(a) $H^{\Lambda}_{\alpha} = 0$.

(b) $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n+1} \alpha_i, \Lambda$ は任意.

(c) $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n+1} \alpha_i + \alpha_k, \Lambda = \Lambda_k (1 \leq k \leq n+1)$.

2.1　証明のスケッチ

証明は大まかに次のような手順で示される．

(i) (b),(c) の場合のチェック.

(ii) α,Λ に関する「極小な場合」における反例 (0 でなく原始冪等元でもない $\mathbf{e}(\mathbf{i})$) の構成.

(iii) α に対する帰納法のチェック.

(iv) Λ に対する帰納法のチェック.

(i) を後回しにして先に (ii) から (iv) について述べることにする．$\Lambda = 0$ の場合は条件 (a) に含まれることから，$\Lambda \neq 0$ を仮定して良い．また，$A_n^{(1)}$ が回転対称性を持つことから，Λ において $b_1 > 0$ を仮定して良い．

このとき，(ii)α,Λ に関する極小な場合として以下の二つが挙げられる:

(I) $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n+1} \alpha_i + \alpha_k, \Lambda = \Lambda_1$ $(k \neq 1)$.

(II) $\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n+1} \alpha_i + \alpha_1, \Lambda = 2\Lambda_1$.

(I) に関しては，例えば $k = n+1$ の場合，$\mathbf{i} = (1, 2, \cdots, n, n+1, n+1)$ とすれば，$y_{n+1}\mathbf{e}(\mathbf{i}) \neq 0$，$y_{n+2}\mathbf{e}(\mathbf{i}) \neq 0$ より [4]，$\mathbf{e}(\mathbf{i})$ は先程の関係式によって分解される．

(II) に関しては，$\mathbf{i} = (1, 1, 2, \cdots, n, n+1)$ とすれば，$y_1\mathbf{e}(\mathbf{i}) \neq 0$，$y_2\mathbf{e}(\mathbf{i}) \neq 0$ より [5]，$\mathbf{e}(\mathbf{i})$ は先程の関係式によって分解される．

(iii) α に対する帰納法であるが，(b) でない場合なので，$a_k \geq 2$ なる k が存在する．また，(c) でもない場合なので，次のいずれかが満たされる:

(一) k でない l であって，$b_l > 0$ なるものが存在する．

(二) $b_k \geq 2$.

どちらの場合も，(a) でないことから，$\mathbf{e}(\mathbf{i}) \neq 0$ となる $\mathbf{i}$ が存在する．この $\mathbf{i}$ を用いて先程の (I) や (II) のような $\mathbf{e}(\mathbf{i}') \neq 0$ を構成することを考える．しかし今のところ，Graham-Lehrer 予想 [6] を用いる以外に手段はなく，この証明において最も難しい部分であると言える．

(iv) (I) の場合，$\Lambda = \Lambda_1$ であるときが $I^{\Lambda'}$ という形のイデアルとして極大であるから，$H^{\Lambda_1}_{\alpha}$ において 0 でなく原始冪等元でもない $\mathbf{e}(\mathbf{i})$ は，$H^{\Lambda'}_{\alpha}$ においても 0 でなく原始冪等元でもない．(II) の場合も，$\Lambda = 2\Lambda_1$ として同様のことが言える [7].

[4] 前回のテクニカルレポートと次の注意を参照のこと.

[5] 同じ色が連続する場合,「つけられる黒玉の個数」は一致するという事実を用いる.

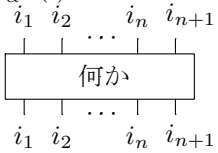
[6] 解決済.

[7] (I) の場合と比較したときの「取りこぼし」は，(II) で $\Lambda = c\Lambda_1$ $(c > 2)$ の場合のみ.

最後に (i) について述べる．次の補題を用いれば，比較的簡単に証明が済む．

補題 2.2. A を結合的で単位元を持つ代数とし，e を A の冪等元とする．このとき，e が原始冪等元であることと，eAe における冪等元が 0 と e のみであることは同値である．

(b) において，$\mathbf{e}(\mathbf{i}) \neq 0$ であるときの $\mathbf{e}(\mathbf{i})H_\alpha^\Lambda \mathbf{e}(\mathbf{i})$ の元は，次のような図の線形結合として表される:

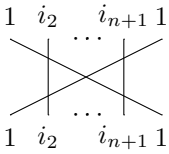


要はこの「何か」の部分が決定できれば良く，そのために次の事実を用いる:

「任意の図は，各糸が互いに高々一度しか交わらない図の線形結合となる.」

今，各々の糸の色は互いに異なるので，互いに一度も交わらない図，即ち各糸が平行に並んでおり，黒玉がいくつか乗っている図となる．黒玉に関しては「いくつかつくと 0」，或いは「別の糸に乗せ換える」という操作しかできない．つまり $\mathbf{e}(\mathbf{i})H_\alpha^\Lambda \mathbf{e}(\mathbf{i})$ は m 変数多項式代数を定数項のない多項式で割ったものと同型となり，そこでの冪等元は 1，即ち $\mathbf{e}(\mathbf{i})$ のみである．

(c) の場合も同様であるが，$i_1 = 1$ であることと，1 の色の糸が二本あることに注意する．このとき例えば次のような図が出てくる可能性がある:



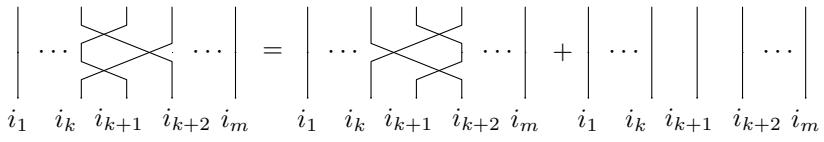
しかしこの場合 $i_2 \neq 1$ が左端に出てきているので，0 になる．[8] 故に (b) の場合と同様に，各糸が平行に並んでおり，黒玉がいくつか乗っている図しかない．

以上が証明のスケッチである．

3 おまけ

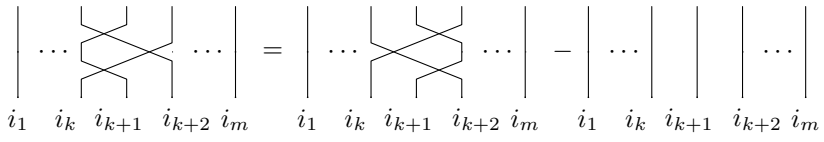
前回の内容では取り扱わなかった関係式の図の一部をここに載せておく．

$\psi_k\psi_{k+1}\psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) = (\psi_{k+1}\psi_k\psi_{k+1} + 1)\mathbf{e}(\mathbf{i})$ $(i_k = i_{k+2}$かつ $i_k \to i_{k+1})$.



.

$\psi_k\psi_{k+1}\psi_k\mathbf{e}(\mathbf{i}) = (\psi_{k+1}\psi_k\psi_{k+1} + 1)\mathbf{e}(\mathbf{i})$ $(i_k = i_{k+2}$かつ $i_k \leftarrow i_{k+1})$.



.

参考文献

[1] J. Brundan, A. Kleshchev, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras*, Invent. Math. **178** (2009), no.3, 451–484.

[2] M. Khovanov, A. D. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I*, Represent. Theory **13** (2009), 309–347.

[8] 左端に 1 が二本ある場合も 0 となる.

TRIANGULATIONS AND τ-TILTING MODULES

足立 崇英 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科 D3)

多元環の表現論の目的は加群圏の構造を理解することであり, その基礎理論の一つとして傾理論がある. この理論において、森田理論の射影生成子の一般化である傾加群が重要な役割を果たす。この特別な加群の自己準同型環と元の環の加群圏の間には非常に深い関係があることが Brenner-Butler によって明らかにされた. したがって, 与えられた環に対して, 傾加群の分類を与えることは基本的な問題の一つとなる. この分類問題のアプローチとして, Ridetmann-Schofield によって導入され, Happer-Unger らによって発展してきた変異と呼ばれる概念がある. 変異とは, 傾加群の直和因子をある操作によって別の直和因子に置き換えることで新しい傾加群を構成する操作である. したがって, 変異を用いれば, 一つの傾加群から次々と新たな傾加群を構成することができる. ただし, 変異の計算は一般には難しいことが知られている. そこで, [AIR] の著者たちは変異を比較的容易に計算するために τ 傾加群と呼ばれる傾加群の一般化である概念を導入した。τ 傾加群と傾加群は非常に類似した性質を持つが, 両者の大きな違いは τ 傾加群の自己準同型環の加群圏の構造は元の環と類似するとは限らないことである. しかしながら, τ 傾加群は表現論における様々な重要な概念と非常に深い関係があることがわかっている. また, 任意の τ 傾加群は元の環のある剰余環上の傾加群となる. したがって, τ 傾加群の分類もまた傾加群と同様に重要な問題である. このテクニカルレポートでは, 多元環の基本的なクラスの一つである中山多元環に対して, τ 傾加群の分類が三角形分割を用いて与えられることについて説明する.

以下では, K を代数的閉体とし, 多元環はすべて環直既約な有限次元 K 多元環, 加群はすべて有限生成な右加群を仮定する. 本レポートで必要となる有限次元多元環の表現論の基本的な結果について以下にまとめる (詳細は [ASS, Chapter I, II, III] を参照).

事実 1. (1) 任意の有限次元 K 多元環は基本的多元環と森田同値である. したがって, 加群圏を考察する上では多元環が基本的であるという仮定はいつでもすることができる.

(2) 基本的有限次元 K 多元環 Λ は, 道多元環 (path algebra) の剰余環として表される. つまり, クイバー Q とその道に関する関係式によって生成される両側イデアル I が存在して, $\Lambda \simeq KQ/I$ となる.

(3) (Krull-Schmidt) 任意の有限次元 Λ 加群 M は有限個の直既約 Λ 加群の直和に同型であり, さらにその分解は一意的である. したがって, 直既約加群が加群圏の最小単位であることがわかる.

(4) Λ を基本的有限次元多元環とする. このとき, 次の集合の間に一対一対応が存在する.
- クイバーの頂点 i
- 原始直交冪等元 e_i
- 直既約射影 Λ 加群 $P_i := e_i\Lambda$
- 単純 Λ 加群 $S_i := e_i\Lambda/\operatorname{rad} e_i\Lambda$

以下では, Λ を基本的かつ環直既約な有限次元 K 多元環, n をそのクイバーの頂点の個数とする. これから τ 傾加群の定義を与えるが, その前に τ についての説明を行う. τ は Auslander-Reiten(AR) 移動と呼ばれる加群圏から導かれる加法圏の間の関手である. この関手は多元環の表現論において非常に重要な概念であるが, 本レポートでは加群への作用のみを定義する (詳細は [ASS, Chapter IV] を参照). 任意の Λ 加群 M に対して, τM は M の極小射影表示 $P^{-1} \xrightarrow{p} P^0 \to M \to 0$ に中山関手 $\nu := \operatorname{Hom}_K(\operatorname{Hom}_\Lambda(-,\Lambda),K)$ を適用するこ

とによって得られる完全列

$$0 \to \tau M \to \nu P^{-1} \xrightarrow{\nu p} \nu P^0$$

から定義される.

定義 2. Λ 加群 M が τ リジッド (rigid) 加群であるとは, $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \tau M) = 0$ を満たすときをいう. さらに, τ リジッド加群 M が τ 傾加群であるとは, $|M| = |\Lambda|(= n)$ を満たすときである. ただし, $|M|$ は M の非同型な直既約直和因子の個数とする.

定義によれば, 任意の射影加群は τ リジッド加群となるので, 多元環自身はいつでも右加群として τ 傾加群となる.

以下の定理が本テクニカルレポートの主結果である.

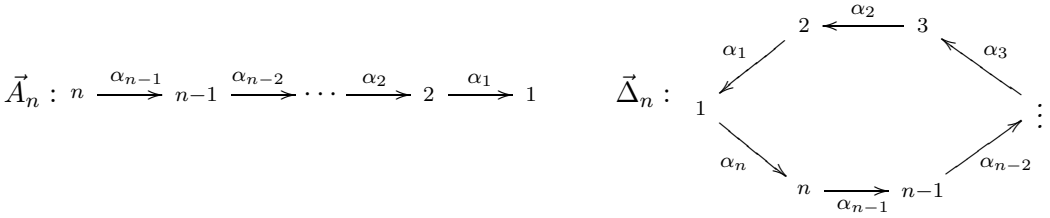
定理 3. 中山多元環 Λ に対して, すべての直既約な射影加群の長さが n 以上とする. このとき, 次の集合の間に一対一対応が存在する.

- 基本的 τ 傾加群の同型類
- 一点穴あき正 n 角形の三角形分割

ここでは簡単のため直既約な射影加群の長さに制限を加えたが, この仮定を外した場合も同様の主張は成り立つことが [A] で示されている. 以下では, τ 傾加群と三角形分割の対応について説明する.

まずは, 中山多元環の定義と性質について述べる. 多元環 Λ が中山多元環であるとは, すべての直既約な射影加群および直既約な移入加群が単列 (uniserial) 加群であるときをいう. ここで, 直既約加群が単列加群であるとは, 組成列が一意的になることである. 事実 1(2) によれば, 任意の基本的多元環はクイバーと関係式によって与えられるので, 中山多元環のクイバーによる特徴付けを与える.

命題 4. [ASS, V.3.2] 多元環 Λ が中山多元環となる必要十分条件はそのクイバーが $\vec{A}_n$ または $\vec{\Delta}_n$ になるときである.



中山多元環は有限表現型であり, その直既約加群の分類は非常によく知られている結果である. Λ 加群 M の長さを $\ell(M)$ と書く.

命題 5. 直既約 Λ 加群 M に対して, ある直既約な射影加群 P_i と整数 $1 \le t \le \ell(P_i)$ が存在して,

$$M \simeq P_i/\mathrm{rad}^t P_i$$

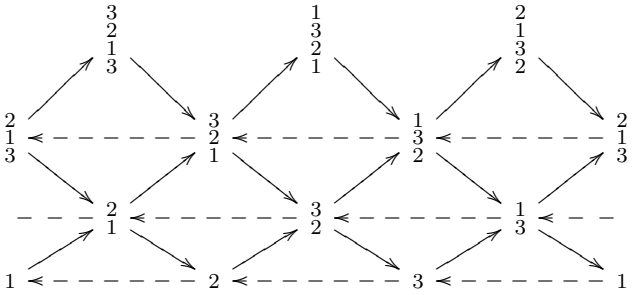
となる. さらに, M が射影加群でないならば, $\tau M \simeq P_{i-1}/\mathrm{rad}^t P_{i-1}$ と $\ell(\tau M) = \ell(M)(= t)$ が成り立つ.

上記の命題の結果として, 任意の直既約加群 M は, 単純加群 $S_i = M/\operatorname{rad} M$ と長さ $t = \ell(M)$ によって一意的に定まる. この時, M は次の形の組成列を持ち, その表示は一意的である. したがって, 直既約加群 M の組成列を $S_i =: S_{i_1}, S_{i_2}, \cdots, S_{i_t}$ とした時,

$$M = \begin{matrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_t \end{matrix}$$

と表すことにする. ただし, $i_1, \cdots, i_t \in \{1, 2, \cdots, n\}$ は $i_{j+1} = i_j - 1 (\mathrm{mod}\ n)$ とする.

例えば, Λ_3^4 をそのクイバーの頂点が 3 で任意の直既約な射影加群の長さが 4 となる中山多元環とする. 以下のクイバーは頂点を直既約 Λ_3^4 加群としてできる AR クイバーと呼ばれるものである (定義は [ASS, IV.4.6] を参照). したがって, 直既約 Λ_3^4 加群は以下のクイバーの頂点に現れるものがすべてである.



このとき, 以下の加群が τ 傾 Λ_3^4 加群のすべてである.

$$\begin{array}{3}1\\3\\2\\1\end{array} \oplus \begin{array}{2}2\\1\\3\\2\end{array} \oplus \begin{array}{3}3\\2\\1\\3\end{array}, \quad \begin{array}{3}1\\3\\2\\1\end{array} \oplus \begin{array}{2}2\\1\\3\\2\end{array} \oplus 1, \quad \begin{array}{2}2\\1\end{array} \oplus \begin{array}{3}2\\1\\3\\2\end{array} \oplus 1, \quad \begin{array}{2}2\\1\end{array} \oplus \begin{array}{3}2\\1\\3\\2\end{array} \oplus 2, \quad \begin{array}{3}3\\2\\1\\3\end{array} \oplus \begin{array}{2}2\\1\\3\\2\end{array} \oplus 2,$$

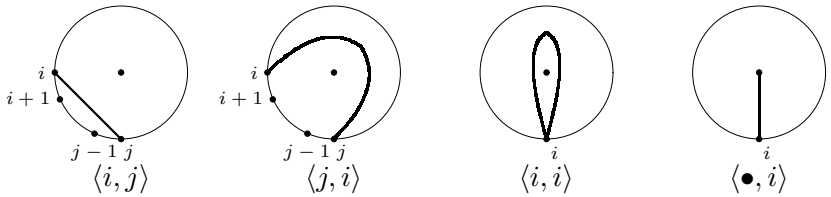
$$\begin{array}{3}3\\2\\1\\3\end{array} \oplus \begin{array}{2}3\\2\end{array} \oplus 2, \quad \begin{array}{3}3\\2\\1\\3\end{array} \oplus \begin{array}{2}3\\2\end{array} \oplus 3, \quad \begin{array}{3}3\\2\\1\\3\end{array} \oplus \begin{array}{3}1\\3\\2\\1\end{array} \oplus 3, \quad \begin{array}{1}1\\3\end{array} \oplus \begin{array}{3}1\\3\\2\\1\end{array} \oplus 3, \quad \begin{array}{1}1\\3\end{array} \oplus \begin{array}{3}1\\3\\2\\1\end{array} \oplus 1.$$

この例から見てわかるように, τ 傾加群の直既約な直和因子には, 長さが 3 の直既約加群を除いて, すべての直既約加群が現れていることがわかる. 実際, 中山多元環の直既約 τ リジッド加群は以下で与えられる.

命題 6. M を射影的でない直既約 Λ 加群とする. このとき, M が τ リジッド加群となる必要十分条件はその長さ $\ell(M)$ が n より小さくなることである.

この結果として, 射影的でない直既約 τ リジッド Λ 加群は $S_j := M/\operatorname{rad} M$ と $S_k := \operatorname{soc} M$ によって区別することができるため, $(k-2, j) := M$ と書く. また, 直既約な射影加群 P_i はいつでも τ リジッド加群であり, $(\bullet, i) := P_i$ と表す.

次に, 三角形分割の定義と簡単な性質について復習する. 以下では, $\mathcal{G}_n$ を一点穴あき正 n 角形とし, その頂点を半時計周りに $1, 2, \cdots, n$ とラベル付けする. このとき, 円弧が内的 (inner arc) であるとは, 頂点 $i, i+1, \cdots, i+t = j$ を結んでできる自己交差しない道のことであり, これを $\langle i, j\rangle$ と書く. また, 円弧が射影的 (projective arc) であるとは, 頂点 i と n 角形の穴を結んで出来る道のことであり, これを $\langle \bullet, i\rangle$ と書く. これらを合わせて単に円弧と呼び, その集合を $\mathrm{Arc}(n)$ によって表す.



$\mathcal{G}_n$ の三角形分割とは, 互いに交わらない円弧に関して極大な集合のことである. 例えば, すべての射影的円弧からなる集合は三角形分割である. 三角形分割は次の性質を持つことが簡単な計算からわかる.

命題 7. 任意の三角形分割は丁度 n 個の円弧を持つ.

直既約 τ リジッド加群と円弧の間の対応を与える. 直既約 τ リジッド Λ 加群 (の同型類) の集合を τ-rigidΛ と書く。命題 5 と 6 によれば, 次の全単射が存在することは容易に確認できる.

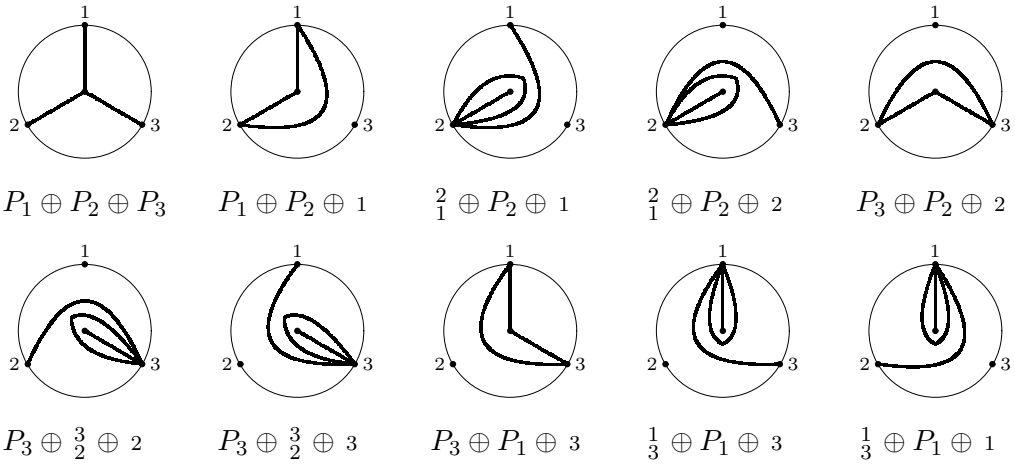
命題 8. $i \in \{1, 2, \cdots, n\} \coprod \{\bullet\}$, $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ とする. 写像 $\langle i, j\rangle \mapsto (i, j)$ は全単射

$$\mathrm{Arc}(n) \to \tau\text{-rigid}\,\Lambda$$

を導く.

この写像を拡張することによって, 定理の τ 傾加群と三角形分割の対応が得られる. 定理 3 を証明するためには, 上記の写像によって, 二つの円弧が交差しないことと対応する二つの直既約 τ リジッド加群の直和もまたリジッド加群となることが同値であることを示す必要がある. この同値性についての証明は省略するが, これさえ示せれば, τ 傾加群の定義と三角形分割の性質である命題 7 を用いて, 定理を容易に証明することができる.

最後に中山多元環 $\Lambda := \Lambda_3^4$ に対して, 定理の例を与える.



References

[A] T. Adachi, *τ-tilting modules over Nakayama algebras*, arXiv:1309.2216.

[AIR] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, *τ-tilting theory*, to appear in Compos. Math.

[ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Vol. 1*, London Mathematical Society Student Texts **65**, Cambridge university press (2006).

E-mail address: m09002b@math.nagoya-u.ac.jp

等質開凸錐の基本相対不変式の決定

九州大学大学院·数理学府　中島 秀斗*

概 要

等質開凸錐上の解析において, 相対不変多項式は重要な役割を果たす. その中で基本相対不変式と呼ばれる, 相対不変多項式における“素数”にあたるものが存在する. 他方等質開凸錐にはクランという非結合的な代数が同型を除き 1 対 1 に対応している. この代数の右乗法作用素の行列式の既約因子には対応する等質開凸錐の基本相対不変式がすべて現れるという顕著な性質を持っている. 本稿ではこの性質とクランの表現を考えることにより, 基本相対不変式が決定されるということを紹介したい.

1　準備

まずはじめにクランと呼ばれる代数を定義する. 有限次元実ベクトル空間 V に双線型な積 $\triangle$ が定義されていて, さらに次の 3 条件を満たすとする：

(C1)　任意の $x, y \in V$ に対して $[L_x, L_y] = L_{x \triangle y - y \triangle x}$　(left symmetric),
(C2)　ある $s \in V^*$ が存在して, $\langle x \,|\, y \rangle := s(x \triangle y)$ が V の内積を定める　(compactness),
(C3)　L_x の固有値は全て実数である　(normality).

ただし, L_x は $x \in V$ を左から掛ける乗法作用素である. このとき, $(V, \triangle)$ をクラン (clan: compact normal left symmetric algebra) と呼ぶ. クランは一般には非可換かつ非結合的であり, 単位元の存在も仮定されていない. Vinberg [5] にあるようにクランと等質凸領域は同型を除き 1 対 1 に対応しており, クランが単位元を持つことと等質凸領域が等質錐になることが対応している.

以後 V は単位元 e_0 を持つクランとし, V の内積 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ は (C2) の認容線型形式から定まっていると仮定する. また原始冪等元の完全直交系 $c_1, \ldots, c_r$ を一つ取り固定する. すると V は次のように分解される：

$$(1)\qquad \begin{aligned} &V = \textstyle\bigoplus_{1 \le j \le k \le r} V_{kj}, \quad V_{jj} := \mathbb{R} c_j \quad (j = 1, \ldots, r), \\ &V_{kj} := \left\{ x \in V;\ L_{c_i} x = \tfrac{1}{2}(\delta_{ij} + \delta_{ik}) x,\ R_{c_i} x = \delta_{ij} x \ (i = 1, \ldots, r) \right\} \ (j < k). \end{aligned}$$

ただし R_x はクランの右乗法作用素である. この分解をクラン V の正規分解とよぶ. さらに内積 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ を通して, V にもう一つの積 $\triangledown$ を

$$\left\langle x \triangledown y \,|\, z \right\rangle = \langle y \,|\, x \triangle z \rangle \quad (x, y, z \in V)$$

により定義すると, $(V, \triangledown)$ もクランとなる. このクラン $(V, \triangledown)$ に対応する等質錐は Ω の双対錐 Ω^* であり, 双対クランと呼ぶ.

*日本学術振興会特別研究員 DC (課題番号 25 · 4998)

例 1.1. $V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ とする. $x = (x_{jk}) \in V$ に対して, x の下三角部分 $\underline{x}$ を

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & \frac{1}{2}x_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & \frac{1}{2}x_{rr} \end{pmatrix}$$

により定義する. さらに $\overline{x} := {}^t(\underline{x})$ とおき, V に積 $\triangle$ を次で定義する：

$$x \triangle y := \underline{x}\, y + y\, \overline{x} \quad (x, y \in V).$$

すると $(V, \triangle)$ はクランとなる. 対応する錐は正定値対称行列全体のなす対称錐[1] である. 双対クランは積を入れ替えた $x \bigtriangledown y = \overline{x}\, y + y\, \underline{x}$ となる.

クランの左乗法作用素のなす空間 $\mathfrak{h} := \{L_x;\ x \in V\}$ は条件 (C1) および (C3) により通常の括弧積で分裂可解 Lie 環となる. ここで $\mathfrak{h}$ に対応する連結かつ単連結な Lie 群を $H := \exp \mathfrak{h}$ とすれば, H は Ω に単純推移的に作用することが知られている. したがって各 $h \in H$ に対して正数 $h_{jj} > 0$ $(j = 1, \ldots, r)$ と $v_{kj} \in V_{kj}$ $(j < k)$ が一意に存在して

$$h = (\exp T_{11})(\exp L_1)(\exp T_{22}) \cdots (\exp L_{r-1})(\exp T_{rr})$$

と表現できる. ただし $T_{jj} = (2 \log h_{jj}) L_{c_j}$, $L_j = \sum_{k>j} L_{v_{kj}}$ とおいた. また Ω 上の関数 f が H の作用に関して相対不変であるとは, H の 1 次元表現 χ が存在して任意の $h \in H$, $x \in \Omega$ に対して $f(hx) = \chi(h) f(x)$ をみたすことと定義する. このとき各 χ に対してある指数 (multiplier) $\underline{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_r)$ が存在して $\chi(h) = (h_{11})^{\tau_1} \cdots (h_{rr})^{\tau_r}$ と書けることに注意する.

定理 1.2 (Ishi [2])**.** 既約な H-相対不変多項式 $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ が存在して, 任意の H-相対不変多項式 $p(x)$ はこれらの冪積

$$p(x) = (\mathrm{const}) \Delta_1(x)^{n_1} \cdots \Delta_r(x)^{n_r} \quad \big((n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}\big)$$

でかける. さらに Ω は $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ で表すことができる：

$$\Omega = \{x \in V;\ \Delta_1(x) > 0, \ldots, \Delta_r(x) > 0\}.$$

この既約多項式 $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ を等質錐 (もしくはクラン) の基本相対不変式と呼ぶ. ただし基本相対不変式の順番は $c_1, \ldots, c_r$ に付随するものとする (cf. Ishi[2]). 基本相対不変式は“クランの右乗法作用素の行列式の既約因子としてすべて現れる”という性質があり, この性質を利用して基本相対不変式を求める. $\Delta_j(x)$ の指数を $\underline{\sigma}_j = (\sigma_{j1}, \ldots, \sigma_{jr})$ とおき, これらを縦に並べて r 次正方行列 $\sigma_V := (\sigma_{jk})$ を構成する. 本稿では σ_V をクラン V の指数行列 (multiplier matrix)[2]と呼ぶことにする. 各 h_{jj} は x_{jk} たちを用いて表現できることが知られているので (cf. Ishi [2]), 指数行列が求まれば基本相対不変式を決定できることになる.

[1] 自己共役な等質錐のこと.

[2] 構成法より, σ_V は対角成分が 1 の下三角行列となることがわかる.

2　クランの表現から定義されるクラン

この節ではクランの表現を定義し, クランとその表現の情報を基に階数の一つ大きなクランを構成することを考える. E を内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_E$ をもつ実ユークリッド空間とし, φ を V から E 上の線型変換のなす空間 $\mathcal{L}(E)$ への写像とする. V の正規分解 (1) を用いて, 線型写像 $\varphi(x)$ の“下三角部分” $\underline{\varphi}(x)$ を

$$\underline{\varphi}(x) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} x_{jj}\varphi(c_j) + \sum_{j<k}\varphi(c_k)\varphi(x_{kj})\varphi(c_j) \quad \left(x = \textstyle\sum_j x_{jj}c_j + \sum_{j<k} x_{kj}\right)$$

により定義する. また“上三角部分” $\overline{\varphi}(x)$ を $\overline{\varphi}(x) := \big(\underline{\varphi}(x)\big)^*$ とする. (φ, E) が双対クラン $(V, \triangledown)$ の自己共役表現であるとは, 各 $\varphi(x)$ が自己共役かつ次の条件をみたすことをいう：

$$\varphi(x \triangledown y) = \overline{\varphi}(x)\varphi(y) + \varphi(y)\underline{\varphi}(x) \quad (x, y \in V).$$

また $\varphi(e_0) = \mathrm{id}_E$ となることも仮定する. さらにクランの表現[3] φ に付随して, E 上の対称双線型形式 $Q\colon E \times E \to V$ を次で定義する：

$$\langle Q(\xi, \xi')\,|\,x\rangle = \langle \varphi(x)\xi\,|\,\xi'\rangle_E \quad (\xi, \xi' \in E,\ x \in V).$$

すると, Q は Ω-positive , すなわち任意の 0 でない $\xi \in E$ に対して $Q(\xi, \xi) \in \Omega$ となる[4].

定理 2.1. 直和空間 $V_E := E \oplus V$ に積 $\triangle$ を以下で定義する：

$$(\xi + x) \triangle (\xi' + x') := \underline{\varphi}(x)\xi' + (Q(\xi, \xi') + x \triangle x') \quad (\xi, \xi' \in E,\ x, x' \in V).$$

すると, $(V_E, \triangle)$ は (単位元を持たない) クランとなる.

等質開凸錐と対応させるため, V_E に単位元 e を添加して得られるクラン $V_E^0 := \mathbb{R}e \oplus V_E$ を考える. ここで $u := e - e_0$ とおけば, $V_E^0 = \mathbb{R}u \oplus V_E$ と表せる. 以後この表記を用いることとし, $v \in V_E^0$ を $v = \lambda u + \xi + x$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \xi \in E,\ x \in V)$ と表す. このとき V_E^0 の積は

$$v \triangle v' = (\lambda\lambda')u + (\tfrac{1}{2}\lambda\xi' + \lambda'\xi + \underline{\varphi}(x)\xi') + (Q(\xi, \xi') + x \triangle x') \quad (v, v' \in V_E^0)$$

のようになる. この積における右乗法作用素の行列式を考察することにより, クラン V_E^0 の基本相対不変式が計算できる.

定理 2.2. クラン V の基本相対不変式を $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ $(x \in V)$ とすると, クラン V_E^0 の基本相対不変式 $P_j(v)$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$ は非負整数 α_j を用いて

$$P_j(v) = \begin{cases} \lambda & (j = 0), \\ \lambda^{-\alpha_j}\Delta_j(\lambda x - \frac{1}{2}Q[\xi]) & (j = 1, \ldots, r) \end{cases}$$

とかける. ただし $Q[\xi] := Q(\xi, \xi)$ とおいた.

[3]単にクランの表現といえば, 双対クラン $(V, \triangledown)$ の自己共役表現を表すこととする.
[4]しかし, Ω^*-positive とはならない. これが双対クランの表現を用いる理由である.

3　指数行列の決定

定理2.2に現れたα_jを決定するために, クランの表現をより詳しく考察する. $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{0,1\}^r$とし, $c_{\boldsymbol{\varepsilon}} := \varepsilon_1 c_1 + \cdots + \varepsilon_r c_r$とおく. クランの表現$(\varphi, E)$が$\boldsymbol{\varepsilon}$-表現であるとは, 対応する2次形式の像$Q[E]$が$c_{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \overline{\Omega}$を通る$H$軌道$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$の閉包$\overline{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}}$に一致すること, すなわち$Q[E] = \overline{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}}$と定義する. 実は次の命題[5]が成り立つ.

命題 3.1. (φ, E)を任意のクランの自己共役表現とする. このときある$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\varphi) \in \{0,1\}^r$が一意に存在[6]して, φは$\boldsymbol{\varepsilon}$-表現となる.

$\boldsymbol{\alpha} := {}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$とおく. また$V$の指数行列を$\sigma_V$とし, φを$\boldsymbol{\varepsilon}$-表現とする.

定理 3.2. $\boldsymbol{\alpha} = \sigma_V(\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon})$が成り立つ. さらに$V_E^0$の指数行列$\sigma^0$は, 次のように表される：

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma_V \boldsymbol{\varepsilon} & \sigma_V \end{pmatrix}.$$

最後にクランVの指数行列σ_Vを求める. Vの部分空間$V^{[k]}$, $E^{[k]}$ $(k = 1, \ldots, r-1)$を

$$V^{[k]} = \bigoplus_{k<l\le m\le r} V_{ml}, \quad E^{[k]} := \bigoplus_{m>k} V_{mk}$$

により定義する. このとき$V^{[k]}$はVの部分クランとなる. また$E^{[k]} \bigtriangledown V^{[k]} \subset E^{[k]}$が成立するので, $\mathcal{R}^{[k]}(x)\xi := \xi \bigtriangledown x$ $(\xi \in E^{[k]},\ x \in V^{[k]})$により$\mathcal{R}^{[k]}$を定義すると, 実は$(\mathcal{R}^{[k]}, E^{[k]})$はクラン$(V^{[k]}, \bigtriangledown)$の自己共役表現になる. そこで各$k$に対し$\boldsymbol{\varepsilon}^{[k]} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{R}^{[k]})$とおき, さらに$r$次正方行列$\mathcal{E}_k$を次で定義する：

$$\mathcal{E}_k := \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}^{[k]} & I_{r-k} \end{pmatrix}.$$

定理 3.3. クランVの指数行列σ_Vは, $\sigma_V = \mathcal{E}_{r-1}\mathcal{E}_{r-2}\cdots\mathcal{E}_1$で与えられる.

参考文献

[1] P. Graczyk and H. Ishi, *Riesz measures and Wishart laws associated to quadratic maps*, J. Math. Soc. Japan, **66** (2014), 317–348.

[2] H. Ishi, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory, **11** (2001), 155–171.

[3] H. Nakashima and T. Nomura, *Clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras and the associated basic relative invariants*, Kyushu J. Math. **67** (2013), 163–202.

[4] H. Nakashima, *Basic relative invariants associated with the clans extended by representations of a given clan*, (submitted).

[5] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.

[5] Ishi–Gracyzk[1] の結果による.

[6] この$\boldsymbol{\varepsilon}$は正規分解 (1) から得られる情報$\dim V_{kj}$ $(1 \le j \le k \le r)$から導くことができる.

二次の複素特殊線形群上の新谷関数と Heun の方程式

源嶋 孝太

大阪大学大学院理学研究科 博士後期課程 1 年

概要

$G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ 上の保型形式の「双曲的/斜航的 Fourier 展開」は, G の非ユニタリ主系列表現 π に付随する「新谷関数」により記述される. π が自明な極小 SU(2)-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現の場合には Hirano([H2]) により新谷関数の明示公式が得られているが, 一般には未解明である. 新谷関数はその定義からある線形微分方程式を満足する. π が 3 次元極小 SU(2)-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現のとき, 新谷関数のみたす微分方程式は Heun の方程式に帰着する. その解を Gauss の超幾何関数を用いて表示できたのでその概要を述べる.

1 Introduction

保型形式の「Fourier 展開」は, 保型形式自身を研究する上でも, 保型 L 関数を研究する上でも極めて基本的かつ重要なものの一つである. しかし保型形式の Fourier 展開は, その重要性にも関わらず, Whittaker 関数による Fourier 展開を除いてはあまりわかっていない. Hirano[H1],[H2] は, $\mathrm{GL}(2, F)$ $(F = \mathbf{R}, \mathbf{C})$ の保型形式を,「新谷モデル」を用いて研究することで, 保型形式の Fourier 係数として現れる「新谷関数」の動径成分が満足する微分方程式系を明示的に書き下し, それを実際に解くことで自明な K-タイプ $(K = \mathrm{O}(2), \mathrm{U}(2))$ をもつ非ユニタリ主系列表現に付随する新谷関数の明示公式を, Gauss の超幾何関数を用いて与えた. このように新谷関数のような特殊関数の明示公式を求めるには, その特殊関数の動径成分が満足する常微分方程式系を明示的に書き下し, その解を求める必要がある. ところが K-タイプの次元が大きくなると, 得られる方程式系は, 例えばアクセサリーパラメータが増える等の理由により, 複雑なものとなることから解くことが大変難しくなる.

本講演では $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ 上の新谷関数について述べる. 3 次元極小 SU(2)-タイプをもつ非

ユニタリ主系列表現に付随する新谷関数の明示公式を, Gauss の超幾何関数を用いて得ることができたのでここで紹介したい. 証明には微分作用素の交換関係式が有効に用いられる.

2 Preliminaries

まず $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ の非ユニタリ主系列表現と $K = \mathrm{SU}(2)$ の既約表現について簡単に復習する.

$P = NA_\phi M$ を G の標準的放物型部分群とする. ここで N は P の unipotent radical, $M = \{\mathrm{diag}(e^{it}, e^{-it})|\ t \in \mathbf{R}\}$, $A_\phi = \{\mathrm{diag}(r, r^{-1})|\ r \in \mathbf{R}^\times_{>0}\}$ である. $m \in \mathbf{Z}, \nu \in \mathbf{C}$ に対し, M 上の指標 σ_m と A_ϕ 上の指標 e^ν をそれぞれ

$$\begin{array}{ll} \sigma_m(\mathrm{diag}(e^{it}, e^{-it})) = e^{imt} & (t \in \mathbf{R}), \\ e^\nu(\mathrm{diag}(r, r^{-1})) = r^\nu & (r \in \mathbf{R}^\times_{>0}) \end{array}$$

により定義する. このとき誘導表現 $\pi^m_\nu = \mathrm{Ind}^G_P(1_N \otimes e^{\nu+2} \otimes \sigma_m)$ を G の非ユニタリ主系列表現という. G の Lie 環の複素化 $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ の普遍展開環の中心を $Z(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ とする. このとき $Z(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ の生成元 Ω_1, Ω_2 で, $f \in \pi^m_\nu$ に対して

$$16[\pi^m_\nu(\Omega_1)f] = (\nu^2 + m^2 - 4)f, \quad 8[\pi^m_\nu(\Omega_2)f] = \nu m f$$

となるものが存在する. K の既約表現の同値類の集合は, 自然表現 $\mathbf{C}^2$ の対称テンソル表現 $\tau_n = (\tau_n, \mathrm{Sym}^n(\mathbf{C}^2)), n = 0, 1, \cdots$ により尽くされることがよく知られている. $\{f^{(n)}_j\}^n_{j=0}$ を $\mathrm{Sym}^n(\mathbf{C}^2)$ の標準基底とする.

3 Shintani Functions

ここでは新谷関数を定義し, 新谷関数のみたす微分方程式を導出する.

G の Lie 部分群 H と部分集合 A^+ をそれぞれ

$$H = \{\mathrm{diag}(w, w^{-1})|\ w \in \mathbf{C}^\times\},$$
$$A^+ = \left\{ a(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbf{R}_{\geq 0} \right\}$$

により定める. このとき分解 $G = HA^+K$ が成り立つ. $\ell \in \mathbf{Z}$, $\mu \in \mathbf{C}$ に対し, H 上の指標 η^ℓ_μ を

$$\eta^\ell_\mu(\mathrm{diag}(w, w^{-1})) = w^\ell |w|^{\mu-\ell} \quad (w \in \mathbf{C}^\times)$$

により定める. $S^m_\nu(\eta^\ell_\mu,\tau_n)$ を次の条件 (i)-(iii) を満足する G 上の C^∞ 級関数 $\phi : G \mapsto \tau_n^\vee$ 全体とする:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \phi(hgk) = \eta^\ell_\mu(h)\tau_n^\vee(k)^{-1}\phi(g),\ (h,g,k) \in H\times G\times K; \\ \text{(ii)} & 16[R(\Omega_1)\phi] = (\nu^2+m^2-4)\phi; \\ \text{(iii)} & 8[R(\Omega_2)\phi] = \nu m\phi. \end{cases}$$

ここで $\tau_n^\vee$ は τ_n の反傾表現であり, $[R(X)\phi](g) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\phi(ge^{sX}), X \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ である. $\phi \in S^m_\nu(\eta^\ell_\mu,\tau_n)$ をタイプ $(m,\nu,\eta^\ell_\mu;\tau_n)$ の新谷関数と呼ぶ. 次のことに注意する:

(a) 条件 (i) より, 新谷関数は A^+への制限により定まる;
(b) 条件 (ii),(iii) より, 新谷関数はある線形微分方程式を満足する;
(c) (ii) により得られる方程式は, (iii) により得られる方程式にある 1 階の微分作用素を施すことにより得られる.

特に (c) から (iii) により得られる微分方程式を考察すれば十分であることがわかる. 新谷関数 $\phi = \sum_{j=0}^n \phi_j f_j^{(n)\vee} \in S^m_\nu(\eta^\ell_\mu,\tau_n)$ に対する Ω_2 の作用は

(♠)
$$\begin{aligned} &8[R(\Omega_2)\phi](a(t)) = \\ &\sum_{j=0}^n \Big[-j\Big\{\frac{d}{dt} + \frac{2}{\tanh(2t)} - (n-2j)\Big(\tanh(2t) - \frac{1}{\tanh(2t)}\Big) \\ &\quad - \frac{\ell}{\sinh(2t)}\Big\}\phi_{j-1}(a(t)) + \frac{\mu(n-2j)}{\cosh(2t)}\phi_j(a(t)) - (n-j)\Big\{\frac{d}{dt} + \frac{2}{\tanh(2t)} \\ &\quad + (n-2j)\Big(\tanh(2t) - \frac{1}{\tanh(2t)}\Big) + \frac{\ell}{\sinh(2t)}\Big\}\phi_{j+1}(a(t))\Big] f_j^{(n)\vee} \end{aligned}$$

で与えられる.

4 Explicit Formulas and Heun's Differential Equations

タイプ $(0,\nu,\eta^\ell_\mu;\tau_0)$ の新谷関数の明示公式は Hirano([H2]) により得られているが, 一般には未解明である. 以下, 主結果であるタイプ $(2,\nu,\eta^\ell_\mu;\tau_2)$ の新谷関数の明示公式について述べる. 明示公式の証明には後述の微分作用素の交換関係式 (♢) が有効に用いられる.

Ω_2 の作用の明示式 (♠) から, 新谷関数 $\phi = \sum_{j=0}^2 \phi_j f_j^{(2)\vee} \in S^2_\nu(\eta^\ell_\mu,\tau_2)$ の明示公式を得るには ϕ_1 の明示公式を得れば十分であることがわかる. $x = 1/\cosh(2t)$ と変数変換すると, 条件 (iii) により得られる方程式は適当な操作により, ϕ_1 のみたすある単独方程式 $P_{\mu,\nu,\ell}\Big(x,\frac{d}{dx}\Big) = 0$ に帰着する. $P_{\mu,\nu,\ell}\Big(x,\frac{d}{dx}\Big)$ は 4 点に特異点をもつ 2 階の Fuchs 型微分作用素 (Heun の微分作用素) である. さらに Heun の方程式 $P_{\mu,\nu,\ell}\Big(x,\frac{d}{dx}\Big) = 0$ は, 次の補題により Gauss の超幾何方程式に帰着する:

補題　ある 1 階の微分作用素 $Q\left(x, \dfrac{d}{dx}\right), R\left(x, \dfrac{d}{dx}\right)$ と Gauss の超幾何微分作用素 $G\left(x, \dfrac{d}{dx}\right)$ が存在して, 次の微分作用素の交換関係式が成り立つ:

$$(\diamond) \qquad P_{\mu,\nu,\ell}\left(x, \frac{d}{dx}\right) Q\left(x, \frac{d}{dx}\right) = R\left(x, \frac{d}{dx}\right) G\left(x, \frac{d}{dx}\right).$$

□

上の交換関係式により, タイプ $(2, \nu, \eta_\mu^\ell; \tau_2)$ の新谷関数の明示公式を得る:

定理 （主結果） Gauss の超幾何微分方程式 $G\left(x, \dfrac{d}{dx}\right) = 0$ の線形独立な解を $F_j(x), j = 1, 2$ とする. このとき $Q\left(x, \dfrac{d}{dx}\right) F_j(x), j = 1, 2$ は Heun の方程式 $P_{\mu,\nu,\ell}\left(x, \dfrac{d}{dx}\right) = 0$ の線形独立な解である. 特に, 得られた Heun の方程式の解の内 $t = 0$ まで延長可能なものを選ぶことで, タイプ $(2, \nu, \eta_\mu^\ell; \tau_2)$ の新谷関数の明示公式を得る. □

参考文献

[H1] M. Hirano, *Shintani functions on* $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 1709-1721.

[H2] ———, *Shintani functions on* $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 1535-1550.

Newton polygonを用いた類数の可除性問題について

Takuma HIRASHIMA*

1 はじめに

代数的整数論において, イデアル類群, 類数は重要で難しい概念である. 例えば, 類数が 1 の虚 2 次体は有限個であることが知られているが, 実 2 次体の場合, 無限個あるか (Gauss 予想) は未解決である.

本講演では, 類数の問題の中で, 可除性問題について考察する. これは元来, 類数が n で割れる所定の代数体が無限個存在するかという問題である. これは, 次のように一定の解決をみている.

○ $n = 2$ に対して 2 次体の場合 $\cdots$ Gauss の種の理論による.
○任意の n に対して虚 2 次体の場合 $\cdots$ Nagell(1922) [5] の構成など.
○任意の n に対して実 2 次体の場合 $\cdots$ Yamamoto(1970)[10], Weinberger(1973)[9] の構成など.
○任意の n, 任意の m 次体の場合 $\cdots$ Azukibata-Ichimura(1984)[1], Nakano(1985)[6] の構成など.
(他の構成の結果も多くある. これらは第 3 回北陸数論研究集会報告集 (2004)[7] に詳しい).

さらに, Kishi-Miyake(2000)[3] により, 類数が 3 で割れる 2 次体の必要十分条件が与えられた.

Theorem (Kishi-Miyake, 2000) 2 次体 K の類数が 3 で割れる必要十分条件は, 次の (1), (2), (3) のいずれかを満たす u,$w \in \mathbb{Z}$ が存在して, $(u, w) = 1$ で, $X^3 - uwX - u^2 \in \mathbb{Z}[X]$ が既約で, $4uw^3 - 27u^2 \notin \mathbb{Z}^2$ であり, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{4uw^3 - 27u^2})$ と書けることである.
(1) $3 \nmid w$; (2) $3|w, uw \not\equiv 3 \bmod 9$,and $u \equiv w \pm 1 \bmod 9$; (3) $3|w, uw \equiv 3 \bmod 9$,and $u \equiv w \pm 1 \bmod 27$.

この議論を踏襲し, 類数が 5 で割れる 2 次体の必要十分条件を求めることができたので報告する.

Main Theorem 2 次体 K の類数が 5 で割れる必要十分条件は, s,$t \in \mathbb{Q}$ が存在して, すべての素数 p について次の条件 $C(p)$ を満たし, $X^5 + (t-3)X^4 + (s-t+3)X^3 + (t^2-t-2s-1)X^2 + sX + t \in \mathbb{Q}[X]$ が既約で, $d(s,t) \notin \mathbb{Q}^2$ であり, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d(s,t)})$ と書けることである.

ここで, $d(s,t) = -4s^3 + (t^2 - 30t + 1)s^2 + 2t(3t+1)(4t-7)s - t(4t^4 - 4t^3 - 40t^2 + 91t - 4)$ である.

$p \neq 5$ について,s,t が $C(p)$ を満たすとは, 次のいずれかを満たすことである.
(p.1) $v_p(t^2 - 11t - 1) \leq 0$; ($p$.2) $v_p(t - 3s - 1) \leq 0$; (p.3) $v_p(B_0) \equiv 0 \bmod 5$; ($p$.4) $5v_p(B_1) < 4v_p(B_0)$.

$p = 5$ について,s,t が $C(5)$ を満たすとは, 次のいずれかを満たすことである.
(5.1) $v_5(s) \leq 0$; (5.2) $v_5(t-3) \leq 0$; (5.3) $v_p(C_0) = 3, 4$, and $T \not\equiv 15 \bmod 25$; (5.4) $v_p(C_0) \geq 5$.

ここで,v_p は加法的 p 進付値であり,$B_0 = -25(t-3)(t+2)^2 s + (4t^5 + 90t^4 - 815t^3 + 2020t^2 + 1670t - 72)$, $B_1 = 5(t+2)s - (t-3)(t^2 + 14t - 1)$, $C_0 = (t+1)^2 s + (t^3 + 4t^2 + t - 1)$ である.

これは生成的多項式と, Newton polygon を用いた不分岐性の議論により, 得ることができる. また, 同じ議論により, Gauss の結果の (種の理論によらない) 別証明を与えることができ, その一般の代数体への拡張も考察できることを報告する.

*d12002j@math.nagoya-u.ac.jp

2 道具

不分岐性を議論は, 完全分岐性の必要十分条件を考えている. それを考察するための道具について述べる.

以下, K を代数体,O_K を整数環としておく. $f(X) \in K[X]$ のひとつの根 θ を固定して, K の素イデアル p の $K(\theta)$ での完全分岐性について議論する. また, $v_p(x)$ を加法的 p 進付値としておく.

2.1 Newton polygon

多項式 $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ の (p に関する) Newton polygon は, 次のように定義される $\mathbb{R}^2$ 内の折れ線である. 点の集合 $\{(i, v_p(a_i)) \mid 0 \leq i \leq n, i \in \mathbb{Z}\}$ を考える. その中の r 個 ($2 \leq r \leq n$) の点を,$i_1 = 0 < i_2 < \cdots < i_r = n$ として, $(i_1 = 0, v_p(a_0)) \to (i_2, v_p(a_{i_2})) \to \cdots \to (i_r = n, v_p(a_n))$ を, 下に凸かつ, その折れ線の下に点が存在しないようにとる. この折れ線を $f(X)$ の (p に関する) "Newton polygon" という. Newton polygon の各線分の傾きを Newton polygon の "slope" という. Newton polygon が 1 つの線分だけであるとき, "折れがない","直線である" といい, そうでないとき,"折れる" ということとする.

Newton polygon を用いると, 多項式の根の付値について, 次が言える.

Proposition 2.1 *$f(X) \in K[X]$, その根 θ をひとつ固定する. p に関する $f(X)$ の Newton polygon の任意の slope λ に対して, p の上にある $K(\theta)$ の素イデアル P が存在して, $-\lambda = \frac{v_P(\theta)}{e(P/p)}$ が成立する. ここで, $e(P/p)$ は分岐指数とする.*

素イデアルが完全分岐するか否かだけに着目すると, 直ちに次がいえる.

Lemma 2.2 *$f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[X]$ を monic n 次既約多項式,θ をそのひとつの根,p を素数とする. このとき,*
○ $f(X)$ の p に関する Newton polygon が折れるとき,p は $K(\theta)$ で完全分岐しない.
○ $f(X)$ の p に関する Newton polygon が直線で,$\gcd(v_p(a_0), n) = 1$ のとき,p は $K(\theta)$ で完全分岐する.

2.2 もうひとつの補題

Newton polygon だけでは, すべての場合を判定できないので, もうひとつ補題を用意しておく. この判定法は, 次の節で, 特に $n = q$ を素数とするが, $p \not| q$ と $p|q$ で様相が異なることに注意しておく.

Lemma 2.3 *p を素イデアル,$O_{K(p)} = \{a/b \mid a, b \in O_K, b \notin p\}$ とする. $f(X) \in O_{K(p)}[X]$ を n 次既約多項式, そのひとつの根を θ とする. このとき,*
○ $\forall \alpha$, $f(X) \not\equiv (X + \alpha)^n \bmod p$ ならば, p は $K(\theta)$ で完全分岐しない.

2.3 完全分岐性判定のアルゴリズム

以下, $[K(\theta) : K] = q$ を素数とし, q 次多項式 $f(X) = \sum a_i X^i$ を考える. そして, $a_{q-1} = 0$ としておく. K の素イデアル p の完全分岐性について議論する.

[$p \not| q$ の場合] 準備した補題より,

$$\begin{cases} f(X) \text{ の } Newton\ polygon \text{ が折れる.} \Rightarrow p \text{ は不分岐.}(\because \text{補題より.}) \\ f(X) \text{ の } Newton\ polygon \text{ が直線, かつ } v_p(a_0) \not\equiv 0 \bmod q \Rightarrow p \text{ は完全分岐.}(\because \text{補題より.}) \\ f(X) \text{ の } Newton\ polygon \text{ が直線, かつ } v_p(a_0) \equiv 0 \bmod q \Rightarrow p \text{ は不分岐.}(\because \text{以下で議論する.}) \end{cases}$$

最後の場合分け, $f(X)$ の Newton polygon が直線かつ, $v_p(a_0) \equiv 0 \bmod q$ のとき, $k = v_p(a_0)/q$ として,

$$g(X) = \sum b_i X^i = \frac{1}{\pi^{qk}} f(\pi^k X)$$

とする. ここで, $\pi \in K$ を, $v_p(\pi) = 0$ となるようにとる. このとき, $v_p(b_0) = 0$, $v_p(b_i) \geq 0$ $(1 \leq \forall i \leq q-1)$ であり. 特に, $b_{q-1} = 0$ で $v_p(b_{q-1}) = \infty > 0$. よって, $g(X) \not\equiv (X + \forall\alpha) \bmod p$ より, p は不分岐である.

[$p|q$ の場合] (先の議論よりも面倒になる.) まず, 以下は同様である.

$$\begin{cases} f(X) \text{ の Newton polygon が折れる.} \Rightarrow p \text{ は不分岐.}(\because \text{補題より.}) \\ f(X) \text{ の Newton polygon が直線, かつ } v_p(a_0) \not\equiv 0 \bmod q \Rightarrow p \text{ は完全分岐.}(\because \text{補題より.}) \\ f(X) \text{ の Newton polygon が直線, かつ } v_p(a_0) \equiv 0 \bmod q \Rightarrow \text{Step(1) へ} \end{cases}$$

○ Step(1)

$p \not| q$ の場合と同様に, k, π をとり,

$$g(X) = \sum b_i X^i = \frac{1}{\pi^{qk}} f(\pi^k X)$$

とする. このとき, $1 \leq \exists i \leq q-1$ で $v_p(b_i) = 0$ ならば, $g(X) \not\equiv (X + \forall\alpha) \bmod p$ より, p は不分岐である.

よって, $1 \leq \forall i \leq q-1$ で $v_p(b_i) > 0$ とする. そして,

$$f^{(1)}(X) = \sum a_i^{(1)} X^i = g(X - b_0^{q^{f-1}})$$

と定義する. ここで $f = [O_k/p : \mathbb{Z}/q]$ とする. このとき, すべての $i(i = 0$ も含めて$) v_p(b_i) > 0$ に注意する.

$$a_0^{(1)} = (-b_0^{q^{f-1}})^q + b_{q-1}(-b_0^{q^{f-1}})^{q-1} + \cdots + b_1(-b_0^{q^{f-1}}) + b_0$$

で $v_p(-b_0^{q^f} + b_0) > 0$ より, $v_p(a_o^{(1)}) > 0$ である. また,$b_{q-1} = 0$ に注意して,

$$a_{q-1}^{(1)} = q(-b_0^{q^{f-1}}) + b_{q-1} = q(-b_0^{q^{f-1}})$$

より, $v_p(a_{q-1}^{(1)}) = e$ であることを注意しておく. ($e = v_p(q)$ とした. これにより, アルゴリズムが有限回で停止することを最後に述べる.) そして,

$$\begin{cases} f^{(1)}(X) \text{ の } \textit{Newton polygon} \text{ が折れる.} \Rightarrow p \text{ は不分岐.} \\ f^{(1)}(X) \text{ の } \textit{Newton polygon} \text{ が直線, かつ } v_p(a_0^{(1)}) \not\equiv 0 \bmod q \Rightarrow p \text{ は完全分岐.} \\ f^{(1)}(X) \text{ の } \textit{Newton polygon} \text{ が直線, かつ } v_p(a_0^{(1)}) \equiv 0 \bmod q \Rightarrow \text{Step(2) へ} \end{cases}$$

と判定できる.

○ Step2 以降

以下, $f^{(i)}(X)$ から

$$g^{(j)}(X) = \sum b_i^{(j)} X^i = \frac{1}{\pi^{qk^{(j)}}} f^{(j)}(\pi^{k^{(j)}} X)$$

を作る. $k^{(j)} = v_p(a_0^{(j)})/q$ とした. そして, すべての $i(1 \leq i \leq q-1)$ で $v_p(b_i^{(j)}) > 0$ であるとき,

$$f^{(j+1)}(X) = \sum a_i^{(j+1)} X^i = g^{(j)}(X - b_0^{(j)q^{f-1}})$$

として判定する.

○有限停止性

最後に有限停止性について述べる. 各多項式の $q-1$ 次の係数に注意すると,

$$v_p(a_{q-1}^{(1)}) = e \to v_p(b_{q-1}^{(1)}) = v_p(a_{q-1}^{(2)}) = e - k^{(1)} \to v_p(b_{q-1}^{(2)}) = v_p(a_{q-1}^{(3)}) = e - k^{(1)} - k^{(2)} \to \cdots$$

と減少していき, どこかの段階で判定できるか, 0 以下になると, p は不分岐であり, 判定でき, アルゴリズムは停止する. これは, $a_{q-1} = 0$ としたことが十分条件で従うが, 他の場合でも, 係数によっては従う.

3　証明の方法

生成的多項式と上記のアルゴリズムを用いることで完全に不分岐性を決定することができる.

$n = 3$, Kishi-Miyake の結果は,$\mathbb{Q}$ 上での $S_3(= D_3)$-生成的多項式 ([2] に詳しい)

$$X^3 - tX - t \in \mathbb{Q}(t)[X]$$

を用いて解くことができる. (途中で $t = w^3/u$ として変形している.) 生成的多項式より,(以下はパラメトリック多項式という条件だけで十分ではあるが), 任意の S_3-拡大 $L/\mathbb{Q}$ について, $t \in \mathbb{Q}$ がとれて, $L = Spl_{\mathbb{Q}}(X^3 - tX - t)$ とできる. この部分 2 次拡大を扱うことにより, すべての所望の 2 次体を考察している. これは, $\mathbb{Q}$ の 2 次体上での不分岐 C_3-拡大体は,$\mathbb{Q}$ 上 S_3-拡大でとなるからである.

$n = 5$ の場合も同様に, $\mathbb{Q}$ 上での D_5-生成的多項式

$$X^5 + (t-3)X^4 + (s-t+3)X^3 + (t^2-t-2s-1)X^2 + sX + t \in \mathbb{Q}(s,t)[X]$$

を用いて, $a_4 = 0$ ではないが, 同様にアルゴリズムを用いて求めることができる.

また,$n = 2$ の場合は, 直接 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 上で C_2-生成的多項式 $X^2 - t$ を考察し, Gauss の結果と同様の結果を得ることができる.

またこれは, 一般の代数体でもこのアルゴリズムは有効であるので, 一般化を考察をすることができる.

参考文献

[1] T. Azuhata and H. Ichimura, On the divisibility problem of the class numbers of algebraic number fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 30 (1984), 579-585.

[2] C. Jensen, A. Ledet, N. Yui, Generic polynomials constructive spects of the inverse Galois problem, Cambridge University Press, (2003).

[3] Y. Kishi and K. Miyake, Parametrization of the quadratic fields whose class numbers are divisible by three, J. Number Theory 80 (2000), 209-217.

[4] P. Llorente and E. Nart, Effective determination of the decomposition of the rational primes in a cubic field, Proc. Amer. Math. Soc. 87(1983), 579-585.

[5] T. Nagell, Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1 (1922), 140-150.

[6] S. Nakano, On ideal class groups of algebraic number fields, J. reine angew. Math. 358(1985), 61-75.

[7] S. Nakano, 代数体の類数の可除性について, 第 3 回北陸数論研究集会報告集 (2004), 50-59.

[8] M. Sase, On a family of quadratic fields whose class numbers are divisible by five, Proc. Japan Acad. 74(1998), 120-123.

[9] P. J. Weinberger, Real quadratic fields with class numbers divisible by n, J. Number Theory 5 (1973), 237-241.

[10] Y. Yamamoto, On unramified Galois extensions of quadratic number fields, Osaka J. Math. 7(1970), 57-76.

On the Zeros of the k-th Derivative of the Riemann Zeta Function under the Riemann Hypothesis

Ade Irma Suriajaya（チャチャ）

名古屋大学多元数理科学研究科 M2

Abstract

The number of zeros and the distribution of the real part of non-real zeros of the derivatives of the Riemann zeta function have been investigated by Berndt, Levinson, Montgomery, and Akatsuka. Berndt, Levinson, and Montgomery investigated the general case, meanwhile Akatsuka gave sharper estimates for the first derivative of the Riemann zeta function under the truth of the Riemann hypothesis. In this talk, we shall introduce the generalization of the results of Akatsuka to the k-th derivative (for positive integer k) of the Riemann zeta function.

1 Introduction

To begin, we define the Riemann zeta function as follows.

Definition 1.1. For complex number s with $\mathrm{Re}(s) > 1$, the Riemann zeta function $\zeta(s)$ is defined to be

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

This function can be continued as meromorphic function on the whole complex plane with a simple pole at $s = 1$ as its only singularity. In this talk, we speak of $\zeta(s)$ as such a function.

The theory of the Riemann zeta function has been studied for over 150 years. Among the topics of research, the study of its zeros has been one of the main focus of research. In 1905, von Mangoldt showed that for large positive T,

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) \tag{1.1}$$

holds. Here $N(T)$ denotes the number of zeros of $\zeta(s)$, with $0 < \mathrm{Im}\,(s) \leq T$, counted with multiplicity, for any positive integer k.

Lately, the study of the zeros of its derivatives has also been part of the research area. In fact, in 1970, Berndt [B, Theorem] proved that

$$N_k(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{4\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) \tag{1.2}$$

where $N_k(T)$ denotes the number of zeros of the k-th derivative of the Riemann zeta function, we write as $\zeta^{(k)}(s)$, with $0 < \mathrm{Im}\,(s) \leq T$, counted with multiplicity, for any

メールアドレス：m12026a@math.nagoya-u.ac.jp

講演者は似鳥国際奨学財団に支援されている。

positive integer k. And in 1974, Levinson and Montgomery [LM, Theorem 10] showed that for any positive integer k,

$$\sum_{\substack{\rho^{(k)}=\beta^{(k)}+i\gamma^{(k)},\\ \zeta^{(k)}(\rho^{(k)})=0,\,0<\gamma^{(k)}\leq T}} \left(\beta^{(k)}-\frac{1}{2}\right) = \frac{kT}{2\pi}\log\log\frac{T}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\log 2 - k\log\log 2\right)T - k\mathrm{Li}\left(\frac{T}{2\pi}\right) + O(\log T) \tag{1.3}$$

where the sum is counted with multiplicity and

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

In contrast to this result, for $\zeta(s)$, we have the following equality.

$$\sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma,\,0<\gamma\leq T\\ \zeta(\rho)=0}} \left(\beta-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

In 2012, Akatsuka [A, Theorem 1 and Theorem 3] improved each of the error term of equations (1.2) and (1.3) for the case of $k=1$ under the assumption of the truth of the Riemann hypothesis. The Riemann hypothesis is one of the well-known unsolved problems in mathematics, which states that all the nontrivial zeros (non-real zeros) of $\zeta(s)$ must lie on the line $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$. Below are two main results shown by Akatsuka.

$$\sum_{\substack{\rho'=\beta'+i\gamma',\\ \zeta'(\rho')=0,\,0<\gamma'\leq T}} \left(\beta'-\frac{1}{2}\right) = \frac{T}{2\pi}\log\log\frac{T}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\log 2 - \log\log 2\right)T - \mathrm{Li}\left(\frac{T}{2\pi}\right) + O((\log\log T)^2)$$

and

$$N_1(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{4\pi} - \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{\log T}{(\log\log T)^{1/2}}\right)$$

if the Riemann hypothesis is true. In this talk, we shall introduce the generalizations of these two results of Akatsuka for any positive integer k.

Remark 1.1. For the case of $N(T)$ (eq. 1.4), Littlewood showed in 1924 that if the Riemann hypothesis is true, then

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right). \tag{1.4}$$

Before we introduce our results, we define some notations which are going to be used throughout this technical report. In this technical report, variable k is used as a positive integer. Next, we let $\rho^{(k)}=\beta^{(k)}+i\gamma^{(k)}$ represent the non-real zeros of the k-th derivative of the Riemann zeta function. Then, for $T>0$, we define $N_k(T)$ as follows.

$$N_k(T) := \sharp'\{\rho^{(k)}=\beta^{(k)}+i\gamma^{(k)} \,|\, 0<\gamma^{(k)}\leq T\}$$

where $\sharp'$ means the number of elements counted with multiplicity. Finally, we abbreviate the Riemann hypothesis as RH.

2 Main Results

Below we state our results, each of which is the generalization of Theorem 1, Corollary 2, and Theorem 3 of [A], respectively (cf. [S]).

Theorem 1. *Assume RH. Then for any $T > 4\pi$, we have*

$$\sum_{\substack{\rho^{(k)}=\beta^{(k)}+i\gamma^{(k)},\\ 0<\gamma^{(k)}\le T}} \left(\beta^{(k)}-\frac{1}{2}\right) = \frac{kT}{2\pi}\log\log\frac{T}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\log 2 - k\log\log 2\right)T - k\mathrm{Li}\left(\frac{T}{2\pi}\right) + O((\log\log T)^2).$$

Corollary 2. *(Cf. [LM, Theorem 3].) Assume RH. Then for $0 < U < T$ (where T is restricted to satisfy $T > 2\pi$), we have*

$$\sum_{\substack{\rho^{(k)}=\beta^{(k)}+i\gamma^{(k)},\\ T<\gamma^{(k)}\le T+U}} \left(\beta^{(k)}-\frac{1}{2}\right) = \frac{kU}{2\pi}\log\log\frac{T}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\log 2 - k\log\log 2\right)U + O\left(\frac{U^2}{T\log T}\right) + O((\log\log T)^2).$$

Theorem 3. *Assume RH. Then for $T \ge 2$, we have*

$$N_k(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{4\pi} - \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{\log T}{(\log\log T)^{1/2}}\right).$$

References

[A] H. Akatsuka, *Conditional estimates for error terms related to the distribution of zeros of $\zeta'(s)$*, J. Number Theory **132** (2012), 2242–2257.

[B] B. C. Berndt, *The number of zeros for $\zeta^{(k)}(s)$*, J. London Math. Soc. (2) **2** (1970), 577–580.

[LM] N. Levinson and H. L. Montgomery, *Zeros of the derivatives of the Riemann zeta-function*, Acta Math. **133** (1974), 49–65.

[S] A. I. Suriajaya, *On the Zeros of the k-th Derivative of the Riemann Zeta Function under the Riemann Hypothesis*, arxiv:1310.6489 [math.NT].

4 変数三次同次式の有理数解について

佐藤 一樹 *† （東北大学大学院理学研究科）

1 導入

$\mathbb{Q}$ 上の射影的代数多様体 X に対して, $X(\mathbb{Q})$ を $\mathbb{Q}$ 有理点全体の集合とする. ここでは, $X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ かどうか, すなわち, 与えられた有理数係数多項式系が有理数解を持つか, という Diophantus 問題を考えることにする. Diophantus 方程式の整数解や有理数解をすべて求めるに至らなくても, その存在を決定することですら非常に難しい問題であることは古くから知られている. 例えば, Hilbert が 1900 年に提出した 23 の問題のうちの第 10 問題「整数係数の多項式をインプットとし, それに整数解があるかどうかに応じて YES, NO をアウトプットするアルゴリズムは存在するか」は, Matiyasevich により否定的に解決された. 上の問題の有理数体版として考えられる「$\mathbb{Q}$ 上の代数多様体の $\mathbb{Q}$ 有理点の存在を判定するアルゴリズムはあるか」という問いは, 現在未解決である.

$X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ であるための明らかな必要条件は, 各素数 p に対して p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ 上に有理点を持ち, また実数体 $\mathbb{R}$ 上に有理点を持つことである. $\mathbb{Q}_p$ や $\mathbb{R}$ 上で有理点の存在を判定することは比較的難しくないことが知られている. 逆に, 局所条件が成り立つときに $\mathbb{Q}$ 有理点を見つけることを **Hasse 原理**とよぶ. より一般に, 代数体 k とそのすべての素点 v についての完備化 k_v を考えることで, Hasse 原理は k 上で定式化できる.

Minkowski により, 二次超曲面（すなわち, $\mathbb{Q}$ 上の二次形式）に対して Hasse 原理が成り立つことは古典的に知られていた. なお, この Minkowski の結果を $\mathbb{Q}$ 上ではなく一般の代数体上に拡張したのが Hasse である. しかし, 三次超曲面になると一般に Hasse 原理が成り立つことは期待できない. 例えば Selmer による反例

$$3X_1^3 + 4X_2^3 + 5X_3^3 = 0$$

がある. 一方, 肯定的な結果としては, X が非特異射影的三次超曲面で $\dim X \geq 7$ ならば Hasse 原理が成り立つことが Hooly [5] により証明されている. また Baker [1] は, X が対角的三次超曲面であるとき, すなわち, 定義方程式が $a_1X_1^3 + a_2X_2^3 + \cdots + a_nX_n^3 = 0$ であるとき, $\dim X \geq 5$ ならば $X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ であることを示した. さらに, Swinnerton-Dyer [6] による条件付きの結果もある. そこでは, 二次体上の楕円曲線の Tate-Shafarevich 群の有限性を仮定したとき, $\dim X \geq 3$ なる対角的三次超曲面に対して Hasse 原理が成り立つことが証明された. 一般に, $\dim X \geq 3$ なる非特異三次超曲面 X に対しては Hasse 原理が成り立つと予想されている.

本稿では 4 変数, すなわち $\dim X = 2$ となる対角的三次曲面 X を扱う. 対角的三次曲面に対しては一般に Hasse 原理は成り立たない. 最初に見つけられた反例は Cassels と Guy [3] によるもので, $5X_1^3 + 9X_2^3 + 10X_3^3 + 12X_4^3 = 0$ により定まる曲面である. その後, 多くの Hasse 原理の反例が発見された (cf. [4]). 現在で

* e-mail: sb0m17@math.tohoku.ac.jp
† 日本学術振興会特別研究員 DC2

は, それらの反例はすべて Brauer-Manin 障害を用いて説明される. 一方, Selmer [7] により, $\mathbb{Q}$ 上の三次曲面 $a_1X_1^3+a_2X_2^3+a_3X_3^3+a_4X_4^3=0$ に対して, 係数の順番を適当に入れ替えて, その比 a_1a_2/a_3a_4 が $(\mathbb{Q}^*)^3$ に属するならば Hasse 原理が成り立つことが示された. 本稿では, まず $\mathbb{Q}$ 有理点をもつための係数についてのある条件を与える. 次に, 係数に付随するある楕円曲線を考察する. 最後に, Brauer-Manin 障害との関連を簡単に述べる.

2 有理点存在のための条件

Swinnerton-Dyer により代数体上定義された対角的三次曲面が有理点を持つための十分条件が与えられている. それを $\mathbb{Q}$ 上に限って述べると次のようになる;

定理 1 ([6, Theorem 1])**.** X を

$$a_1X_1^3+a_2X_2^3+a_3X_3^3+a_4X_4^3=0 \quad (a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$$

で定義される $\mathbb{Q}$ 上の非特異三次曲面とし, 各素数 p に対して $X(\mathbb{Q}_p)\neq\emptyset$ であるとする. さらに, 二次体上定義された任意の楕円曲線の Tate-Shafarevich 群が有限であると仮定する. このとき, 次の主張のいずれかが成り立てば X は $\mathbb{Q}$ 有理点を持つ.

(1) 3 と異なる素数 p_1,p_2 で $p_1\mid a_1,p_2\mid a_2$ なるものが存在して, 各 $j\in\{1,2\}$ と残り 3 つの $i\in\{1,2,3,4\}\setminus\{j\}$ に対して $p_j\nmid a_i$ が成り立つ.
(2) 3 と異なる素数 p が存在して, p は係数のうちただ一つを割り, 例えばそれを a_1 とするとき, a_2,a_3,a_4 は $\mathbb{Q}_p^*/(\mathbb{Q}_p^*)^3$ における像がすべて等しくはない.
(3) 3 と異なる素数 p が存在して, p は係数のうちちょうど 2 つを割り, X は $\mathbb{Q}_p$ 上有理的ではない.

ここで, X が $\mathbb{Q}_p$ 上有理的であるとは, X が射影空間と $\mathbb{Q}_p$ 上双有理同値であることをいう. $X(\mathbb{Q}_p)\neq\emptyset$ である場合には, $\mathbb{Q}_p$ 上有理的であるための必要十分条件は, $a_1a_2/a_3a_4, a_1a_3/a_2a_4, a_1a_4/a_2a_3$ のいずれかが $(\mathbb{Q}_p^*)^3$ に属することであることが知られている.

これに対して, 本稿の主定理を述べる.

主定理 2. $p_1,p_2,p_3\equiv 2 \mod 3$ を素数とし, どの $i=1,2,3$ に対しても $p_i\equiv 8 \mod 9$ ではないとする. さらに, $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の Tate-Shafarevich 群が有限であると仮定する. このとき, $\mathbb{Q}$ 上の三次曲面

$$X: X_1^3+p_1p_2X_2^3+p_2p_3X_3^3+p_3p_1X_4^3=0$$

は $\mathbb{Q}$ 有理点をもつ.

主定理 2 の X はすべての i に対して $\mathbb{Q}_{p_i}$ 上有理的であり, $\mathbb{Q}_3$ 上有理的ではない. したがって定理 1 の仮定は満たしていないことに注意しておく. また, $p_1\equiv 8 \mod 9$ である場合を許してしまうと, 途端に有理点を持つとは限らなくなる. 実際, 次の三次曲面

$$X: X_1^3+2\cdot 5X_2^3+2\cdot 17X_3^3+5\cdot 17X_4^3=0$$

は Hasse 原理の反例を与えている.

次章では, 主定理 2 の仮定にある Tate-Shafarevich 群の有限性がどのように関係してくるかを説明する.

3 3-isogeny による descent

1 の原始 3 乗根 $\omega \in \bar{\mathbb{Q}}$ を一つ固定し, $k := \mathbb{Q}(\omega)$ とおく. cubic free な整数 $A \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ に対して, $E_A : X^3 + Y^3 = AZ^3$ を $O = (1, -1, 0)$ を原点とする楕円曲線とする. E_A は虚数乗法を持ち, 自己準同型環は $\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}}(E_A) \cong \mathbb{Z}[\omega]$ である. $\omega \in \mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}}(E_A)$ の作用を座標で書くと $(x, y, z) \mapsto (x, y, \omega z)$ となっている. したがって E_A 上の 3-isogeny $\rho := \omega - \omega^2$ は k 上定義され, ρ-torsion 元全体 $E_A[\rho]$ の $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/k)$ 加群としての構造は $E_A[\rho] = \{O, (\omega, -\omega^2, 0), (\omega^2, -\omega, 0)\} \cong \mu_3$ であることがわかる. ここで, μ_3 は $\bar{\mathbb{Q}}$ 内の 1 の 3 乗根全体である. このとき E_A の ρ-Selmer 群 $S^{(\rho)}(E_A/k)$ と Tate-Shafarevich 群 $Ш(E_A/k)$ は, Galois コホモロジーを用いてそれぞれ次のように定義される群であった;

$$S^{(\rho)}(E_A/k) := \ker[H^1(k, E_A[\rho]) \longrightarrow \prod_v H^1(k_v, E_A)],$$
$$Ш(E_A/k) := \ker[H^1(k, E_A) \longrightarrow \prod_v H^1(k_v, E_A)].$$

ここで, 積は k のすべての素点 v を走る. また, 次の短完全系列が存在する;

$$0 \longrightarrow E_A(k)/\rho E_A(k) \longrightarrow S^{(\rho)}(E_A/k) \xrightarrow{f} Ш(E_A/k)[\rho] \longrightarrow 0.$$

さて, 今の場合 $E_A[\rho] \cong \mu_3$ であるので, $H^1(k, E_A[\rho]) = k^*/(k^*)^3$ と同一視することにより ρ-Selmer 群 $S^{(\rho)}(E_A/k)$ と $\ker(f)$ は次のようにより具体的に記述される.

$$S^{(\rho)}(E_A/k) = \{\alpha(k^*)^3 \in k^*/(k^*)^3 \mid \forall v,\ C_{A,\alpha} : \alpha X^3 + \alpha^{-1} Y^3 = AZ^3 \text{ は } k_v \text{有理点を持つ } \},$$
$$\ker(f) = \{\alpha(k^*)^3 \in k^*/(k^*)^3 \mid C_{A,\alpha} : \alpha X^3 + \alpha^{-1} Y^3 = AZ^3 \text{ は } k \text{ 有理点を持つ } \}.$$

$(1, 0, 1) \in C_{A,A}(k)$ であるので $A(k^*)^3 \in \ker(f) \subset S^{(\rho)}(E_A/k)$ である. 具体的な A に対して ρ-Selmer 群 $S^{(\rho)}(E_A/k)$ を計算すると次のようになる.

補題 3. $(p_1, p_2, p_3) \equiv (2, 2, 5)$ または $(5, 5, 2) \mod 9$ を互いに相異なる有理素数とし, $A = p_1 p_2 p_3^2$ とおく. このとき $S^{(\rho)}(E_A/k) = \langle A, p_1 p_2^2 \rangle \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$.

補題 4. $(p_1, p_2, p_3) \equiv (2, 2, 2)$ または $(5, 5, 5) \mod 9$ を互いに相異なる有理素数とし, $A = p_1^2 p_2^2 p_3^2$ とおく. このとき $S^{(\rho)}(E_A/k) = \langle A, p_1 p_2^2 \rangle \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$.

ここで, $S^{(\rho)}(E_A/k)$ の位数が 9 であると仮定する. 上で見たように $A \in \ker(f)$ であるから, このとき $\ker(f)$ の位数は 3 または 9 である. したがって, $Ш(E_A/k)[\rho]$ の位数は 3 または 1 である. しかし, 以下で述べる命題 5 によって $Ш(E_A/k)[\rho]$ の位数は 1 でなければならない. ゆえに $\ker(f) = S^{(\rho)}(E_A/k)$ を得る. すると, 例えば補題 3 から三次曲線 $C_{p_1 p_2 p_3^2, p_1 p_2^2}$ は k 有理点を持つ. この曲線を変数変換すれば $p_2 p_3 X^3 + p_3 p_1 Y^3 = Z^3$ となる. したがって主定理 2 の三次曲面は k 有理点をもつことがわかり, したがって $\mathbb{Q}$ 有理点をもつ.

命題 5 ([2, Lemma 5]**).** $Ш(E_A/\mathbb{Q})$ が有限群であると仮定すると, $Ш(E_A/k)[\rho]$ の位数は 3 ではない.

$Ш(E_A/\mathbb{Q})$ 上には双線形交代形式が存在して, その核は最大可除部分群と一致することが Cassels により示されている. したがって, $Ш(E_A/\mathbb{Q})$ が有限群であると仮定するとその 3-torsion part $Ш(E_A/\mathbb{Q})[3]$ の位数は平方数でなければいけない. この事実を用いて命題は証明される.

4 Brauer-Manin 障害

スキーム X に対して, $\mathrm{Br}(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ を Brauer 群という. 本節では, Manin により発見された Hasse 原理の障害について説明する.

k を代数体とし, Ω を k の素点全体の集合とする. X を代数体 k 上の射影的代数多様体とし, $X(\mathbb{A}_k) := \prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ を X のアデール値点全体とする. このとき, ペアリング (Brauer-Manin ペアリングという)

$$X(\mathbb{A}_k) \times \mathrm{Br}(X) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が, $(P_v)_{v\in\Omega} \in X(\mathbb{A}_k)$ と $A \in \mathrm{Br}(X)$ に対して, (有限) 和 $\sum_{v\in\Omega} A(P_v)$ を対応させることで定義される. ここで, $A(P_v) \in \mathrm{Br}(k_v)$ は局所類体論によって $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の元と同一視している. $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ で, $\mathrm{Br}(X)$ のすべての元で零化されるような $X(\mathbb{A}_k)$ の元全体の集合をあらわすとする. このとき大域類体論の相互法則によって, $X(k)$ の $X(\mathbb{A}_k)$ への対角埋め込みの像は $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ に含まれることがわかる. 特に, もし $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} = \emptyset$ ならば $X(k) = \emptyset$ であるので, $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ は Hasse 原理の障害を与えている. $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$ ならば $X(k) \neq \emptyset$ が成り立つとき, **Brauer-Manin 障害は Hasse 原理の唯一の障害である**という.

$\mathbb{Q}$ 上の非特異三次曲面 S に対しては, 現在知られている Hasse 原理の反例はすべてこの Brauer-Manin 障害を用いて説明することができる. S に対して (より一般に, 代数体上の有理曲面に対して)Brauer-Manin 障害は Hasse 原理の唯一の障害であると予想されている. なお, Brauer-Manin 障害が Hasse 原理の唯一の障害でないような有理的でない曲面の例が知られている.

S を対角的三次曲面とする. 定理 1 または主定理 2 の係数の仮定があると, 3 またはいずれかの係数を割る素数 p が存在して, S は $\mathbb{Q}_p$ 上有理的ではない. そのような S に対しては $S(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$ となることが知られている ([4]). したがって, 上記の予想の証拠を (Tate-Shafarevich 群が有限という仮定の下で) 提出したことになる. 一方で, 3 または係数を割るようなすべての素数 p に対して S が $\mathbb{Q}_p$ 上有理的であるときには, 一般に $S(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$ とは限らない. このような S の有理点についてはほぼ何もわかっていない.

一般の次元では, X を非特異射影的代数多様体とするとき, X が rationally connected ならば Brauer-Manin 障害は Hasse 原理の唯一の障害であると予想されている. 例えば代数体上の三次超曲面 X で $\dim X \geq 2$ ならば X は Fano 多様体であるから, rationally connected である. 一方で, 三次超曲面 X で $\dim X \geq 3$ なるもに対しては $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}} = X(\mathbb{A}_k)$(より強く, 自然な写像 $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)$ が同型) であることが示されている. したがって, 予想が正しければ, そのような三次超曲面に対しては Hasse 原理が成り立つ.

参考文献

[1] R. C. Baker, *Diagonal cubic equations. II*, Acta Arith. **53** (1989), no. 3, 217–250.

[2] C. L. Basile and T. A. Fisher, *Diagonal cubic equations in four variables with prime coefficients*, Rational points on algebraic varieties, Progr. Math., vol. 199, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 1–12.

[3] J. W. S. Cassels and M. J. T. Guy, *On the Hasse principle for cubic surfaces*, Mathematika **13** (1966), 111–120.

[4] J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky, and J.-J. Sansuc, *Arithmétique des surfaces cubiques diagonales*, Diophantine approximation and transcendence theory (Bonn, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1290, Springer, Berlin, 1987, pp. 1–108 (French).

[5] C. Hooley, *On nonary cubic forms*, J. Reine Angew. Math. **386** (1988), 32–98.

[6] P. Swinnerton-Dyer, *The solubility of diagonal cubic surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **34** (2001), no. 6, 891–912 (English, with English and French summaries).

[7] E. S. Selmer, *Sufficient congruence conditions for the existence of rational points on certain cubic surfaces*, Math. Scand. **1** (1953), 113–119.

Character Variety の混合ホッジ構造について

光明 新

概 要

Character Variety とは Riemann 面の基本群の表現をパラメータ付けする affine 代数多様体である. この多様体は, ある generic な条件のもとで, 非特異であるが, コンパクトではない. Deligne の混合 Hodge 構造を考えると, 非自明な重みフィルターが現れることがわかる. この構造について様々な興味深い予想が存在する. その中でも混合 Hodge 多項式に関する予想を部分的に解決したので, そのことについて解説したい.

1 混合 Hodge 構造

複素代数多様体のコホモロジーの上の混合 Hodge 構造の存在は Deligne によって示された.

定理 1. ([5]) X は複素代数多様体とする. $j \in \mathbb{Z}$ に対して、重みフィルター

$$0 = W_{-1} \subseteq W_0 \subseteq \cdots \subseteq W_{2j} = H^j(X, \mathbb{Q})$$

と Hodge フィルター

$$H^j(X, \mathbb{C}) = F^0 \supseteq F^1 \supseteq \cdots \supseteq F^m \supseteq F^{m+1} = 0$$

があり, $F^\bullet$ により引き起こされる $Gr_l^W := W_l/W_{l-1}$ の複素化のフィルターは, Gr_l^W に重み l の pure な Hodge 構造を与える. つまり, 任意の $0 \leq p \leq l$ に対して,

$$Gr_l^{W^{\mathbb{C}}} = F^p Gr_l^{W^{\mathbb{C}}} \oplus \overline{F^{l-p+1} Gr_l^{W^{\mathbb{C}}}}$$

が成り立つ.

このレポートでは $H^*(X, \mathbb{Q})$ を $H^*(X)$ と表わすことにする. 相対コホモロジーの上の混合 Hodge 構造の構成を使えば、コンパクトな台をもつコホモロジー $H_c^*(X) := H_c^*(X, \mathbb{Q})$ の上に混合 Hodge 構造を入ることができる.

定義 2. コンパクトな台をもつ混合 Hodge 数を次で定義する.

$$h_c^{p,q;j}(X) := \dim_{\mathbb{C}}(Gr_p^F Gr_{p+q}^W H_c^j(X)^{\mathbb{C}}).$$

コンパクトな台をもつ混合 Hodge 多項式を次で定義する.

$$H_c(X; x, y, t) := \sum h_c^{p,q;j}(X) x^p y^q t^j.$$

また X の E-多項式を次で定義する.

$$E(X;x,y) := H_c(X;,x,y,-1).$$

$E(X;1,1)$ はコンパクトな台をもつ Euler 標数 $\Sigma_i(-1)^i \dim H^i_c(X,\mathbb{C})$ である.

E-多項式を, 数論幾何を使って計算できることがある.

定義 3. X は $\mathbb{C}$ 上の代数多様体, $\mathcal{X}$ を有限生成 $\mathbb{Z}$-代数 R 上の分離概型, $\varphi : R \hookrightarrow \mathbb{C}$ を R の埋め込みとする. $(\mathcal{X},\varphi)$ が X の *spreading out* であるとは、スカラーの拡大 $\mathcal{X}_\varphi \cong X$ をみたすことである. X が *polynomial count* であるとは、多項式 $P_X(t) \in \mathbb{Z}[t]$ と X の spreading out $(\mathcal{X},\varphi)$ があり、すべての準同型 $\phi : R \to \mathbb{F}_q$ に対して、$\mathcal{X}_\phi$ の $\mathbb{F}_q$-値点の数が

$$\sharp\mathcal{X}_\phi(\mathbb{F}_q) = P_X(q)$$

であることをいう. このとき, $P_X(t)$ を count 多項式と呼ぶ.

定理 4. ([9]) X は $\mathbb{C}$ 上の代数多様体とする. X は count 多項式が $P_X(t) \in \mathbb{Z}[t]$ である polynomial count であるとする. このとき, X の E-多項式は次で与えられる

$$E(X;x,y) = P_X(xy).$$

2 Hausel–Letellier–Rodriguez-Villegas 予想

まずは character variety の定義を説明する. C を種数 $g \geq 0$ の非特異複素射影曲線, $D = p_1 + \cdots + p_k$ を C 上因子とする. ただし $p_i \neq p_j$ $(i \neq j)$. 各 $p_1,\ldots,p_k$ に対応する基本群 $\pi_1(C \setminus D)$ の生成元を $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ とおく. 任意の $r \geq 1$ の分割 $\mu = (\mu^1,\ldots,\mu^l)$, つまり $\mu^1 + \cdots + \mu^l = r$, に対して, $\mathcal{C}_\mu \subset \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ を, 任意の $\mathcal{C}_\mu$ の中の行列の固有値が多重度 $\{\mu^1,\ldots,\mu^l\}$ をもつ, 半単純共役類とする. $\mathcal{C}_\mu$ の行列の固有値を $\lambda = (\lambda^1,\ldots,\lambda^l)$ と表わすことにする. ただし, 固有値 λ^i の多重度は μ^i であるとする.

定義 5. $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\ldots,\mu_k)$ を k 個の r の分割とし, 半単純共役類の組 $(\mathcal{C}_{\mu_1},\ldots,\mathcal{C}_{\mu_k})$ を固定する (各固有値を $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ と表わす).

$$\mathcal{U}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\mu}} := \left\{ (A_1,B_1,\ldots,A_g,B_g,X_1,\ldots,X_k) \;\middle|\; \prod_{i=1}^{g}[A_i,B_i]\prod_{j=1}^{k}X_j = I_n \right\}.$$

ただし, $(A_1,B_1,\ldots,A_g,B_g,X_1,\ldots,X_k) \in \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})^{2g} \times \prod_{j=1}^{k}\mathcal{C}_{\mu_j}$ とする. ここで character variety $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\mu}}$ を圏論的商 $\mathcal{U}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\mu}}//\mathrm{PGL}(r,\mathbb{C})$ で定義する, ただし, $\mathrm{PGL}(r,\mathbb{C})$ は次のように作用する.

$$g\cdot(A_1,\ldots,X_k) = (g^{-1}A_1g,\ldots,g^{-1}X_kg), \quad g \in \mathrm{PGL}(r,\mathbb{C}).$$

注意 6. $\mathcal{U}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\mu}}$ は次の集合と同一視することができる.

$$\{\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1(C\setminus D),\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})) \mid \rho(\gamma_i) \in \mathcal{C}_{\mu_i}\}.$$

また, 固有値 $\boldsymbol{\lambda}$ を generic に固定しておけば, $\mathcal{U}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\mu}}$ の任意の点に対応する $\pi_1(C\setminus D)$ の表現は既約となる.

定理 7. ([7], [8]) 固有値 $\boldsymbol{\lambda}$ を generic に固定すると, character variety $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\mu}}$ は, 空でないならば, 既約な非特異 affine 多様体であり, その次元は

$$d_{\boldsymbol{\mu}} := n^2(2g-2+k) - \sum_{i,j}(\mu^i_j)^2 + 2$$

となる.

これより character variety に対する, コンパクトな台をもつ混合 Hodge 多項式についての予想である, Hausel–Letellier–Rodriguez-Villegas 予想 ([7]) の説明を行う. n 個の集合

$$\mathbf{x}_1 = \{x_{1,1}, x_{1,2}, \cdots\}, \cdots, \mathbf{x}_n = \{x_{n,1}, x_{n,2}, \cdots\}$$

を無限個の独立変数の集合とする. $\Lambda(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)$ をそれぞれの変数の集合ごとに対称多項式となる関数の環であるとする. 混乱の恐れがなければ Λ と省略する. すべての分割の集合を $\mathcal{P}$ とおき, $\lambda \in \mathcal{P}$ に対して, $\tilde{H}_\lambda(\mathbf{x}_i; q, t) \in \Lambda(\mathbf{x}_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}(q,t),\ 1 \le i \le n$ を Macdonald 対称多項式 ([6] の I.11 節) とする.

定義 8. n 点, 種数 g の Cauchy 関数とは

$$\Omega(z,w) := \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathcal{H}_\lambda(z,w) \prod_{i=1}^{n} \tilde{H}_\lambda(\mathbf{x}_i; z^2, w^2).$$

ただし,

$$\mathcal{H}_\lambda(z,w) := \prod \frac{(z^{2a+1} - w^{2l+1})^{2g}}{(z^{2a+2} - w^{2l})(z^{2a} - w^{2l+2})}.$$

この積は分割の箱を走り, 箱に対して a は腕の長さ, l は足の長さである.

定義 9. $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathcal{P}^n$ に対して,

$$\mathbb{H}_{\boldsymbol{\mu}}(z,w) := (z^2-1)(1-w^2)\langle \mathrm{Log}\Omega(z,w), h_{\boldsymbol{\mu}} \rangle.$$

ここで, $h_{\boldsymbol{\mu}} := h_{\mu_1}(\mathbf{x}_1) \cdots h_{\mu_n}(\mathbf{x}_n) \in \Lambda$ は完全対称関数, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は Λ に拡張された Hall paring([7] の 2.3.2 節) である. また Log は plethystic exponential ([9] の 2.5 節) の逆写像である.

予想 10. (Hausel–Letellier–Rodriguez-Villegas 予想 [7])

1. 有理関数 $\mathbb{H}_{\boldsymbol{\mu}}(z,w)$ は多項式である. それぞれの変数について, 次数 $d_{\boldsymbol{\mu}}$ を持つ. また $\mathbb{H}_{\boldsymbol{\mu}}(-z,w)$ は非負整数の係数をもつ.
2. コンパクトな台をもつ混合 Hodge 多項式 $H_c(\mathcal{M}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\mu}}; x, y, t)$ は xy と t の多項式である. また多重度 $\boldsymbol{\mu}$ の generic な固有値の選び方によらない.
3. $$H_c(\mathcal{M}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\mu}}; q, t) = (t\sqrt{q})^{d_\mu} \mathbb{H}_{\boldsymbol{\mu}}(-\frac{1}{\sqrt{q}}, t\sqrt{q}), \quad (q := xy).$$

E-多項式 (つまり, $H_c(\mathcal{M}^{\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{\mu}}; x, y, t)$ に $t = -1$ を代入したもの) に関しては次が成り立つ.

定理 11. ([7]) $\mathcal{M}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\lambda}}$ は polynomial count である．そして E-多項式は xy の多項式であり，$q = xy$ とおくと，

$$E(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\lambda}}; q) = q^{(\frac{1}{2})d_{\boldsymbol{\mu}}} \mathbb{H}_{\boldsymbol{\mu}}(\sqrt{q}, \frac{1}{\sqrt{q}})$$

で与えられる．

次が今回の我々の結果である．

定理 12. 予想10の2は正しい．つまり，コンパクトな台をもつ混合Hodge多項式 $H_c(\mathcal{M}_{\boldsymbol{\mu}}^{\boldsymbol{\lambda}}; x, y, t)$ は xy と t の多項式である．また多重度 $\boldsymbol{\mu}$ の generic な固有値の選び方によらない．

証明の方針は，前半について，character variety は複素群に関する quasi-Hamiltonian space ([1], [2]) と考えることができる．そこで，コンパクト群に関する quasi-Hamiltonian space のコホモロジー環の生成元を与える結果 [3] が複素群に対しても成り立つ事を示す．これにより character variety の生成元を与えることができ，その重みを調べればよい．後半は，character variety は Riemann–Hilbert 対応により接続のモジュライ空間と解析的に同型であることが知られている ([10])．この接続のモジュライ空間において，そのコホモロジーは固有値によらないことは，比較的容易に証明できる．これにより，character variety のコホモロジーは固有値によらないことが分かる．混合 Hodge 数が固有値によらないことを示すために，character variety の固有値に関する族を考える．Character variety のコホモロジーの元が族のコホモロジーまで持ち上がることを示せばよい．

参考文献

[1] A. Alekseev, A. Malkin, E. Meinrenken, *Lie group valued moment maps*. J. Differential Geom. **48** (1998), no. 3, 445–495.

[2] P. Boalch, *Quasi-Hamiltonian geometry of meromorphic connections*. Duke Math. J. **139** (2007), no. 2, 369–405.

[3] R. Bott, S. Tolman, J. Weitsman, *Surjectivity for Hamiltonian loop group spaces*. Invent. Math. **155** (2004), no. 2, 225–251.

[4] P. Deligne, *Theorie de Hodge. II*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **40** (1971), 5–57.

[5] P. Deligne, *Theorie de Hodge. III*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **44** (1974), 5–77.

[6] A. M. Garsia, M. Haiman, *A remarkable q,t-Catalan sequence and q-Lagrange inversion*. J. Algebraic Combin. **5** (1996), no. 3, 191–244.

[7] T. Hausel, E. Letellier, F. Rodriguez-Villegas, *Arithmetic harmonic analysis on character and quiver varieties*, Duke Math. Journal, vol. **160** (2011) 323–400.

[8] T. Hausel, E. Letellier, F. Rodriguez-Villegas, *Arithmetic harmonic analysis on character and quiver varieties II*, Adv. Math. **234** (2013), 85–128.

[9] T. Hausel, F. Rodriguez-Villegas, *Mixed Hodge polynomials of character varieties*, with an appendix by N. M. Katz, Invent. Math. **174** (2008), 555–624.

[10] M. Inaba, K. Iwasaki, M. -H. Saito, *Moduli of stable parabolic connections, Riemann- Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. I* , Publ. Res. Inst. Math. Sci. (2006), no. 4, 987-1089.

ポスターセッション
会場E

遷移線形化の手法を用いた非線形応答理論

∘小川駿,　山口義幸
京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

1　平均場ダイナミクスと Vlasov 方程式

本ポスター発表では以下の様な全結合型ハミルトン力学系を用いる:

$$H_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N}\sum_{i\neq j}^{N} V(q_i - q_j) + \sum_{i=1}^{N} U(q_i), \quad q_i \in [-\pi,\pi),\ p_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,\cdots,N. \tag{1}$$

ただし, 空間成分 q_i については周期境界条件を課す. 相互作用ポテンシャル V とオンサイトポテンシャル U は各々滑らかな偶関数であるとする. 粒子数 N が大きい極限で, この系のダイナミクスは一体分布関数 $f(q,p,t)$ で記述され, この一体分布関数は Vlasov 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{\mathscr{H}[f], f\} = 0, \tag{2}$$

に従って時間発展する [1]. ただし, 有効ハミルトニアン $\mathscr{H}[f]$ は

$$\mathscr{H}[f] = \frac{p^2}{2} + \mathscr{V}[f](q,t) + U(q), \quad \mathscr{V}[f] = \int_{-\pi}^{\pi} dq' \int_{-\infty}^{\infty} V(q-q') f(q',p',t)\, dp' + U(q), \tag{3}$$

で定義され, $\{a,b\}$ は Poisson 括弧であり, ここでは

$$\{a,b\} \equiv \frac{\partial a}{\partial p}\frac{\partial b}{\partial q} - \frac{\partial a}{\partial q}\frac{\partial b}{\partial p} \tag{4}$$

で定義されている. ここで行ったことは平均場近似であり, N 個の粒子が互いに相互作用している系を, 1 個の粒子が, その他 $N-1$ 個の粒子が作り出す平均場の中を運動していると見なしている.

今回は系 (1) に対して, 次で紹介する遷移 (T-) 線形化の手法を用い, 外場に対する非線形応答や Vlasov 方程式の定常解周りの摂動の非線形ダイナミクを調べる. 初期の定常状態は安定でなくても良い.

2　遷移線形化

ここでは, 定常状態 f_{I} に摂動 $\epsilon\tilde{g}$ が加わった初期状態 $f_0(q,p) \equiv f(q,p,0) = f_{\mathrm{I}}(q,p) + \epsilon\tilde{g}(q,p)$ からスタートした場合の摂動の漸近的な振る舞いを調べるために T-線形化を導入する. ここでは, オンサイトポテンシャル $U=0$ であり, f_{I} と $\tilde{g}$ は p については偶関数で滑らかであるとする. T-線形化とは系の時間漸近的な振る舞いに関する情報を含んだ “線形化” であり, 1 次元プラズマ系の非線形 Landau 減衰の解析的な研究手法として提案された [2]. 通常の線形化では Vlasov 方程式の解 f を安定定常解 f_{I} と摂動 ϵf_1 に分解し, 摂動が十分小さいとして, ϵ^2 以上の項を落とす. 一方, 遷移線形化では解 f を長時間後残る項 f_{A} と短時間で減衰する項 ϵf_{T} ($\lim_{t\to\infty} f_{\mathrm{T}}(q,p,t) = 0$) に分解し, 次の様に表す:

$$f(q,p,t) = f_{\mathrm{A}}(q,p) + \epsilon f_{\mathrm{T}}(q,p,t). \tag{5}$$

この分解は具体的には Bohr 変換

$$\mathscr{B}_\omega[a] \equiv \lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma a(t) e^{-i\omega t}\, dt, \tag{6}$$

で f_{A} を抽出することによって行う [2]. 本研究では最終的な解 f_{A} は定常であるとするので $\omega = 0$ とする. つまり, $f_{\mathrm{A}}(q,p) = \mathscr{B}_0\left[f\right]$ である. さらに平均場 $\mathscr{V}[f]$ の漸近成分 (A-場) $\mathscr{V}_{\mathrm{A}}$ は $\mathscr{V}_{\mathrm{A}}(q) = \mathscr{B}_0\left[\mathscr{V}\left[f\right]\right] = \mathscr{V}\left[f_{\mathrm{A}}\right]$ で表される. 遷移成分 (T-場) $\epsilon\mathscr{V}_{\mathrm{T}}(q,t)$ を用いると平均場 $\mathscr{V}[f]$ は

$$\mathscr{V}[f](q,t) = \mathscr{V}_{\mathrm{A}}(q) + \epsilon\mathscr{V}_{\mathrm{T}}(q,t) \tag{7}$$

に分解できる (AT-field 分解). ここで長時間後の有効ハミルトニアンを次の様に表しておく:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{A}}(q,p) = p^2/2 + \mathscr{V}_{\mathrm{A}}(q). \tag{8}$$

式 (5) と (7), (8) を Vlasov 方程式 (2) に代入し, $O\left(\epsilon^2\right)$ の項を無視すると T-線形化された Vlasov 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left\{\mathscr{H}_{\mathrm{A}}, f\right\} + \epsilon\left\{\mathscr{V}_{\mathrm{T}}, f_0\right\} = 0 \tag{9}$$

を得る. この方程式は T-“線形” 化された方程式であるが, 通常の線形化と異なり, $\left\{\mathscr{H}_{\mathrm{A}}, f\right\}$ の部分に非線形性が残っている. 作用素 $\mathscr{L}_{\mathrm{A}}$ を $\mathscr{L}_{\mathrm{A}}[f] \equiv -\{\mathscr{H}_{\mathrm{A}}, f\}$ で定義すると, T-線形化された Vlasov 方程式は形式的に以下の様に解ける:

$$f(q,p,t) = e^{-t\mathscr{L}_{\mathrm{A}}} f_0(q,p) - \epsilon\int_0^t e^{-(t-s)\mathscr{L}_{\mathrm{A}}}\left(\left\{\mathscr{V}_{\mathrm{T}}(q,s), f_0\right\}\right)\, ds \tag{10}$$

ここで $\phi_{\mathrm{A}}^t(q,p)$ を ハミルトニアン $\mathscr{H}_{\mathrm{A}}(q,p)$ に関する運動方程式の時刻 $t=0$ における初期値 (q,p) の解であるとする. 式 (10) の第一項は $f_0\left(\phi_{\mathrm{A}}^{-t}(q,p)\right)$ となるので,

$$f_{\mathrm{ON}}(q,p,t) = f_0\left(\phi_{\mathrm{A}}^{-t}(q,p)\right), \quad f_{\mathrm{L}}(q,p,t) = -\int_0^t \left[\mathscr{T}(s)\frac{\partial f_0}{\partial q}\right]_{\phi_{\mathrm{A}}^{-(t-s)}(q,p)} ds, \quad \mathscr{T}(q,t) \equiv -\frac{\partial \mathscr{V}_{\mathrm{T}}}{\partial q}(q,t) \tag{11}$$

とすると, $f(q,p,t) = f_{\mathrm{ON}}(q,p,t) + \epsilon f_{\mathrm{L}}(q,p,t)$ と表せる. ただし f_{ON} は O’ Neil 項, ϵf_{L} は Landau 項と呼ばれる [2].

ここで式 (11) に着目すると, T-線形化 Vlasov 方程式 (9) の解 f の中に現れる時間発展は有効ハミルトニアン $\mathscr{H}_{\mathrm{A}}(q,p)$ によるものであるが, まだ A-場 $\mathscr{V}_{\mathrm{A}}(q)$ が求められていない. そこで, $\mathscr{V}_{\mathrm{A}}(q)$ を自己無撞着に求める.

まず, 有効ハミルトニアン $\mathscr{H}_{\mathrm{A}}$ は完全可積分なので作用角変数 (θ, J) を導入することができる. $q = Q(\theta,J)$, $p = P(\theta,J)$ で関係付けられているとする. 作用変数 J はハミルトニアン $\mathscr{H}_{\mathrm{A}}$ の運動の積分である. 自己無撞着方程式の導出は f_{A} の定義である, $\mathscr{B}_0[f]$ にある長時間平均を空間平均で置き換えることによって可能になる.

Prop. 1 **（エルゴード公式 [2])** 任意の積分可能な関数 $\psi(q,p)$ とほとんど全ての J について次の等式が成立する:

$$\mathscr{B}_0\left[\psi\left(\phi_{\mathrm{A}}^{-t}(q,p)\right)\right] = \lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma \psi\left(\phi_{\mathrm{A}}^{-t}(q,p)\right)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi\left(Q(\theta,J),P(\theta,J)\right)\, d\theta \equiv \langle\psi\rangle_J. \tag{12}$$

これを用いると, 解の A-成分 f_{A} をシンプルな形 $\langle f_0\rangle_J$ で表せ, A-場を求める自己無撞着方程式が

$$\mathscr{V}_{\mathrm{A}}(q) = \mathscr{V}\left[\langle f_0\rangle_J\right] = \iint V(q-q')\langle f_0\rangle_J\, dqdp \tag{13}$$

で表せることを示す. まず f_{A} を次の様に分解する:

$$f_{\mathrm{A}}(q,p) = \mathscr{B}_0\left[f_{\mathrm{ON}}(q,p,t)\right] + \epsilon\mathscr{B}_0\left[f_{\mathrm{L}}(q,p,t)\right]. \tag{14}$$

この右辺第一項は式 (11) と (12) より,

$$\mathscr{B}_0\left[f_{\mathrm{ON}}(q,p,t)\right] = \mathscr{B}_0\left[f_0\left(\phi_{\mathrm{A}}^{-t}(q,p)\right)\right] = \langle f_0\rangle_J. \tag{15}$$

一方, 右辺第二項 $\mathscr{B}_0\left[f_{\mathrm{L}}(q,p,t)\right]$ は

$$\mathscr{B}_0\left[f_{\mathrm{L}}(q,p,t)\right] = -\lim_{\sigma\to\infty}\int_0^\sigma dt\int_0^t\left[\mathscr{T}(s)\frac{\partial f_0}{\partial p}\right]_{\phi_{\mathrm{A}}^{-(t-s)}(q,p)} ds \tag{16}$$

である. ここで $u = t-s$ として積分変数 t,s を u,s に変換すると, Landau 項由来の漸近成分はエルゴード公式 (12) を用いて次のように書き換えられる:

$$\mathscr{B}_0\left[f_{\mathrm{L}}(q,p,t)\right] = \lim_{\sigma\to\infty} -\int_0^\sigma ds\frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma\left[\mathscr{T}(s)\frac{\partial f_0}{\partial p}\right]_{\phi_{\mathrm{A}}^{-u}(q,p)} du = -\int_0^\infty\left\langle\mathscr{T}(s)\frac{\partial f_0}{\partial p}\right\rangle_J ds. \tag{17}$$

ここで f_0 は p について偶であったことと等 J 線は変換 $p\mapsto -p$ に関して不変であったことを思い出すと, $\mathscr{B}_0\left[f_{\mathrm{L}}(q,p,t)\right] = 0$ であり, 結局, $f_{\mathrm{A}}(q,p) = \langle f_0\rangle_J(q,p)$ であることが示され, 自己無撞着方程式 (13) を得た.

今, 空間成分 q については周期境界条件を仮定しているので, $V, \mathcal{V}_{\mathrm{A}}$ は Fourier 級数展開できる:

$$V(q) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{V}_k e^{ikq}, \quad \mathcal{V}_{\mathrm{A}}(q) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{V}_{\mathrm{A}}}_k e^{ikq}. \tag{18}$$

これを自己無撞着方程式 (13) 代入すると, 各成分について

$$\widehat{\mathcal{V}_{\mathrm{A}}}_k = \widehat{V}_k \iint e^{-ikq}\langle f_0\rangle_J \, dqdp = \widehat{V}_k \iint \left\langle e^{-ikQ}\right\rangle_J f_0(q,p)\, dqdp \tag{19}$$

を得る. 二つ目の等号を示す際には次の事実を用いた.

Prop. 2　等 J 線の長さが有限であり, 関数 $a(q,p), b(q,p)$ について $a\langle b\rangle_J$ と $\langle a\rangle_J b$ が可積分ならば, 次の等式が成立する:

$$\iint a(q,p)\langle b\rangle_J(q,p)\, dqdp = \iint \langle a\rangle_J(q,p) b(q,p)\, dqdp. \tag{20}$$

これは変数変換 $(q,p)\mapsto(\theta,J)$ が正準変換であることを用いれば簡単に証明される.

■ハミルトニアン平均場モデル　系 (1) において相互作用ポテンシャル $V(q) = -\cos q$, 外場 $h(t)$ との相互作用を $U(q,t) = -h(t)\cos q$ としたものをハミルトニアン平均場 (HMF) モデルと言い, 長距離相互作用系の研究において有用なトイモデルとして用いられている. ここでも HMF モデルを用いて, 具体的に秩序変数 $M[f] = \iint \cos q f(q,p,t)\, dqdp$ の応答などを求めてみる. HMF モデルは N 粒子が円周上を cos ポテンシャルで引力相互作用しながら動き回る系であり, この秩序変数は粒子が円周上でどの程度集まっているのかを表す. 漸近的な有効ハミルトニアンは $\mathcal{H}_{\mathrm{A}}(q,p) = p^2/2 - (M_A + h)\cos q$ であるとする. ただし, $h = \lim_{t\to\infty} h(t)$ である. この秩序変数に関する自己無撞着方程式は以下の通りである:

$$M_{\mathrm{A}} = \iint \cos q\langle f_0\rangle_J(q,p)\, dqdp = \iint \langle\cos Q\rangle_J f_0(q,p)\, dqdp. \tag{21}$$

これは, ある非定常解から, どのような定常解に落ち着くのかを予想する際に一粒子あたりのエネルギーが保存されるとした場合 [3] と一致しており, その理論的な導出になっている.

3　非線形応答

まず, 初期状態は $f_0(q,p) = f_{\mathrm{I}}(p) + \epsilon g(p)\cos q$ であるとする. ここでは自己無撞着方程式 (21) を M_{A} が十分小さいとして展開し, 外場無しの場合の摂動の漸近的な振る舞い $(\epsilon > 0, h = 0)$ と外場に対する非線形応答 $(\epsilon = 0, h > 0)$ を求める. まず, 各々の場合の自己無撞着方程式は次の通りである:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Case1}: \epsilon > 0, h = 0, \quad DM_{\mathrm{A}} + L_{1/2,1}M_{\mathrm{A}}^{1/2}\epsilon + L_{3/2,0}M_{\mathrm{A}}^{3/2} + L_{3/2,1}M_{\mathrm{A}}^{3/2}\epsilon = O\left(M^{7/4}\right) \\ &\mathrm{Case2}: \epsilon = 0, h > 0, \quad D(M_{\mathrm{A}} + h) - h + L_{3/2,0}(M_{\mathrm{A}} + h)^{3/2} = O\left((M_{\mathrm{A}} + h)^{7/4}\right), \end{aligned} \tag{22}$$

ただし, 各々の係数は次の様に表される: (積分から M_{A} 依存性を排除するために $\sqrt{M_{\mathrm{A}}}$ で割っている. case 2 の $L_{3/2,0}$ については $\sqrt{M_{\mathrm{A}} + h}$ に置き換える.)

$$\begin{aligned} &D = 1 + \pi\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\mathrm{I}}'(p)}{p}\, dp, \quad L_{1/2,1} = \frac{g(0)}{\sqrt{M_{\mathrm{A}}}} \iint \langle\cos Q\rangle_J^2\, dqdp, \quad L_{3/2,0} = \frac{f_{\mathrm{I}}''(0)}{\sqrt{M_{\mathrm{A}}}} \iint \langle\cos Q\rangle_J^2\, dqdp \\ &L_{3/2,1} = \frac{g''(0)}{\sqrt{M_{\mathrm{A}}}} \iint \langle\cos Q\rangle_J \left[\left(2k^2 - 1 + \cos q\right)\langle\cos Q\rangle_J - \frac{1}{4}\right] dqdp. \end{aligned} \tag{23}$$

本レポートでは Case 2 について解説する. まず, 初期状態 $f_{\mathrm{I}}(p)$ が Vlasov 方程式の安定定常解であり, M, h が両方とも十分小さい場合, $(M+h)^{3/2}$ も高次項として無視すると,

$$D(M_{\mathrm{A}} + h) - h = O\left((M_{\mathrm{A}} + h)^{3/2}\right) \Rightarrow M = \chi_{\mathrm{I}} h + O\left(h^{3/2}\right),\ \chi_{\mathrm{I}} = \frac{1-D}{D} \tag{24}$$

となり線形応答理論 [4, 5] の結果を再現する. χ_{I} を孤立感受率と呼ぶ. ただし, ナイーブな摂動論を用いて次のオーダーを求めた場合, $M = \chi_{\mathrm{I}} h + O\left(h^3\right)$ になり, 本研究で得られた非線形応答 (24) と異なる結果を得る.

HMF 系は熱平衡状態において高温側 $T > T_{\mathrm{c}}$ では無秩序状態 $M = 0$ であり, 臨界温度 $T = T_{\mathrm{c}} = 1/2$ で二次相転移が起こり, $T < T_{\mathrm{c}}$ では秩序状態 $M > 0$ が実現される. 臨界点 $f_{\mathrm{c}}(p) = e^{-p^2/2T_{\mathrm{c}}}/\sqrt{(2\pi)^3 T_{\mathrm{c}}}$ の場合について考察する. 臨界温度

$T = T_c$ では $D = 0$ であるので, Case 2 の自己無撞着方程式は $-h + L_{3/2,0}(M_A + h)^{3/2} = O\left((M_A + h)^{7/4}\right)$ となり, これを解くと $M_A = h^{2/3}/(L_{3/2,0}^{2/3}) + O\left(h^{5/6}\right)$ を得る. 臨界点におけるスケーリング $M \propto h^{1/\delta}$ に対して, 臨界指数 $\delta_{iso} = 3/2$ であることが分かる. 平衡統計力学で得られる臨界指数は $\delta_{eq} = 3$ である. 実は秩序相における等温感受率 χ_T の臨界指数 γ_- は, $\gamma_-^{eq} = 1$ であるが, 孤立感受率 χ_I の臨界指数は, $\gamma_-^{iso} = 1/4$ [6] なので, これらの結果と $\beta = 1/2$ を合わせると, 臨界指数の値は異なるが, 平衡統計力学から得られるスケーリング関係式 [7] $\gamma_- = \beta(\delta - 1)$ が孤立系でも成立していることが分かる. ここで, 臨界指数 β, γ_- は各々

$$\begin{aligned} M &\sim |T - T_c|^{\beta}, \quad T < T_c, \\ \chi &\sim |T - T_c|^{-\gamma_-}, \quad T < T_c \end{aligned} \tag{25}$$

で定義される. 孤立系の臨界現象に普遍性があるのかについては今後の課題である.

参考文献

[1] W. Braun and K. Hepp, *The Vlasov dynamics and its fluctuations in the* $1/N$ *limit of interacting classical particles*, Commun. Math. Phys. **56**, 101 (1977).

[2] C. Lancellotti and J. J. Dorning, *Critical Initial States in Collisionless Plasmas*, Phys. Rev. Lett. **81**, 5137 (1998); *Nonlinear Landau damping*, Trans. Th. Stat. Phys. **38**, 1 (2009).

[3] P. de Buyl, D. Mukamel, and S. Ruffo, *Self-consistent inhomogeneous steady states in Hamiltonian mean field dynamics*, Phys. Rev. E **84**, 061151 (2011).

[4] A. Patelli, S. Gupta, C. Nardini, and S. Ruffo, *Linear response theory for long-range interacting systems in quasistationary states*, Phys. Rev. E **85**, 021133 (2012).

[5] S. Ogawa and Y. Y. Yamaguchi, *Linear response theory in the Vlasov equation for homogeneous and for inhomogeneous quasistationary states*, Phys. Rev. E **85**, 061115 (2012).

[6] S. Ogawa, A. Patelli, and Y. Y. Yamaguchi, *Non-mean-field critical exponent in a mean field model: Dynamics versus statistical mechanics*, arXiv:1304.2982.

[7] H. Nishimori and G. Ortiz, *Elements of phase transitions and critical phenomena* (Oxford university press, 2011).

非線形波動理論に基づく気泡流中の音響波の系統的理解

東京大学大学院工学系研究科　金川 哲也　(KANAGAWA Tetsuya)
Department of Mechanical Engineering, The University of Tokyo

要旨

非線形音源である気泡から周囲液体へと放射される音は, 波の分散性や散逸性などの諸性質を招き, 波の非線形性とバランスする. このような気泡流中の非線形音響波の数理が対象である. 弱非線形すなわち有限小振幅の制約を課して, 多重尺度法と呼ばれる特異摂動法を起点に, 非線形・分散・散逸などの波の多様な性質の多様な競合を, 統一的かつ系統的に取り扱う手法を提案する. これを気泡流の平均化方程式系に適用して, K–dV 方程式や非線形 Schrödinger 方程式など, 分散性波動理論で著名な非線形発展方程式群の導出を実証する.

1　はじめに

気泡を含む液体中においては, 単相媒質中に比べ, 音響波 (圧力変動) のふるまいが著しく異なる. その特徴のひとつに, 気泡振動によって誘起される波の分散性が挙げられる. 弱非線形 (有限小振幅) のレジームにおいては, van Wijngaarden による Korteweg–de Vries (KdV) 方程式の導出 [1] を皮切りに, 多数の非線形波動方程式が導かれてきた (書籍 [2, 3] に詳しい). しかしながら, 気泡液体という気液混相媒質においては, 単相媒質に比べ, 音場を特徴づけるスケールとして, たとえば長さのスケールでいえば, 気泡の大きさ, 気泡間距離, 波の波長などと多岐にわたることから, そのモデリングの困難さは, 容易に想像がつくところであろう.

本稿では, 特異摂動法の一種の多重尺度法 [4, 5] を基礎として, 気泡流中の平面進行波の弱非線形伝播を記述する, 非線形波動方程式の系統的かつ統一的な導出方法を提示する. 非線形波動論 [5], とくに弱非線形伝播において, 波の分散性と波の非線形性が競合する遠方場における孤立波の形成 (KdV 方程式) や, 散逸性と非線形性のバランスが招く衝撃波の形成 (Burgers 方程式) は, 重要事項である. したがって, 波の多様な性質のバランス, その結果としての多様な弱非線形伝播のモデリングにおいて, 非線形性に対する分散性と散逸性などの相対的な大きさを特徴付ける操作に, 気泡流中の音響波の系統的理解を築くための本質が存在するといえる.

波の非線形性の大きさを表す無次元 (有限小) 振幅 $\epsilon\,(\ll 1)$ を, 摂動として導入する. これを用いて, 気泡流中の音響波を特徴付ける 3 つの無次元数を定義する:

$$\left(\frac{U^*}{c_{L0}^*}, \frac{R_0^*}{L^*}, \frac{\omega^*}{\omega_B^*}\right). \tag{1}$$

ここに, U^*, L^*, ω^* はそれぞれ波の代表的な伝播速度 (位相速度や群速度), 波長, 周波数, c_{L0}^* は初期液単相音速, R_0^* は初期気泡半径, ω_B^* は単一気泡の固有角振動数である (アステリスク $*$ は有次元量). この大きさを,

$$\left(\frac{U^*}{c_{L0}^*}, \frac{R_0^*}{L^*}, \frac{\omega^*}{\omega_B^*}\right) \equiv (O(A), O(B), O(C)), \tag{2}$$

と選ぶのではなくて, 振幅 (非線形性の大きさ) ϵ を用いて,

$$\left(\frac{U^*}{c_{L0}^*}, \frac{R_0^*}{L^*}, \frac{\omega^*}{\omega_B^*}\right) \equiv (O(\epsilon^a), O(\epsilon^b), O(\epsilon^c)), \tag{3}$$

のように, ϵ のべきとして定義することで, 波の諸性質の大きさを, 非線形性の大きさに対する相対値として, 系統的に指定することが可能となる. 定数 a, b, c は, 眺めている波動の数学的表現として, 一意に決まるものである.

式 (3) 左辺の無次元比のうち, 第 1 項と第 2 項は, 波の散逸性の大きさ (音響放射減衰による), 波の分散性の大きさを, それぞれあらわす. 式 (3) 右辺に着目すると, これは, 散逸性および分散性の, 非線形性に対する相対的大きさを規定する操作に他ならず, 気泡流中の多様な弱非線形波動のうち, 特定の波だけを抽出するためのスケーリングである. すなわち, 波の位相速度が液単相音速にくらべて $O(\epsilon^a)$ だけ小さく, 波長が気泡径にくらべて $O(\epsilon^b)$ だけ大きく, さらに, 入射波の振動数が気泡の固有振動数にくらべて $O(\epsilon^c)$ だけ小さい.

気泡流の基礎方程式系 (平均化方程式系) に対する漸近解析を行い, 基礎方程式系から, 2 種類の非線形波動方程式として, 図 1 に示すように, 低周波数かつ長波のバンドに対する KdV–Burgers (KdVB) 方程式, 比較的高周波数かつ短波のバンドに対する非線形 Schrödinger (NLS) 方程式をそれぞれ導く.

2　問題設定および基礎方程式

多数の微細気泡を一様に含む静止液体中における, 有限小振幅の平面 (1 次元) 進行波を扱う. 本稿では, 従来

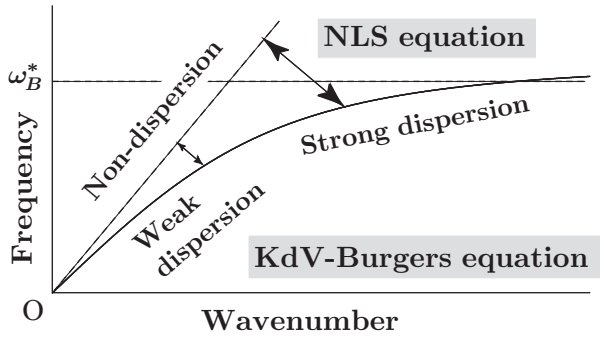


Fig. 1: Weakly nonlinear waves in low- and high- frequency bands are governed by KdVB and NLS equations, respectively. Here ω_B^* denotes the eigenfrequency of a single bubble.

の多くの研究で無視されてきた (たとえば, [1]) 液体の小さな圧縮性を考慮する. 一方で, 気体の粘性, 気体と液体の熱伝導性, 気液界面を通しての相変化およびエネルギー輸送, さらに Reynolds 応力は無視する.

2.1 基礎方程式系

気泡流の支配方程式系は, 気相と液相それぞれに対する質量および運動量の保存方程式, 気泡壁の運動方程式, また, 状態方程式などから構成される [6, 7].

まず, 2 流体モデルに基づく質量および運動量の保存則は,

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\alpha\rho_G^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}(\alpha\rho_G^* u_G^*) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\left[(1-\alpha)\rho_L^*\right] + \frac{\partial}{\partial x^*}\left[(1-\alpha)\rho_L^* u_L^*\right] = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\alpha\rho_G^* u_G^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}\left(\alpha\rho_G^* {u_G^*}^2\right) + \alpha\frac{\partial p_G^*}{\partial x^*} = F^*, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\left[(1-\alpha)\rho_L^* u_L^*\right] + \frac{\partial}{\partial x^*}\left[(1-\alpha)\rho_L^* {u_L^*}^2\right] + (1-\alpha)\frac{\partial p_L^*}{\partial x^*} + P^*\frac{\partial \alpha}{\partial x^*} = -F^*. \tag{7}$$

ここに, t^* は時間, x^* は空間座標, α はボイド率 (気相の体積分率), ρ^* は密度, u^* は流速, p^* は圧力であり, 添え字 G および L はそれぞれ気相および液相に付随する体積平均化された変数を意味する. なお, 体積平均圧力 p_G^* と p_L^* に加え, 気液界面における面積積分によって定義された局所的な液体圧力 P^* が導入されている. 相関の運動量輸送項 F^* としては, 以下の付加慣性力のモデルを用いる [7]:

$$F^* = -\beta_1\alpha\rho_L^*\left(\frac{\mathrm{D}_G u_G^*}{\mathrm{D}t^*} - \frac{\mathrm{D}_L u_L^*}{\mathrm{D}t^*}\right) - \beta_2\rho_L^*(u_G^* - u_L^*)\frac{\mathrm{D}_G\alpha}{\mathrm{D}t^*} - \beta_3\alpha(u_G^* - u_L^*)\frac{\mathrm{D}_G\rho_L^*}{\mathrm{D}t^*}. \tag{8}$$

ここに, 付加慣性係数 $\beta_i\,(i = 1, 2, 3)$ は球形気泡の場合 $1/2$ とおかれる. また, $\mathrm{D}_G/\mathrm{D}t^*$ と $\mathrm{D}_L/\mathrm{D}t^*$ はそれぞれ気相と液相に沿う Lagrange 微分である.

圧縮性液体中における気泡の膨張・収縮運動をあらわす Keller 方程式を用いる [8]:

$$\left(1 - \frac{1}{c_{L0}^*}\frac{\mathrm{D}_G R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)R^*\frac{\mathrm{D}_G^2 R^*}{\mathrm{D}{t^*}^2} + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3c_{L0}^*}\frac{\mathrm{D}_G R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)\left(\frac{\mathrm{D}_G R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{c_{L0}^*}\frac{\mathrm{D}_G R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)\frac{P^*}{\rho_{L0}^*} + \frac{R^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^*}\frac{\mathrm{D}_G}{\mathrm{D}t^*}(p_L^* + P^*). \tag{9}$$

ここに, R^* は平均化された気泡半径である. 右辺第 2 項は, 気泡振動にともなう周囲液体への音波の放射に基づく気泡振動の減衰項である.

方程式系 (4)–(9) を, 気相のポリトロープ変化の状態方程式, 液相の Tait 状態方程式, 気泡内気体の質量保存式, 気液界面における法線方向応力のつりあい式によって閉じる.

2.2 多重尺度法 [4, 5] による解析

現象を特徴付ける代表的な時間 T^* と長さ L^* を用いて, 時間 t^* と空間座標 x^* を, $t = t^*/T^*$, $x = x^*/L^*$ と無次元化する. 小さなパラメータとして, 波の代表的な無次元振幅 $\epsilon\,(\ll 1)$ を用いて, 独立変数 t および x に対する複数のスケール

$$t_m = \epsilon^m t, \quad x_m = \epsilon^m x, \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, N), \tag{10}$$

を導入する. これよりただちに, 偏微分演算子が展開される (微分展開法):

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{m=0}^{N}\epsilon^m\frac{\partial}{\partial t_m}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{m=0}^{N}\epsilon^m\frac{\partial}{\partial x_m}. \tag{11}$$

従属変数として, α, u_G^*, u_L^*, R^*, p_L^* を, 初項の大きさが $O(\epsilon)$ のべき級数に展開する:

$$\alpha/\alpha_0 = 1 + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \cdots, \tag{12}$$

$$u_G^*/U^* = \epsilon u_{G1} + \epsilon^2 u_{G2} + \cdots, \tag{13}$$

$$u_L^*/U^* = \epsilon u_{L1} + \epsilon^2 u_{L2} + \cdots, \tag{14}$$

$$R^*/R_0^* = 1 + \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2 + \cdots, \tag{15}$$

$$p_L^* = p_{L0}^* + \epsilon\rho_{L0}^* U^{*2} p_{L1} + \epsilon^2\rho_{L0}^* U^{*2} p_{L2} + \cdots. \tag{16}$$

ここで, $U^*(\equiv L^*/T^*)$ は代表的な波の伝播速度である. 液相密度 ρ_L^* の展開は以下のように定める.

$$\rho_L^*/\rho_{L0}^* = \begin{cases} 1 + \epsilon^2\rho_{L1} + \epsilon^3\rho_{L2} + \cdots, \\ 1 + \epsilon^5\rho_{L1} + \epsilon^6\rho_{L2} + \cdots. \end{cases} \tag{17}$$

すなわち, ρ_L^*/ρ_{L0}^* の変動は他変数 (12)–(16) よりも小さいと仮定しており, 1 行目が KdVB 方程式 (3 節), 2 行目が NLS 方程式 (4 節) の導出においてそれぞれ用いられる.

3 KdV–Burgers 方程式 [9]

長波長かつ低周波数領域に着目し, KdVB 方程式を導くための物理パラメータのスケーリングを, 振幅 $\epsilon\,(\ll 1)$ を用いて, 以下のように設定する:

$$\frac{U^*}{c_{L0}^*} \equiv O(\sqrt{\epsilon}) \equiv V\sqrt{\epsilon}, \tag{18a}$$

$$\frac{R_0^*}{L^*} \equiv O(\sqrt{\epsilon}) \equiv \Delta\sqrt{\epsilon}, \tag{18b}$$

$$\frac{\omega^*}{\omega_B^*} \equiv O(\sqrt{\epsilon}) \equiv \Omega\sqrt{\epsilon}. \tag{18c}$$

ここに, V, Δ, Ω はすべて $O(1)$ の定数であり, $\omega^* \equiv 1/T^*$ は音源の角振動数をあらわす. スケーリング (18) は, 代表的な波の位相速度が初期液単相音速にくらべて $O(\sqrt{\epsilon})$ だけ小さく, 代表的な長さが初期気泡径にくらべて $O(1/\sqrt{\epsilon})$ だけ大きく, さらに, 入射波の振動数が気泡の固有振動数にくらべて $O(\sqrt{\epsilon})$ だけ小さいことを意味する.

基礎方程式系 (4)–(7) と (9) に対応する, ϵ に対する最低次の線形方程式系,

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - 3\frac{\partial R_1}{\partial t_0} + \frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} = 0, \tag{19}$$

$$\alpha_0\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - (1-\alpha_0)\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0} = 0, \tag{20}$$

$$\beta_1\frac{\partial u_{G1}}{\partial t_0} - \beta_1\frac{\partial u_{L1}}{\partial t_0} - 3\gamma p_{G0}\frac{\partial R_1}{\partial x_0} = 0, \tag{21}$$

$$(1-\alpha_0+\beta_1\alpha_0)\frac{\partial u_{L1}}{\partial t_0} - \beta_1\alpha_0\frac{\partial u_{G1}}{\partial t_0} + (1-\alpha_0)\frac{\partial p_{L1}}{\partial x_0} = 0, \tag{22}$$

$$R_1 + \frac{\Omega^2}{\Delta^2}p_{L1} = 0. \tag{23}$$

さらに, $O(\epsilon^2)$ の方程式系も得る. これらは, それぞれ, 無次元気泡径の第 1 近似解 R_1 および第 2 近似解 R_2 を未知変数とする単一方程式にまとめることができる:

$$O(\epsilon): \quad \frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - v_p^2\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} = 0, \tag{24}$$

$$O(\epsilon^2): \quad \frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0^2} - v_p^2\frac{\partial^2 R_2}{\partial x_0^2} = K(t_0, t_1, x_0, x_1). \tag{25}$$

ここに v_p は位相速度である. 式 (24) と (25) において右向き進行波のみに着目し, 非同次方程式 (25) に対する可解条件

$$K(\varphi_0, t_1, x_1) = 0, \quad (\varphi_0 \equiv x_0 - t_0), \tag{26}$$

を用い, いくらかの操作を経て, KdVB 方程式が導かれる:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \Pi_1 f\frac{\partial f}{\partial \xi} + \Pi_2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \Pi_3\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} = 0. \tag{27a}$$

ここに, 以下のような変数変換をおこなった:

$$\tau \equiv \epsilon t, \quad \xi \equiv x - (1+\epsilon\Pi_0)t. \tag{27b}$$

さらに, 係数 Π_0, Π_2, Π_3 は以下のように与えられる:

$$\Pi_0 = -\frac{(1-\alpha_0)\Delta^2 V^2}{6\alpha_0\Omega^2}, \tag{28}$$

$$\Pi_2 = -\frac{1}{6\alpha_0}\left(4\mu + \frac{\Delta^3 V}{\Omega^2}\right), \tag{29}$$

$$\Pi_3 = \frac{\Delta^2}{6\alpha_0}. \tag{30}$$

散逸係数 Π_2 は負値, 分散係数 Π_3 は正値である. また, 非線形係数 Π_1 は負値である (その陽な形は複雑ゆえ原著論文 [9] を参照されたい).

式 (24) より, t_0 と x_0 で特徴付けられる近傍場においては, 圧力波は線形波動方程式にしたがう. 一方, 式 (27) より, $O(1/\epsilon)$ の時間空間スケールの遠方場においては, 弱い分散性, 弱い非線形性および弱い散逸性の発現・競合によって, 減衰をともなうソリトンが形成される.

4 非線形 Schrödinger 方程式 [9]

つづいて, 前節に比べて高周波数かつ短波長の領域を記述する, 以下のスケーリングを起点として, NLS 方程式の導出をおこなう:

$$\frac{U^*}{c_{L0}^*} \equiv O(\epsilon^2) \equiv V\epsilon^2, \tag{31a}$$

$$\frac{R_0^*}{L^*} \equiv O(1) \equiv \Delta, \tag{31b}$$

$$\frac{\omega^*}{\omega_B^*} \equiv O(1) \equiv \Omega. \tag{31c}$$

ここで, 代表的な時間を $T^* \equiv 1/\omega_B^*$ と定めた. 代表的な位相速度は前節よりも小さく設定されており, 初期気泡径は代表的な長さと同程度 (短波), さらに気泡の固有振動数と入射波の振動数が同程度であることを規定している.

3 節と同様の計算を 3 次まで進めると, 以下の NLS 方程式を得る:

$$\mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{q}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \nu_1|A|^2 A + \mathrm{i}\nu_2 A = 0. \tag{32a}$$

ただし, 以下の変数変換を用いた:

$$\tau \equiv \epsilon^2 t, \quad \xi \equiv \epsilon(x - v_g t). \tag{32b}$$

ここに, v_g は群速度, $q = \mathrm{d}v_g/\mathrm{d}k\,(< 0)$ は群速度の波数による導関数 (分散係数) であり負値である. さらに, 非線形係数 ν_1 は負値, 散逸係数 ν_2 は正値 (陽な形は原著論文 [9] を参照されたい) である.

NLS 方程式 (32) は, $O(1/\epsilon^2)$ の時間空間スケールにおける, 群速度の導関数に比例する分散性, 振幅の 3 次非線形性, また液体粘性および気泡からの音響放射による散逸性, これらの釣り合いによって定まる包絡波の発展を記述する.

5 おわりに

多重尺度法に物理パラメータのスケーリングを組み合わせて, 気泡を一様に含む静止液体中の平面進行波の弱非線形伝播を記述する, 非線形波動方程式を統一的に導く方法を述べた. その方法を用いて, 気泡流の基礎方程式系から, 低周波数領域を記述する KdV–Burgers 方程式, 高周波数領域を記述する非線形 Schrödinger 方程式をそれぞれ導いた. 以下に, 本研究にかかわるさらなる発展と展望を, 2 つ述べておく:

1. 音源の径 (音響ビームの幅) と波長の比で定義される第 4 の無次元数のスケーリングを式 (3) に付加して, 本導出方法を, 弱い回折を伴う準平面波としてのビームの弱非線形伝播へ拡張した. 実際に, 低周波数領域に対する KZK (Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov) 方程式を導いた [10]. 高周波数領域に対する拡張結果も, 近々, 報告予定である.

2. KdVB 方程式 (27) と NLS 方程式 (32) の厳密解としては, 原著論文 [9] を, 数値解としては, 著者らの最近の有限差分解を参照されたい [11, 12].

   - KdVB 方程式の解としてのソリトン波形は, 古くより実験的にも観測されており [3], また, 非線形・散逸・分散が競合する数値波形を描くことも容易い. KdVB 方程式の近似が有効な “低” 周波数領域は, 定量的に “かなり広い” ものと, 著者は予想している.
   - NLS 方程式の分散係数 $q/2$ は, その大前提である短波 [式 (31b): $R_0^* \simeq L^*$], すなわち $k \to \infty$ においてゼロに漸近する. したがって, 強分散性波動である前提の崩壊が示唆され, 同時に, NLS 方程式の近似が有効な周波数・波数領域は極めて小さいことが予想される. 著者の知る限り, 気泡流中の包絡ソリトン波形の実験的報告が未だ存在しないことにも, 注意を要する. しかしながら, 本稿で示したように, NLS 方程式の導出は, 定性的には, 設定した仮定のもとで首尾一貫している. 目下, 主に数値的手法を用いて, 定量的検討に力を注いでいる.

参考文献

[1] L. van Wijngaarden, *J. Fluid Mech.*, **33** (1968), 465.

[2] Nigmatulin, R. I., *Dynamics of multiphase media*, Vols. 1 and 2 (Hemisphere, New York, 1991).

[3] Nakoryakov, V. E., et al., *Wave propagation in gas-liquid media* (CRC Press, Boca Raton, 1993).

[4] Nayfeh, A. H., *Perturbation methods* (Wiley, New York, 1973).

[5] Jeffrey, A. and Kawahara, T., *Asymptotic methods in nonlinear wave theory* (Pitman, London, 1982).

[6] R. Egashira, T. Yano and S. Fujikawa, *Fluid Dyn. Res.*, **34** (2004), 317.

[7] T. Yano, R. Egashira and S. Fujikawa, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **75** (2006), 104401.

[8] J. B. Keller and I. I. Kolodner, *J. Appl. Phys.*, **27** (1956), 1152.

[9] T. Kanagawa, et al., “Unified theory based on parameter scaling for derivation of nonlinear wave equations in bubbly liquids,” *J. Fluid Sci. Technol.*, **5** (2010), 351.

[10] T. Kanagawa, et al., *J. Fluid Sci. Technol.*, **6** (2011), 279.

[11] T. Kanagawa and R. Egashira, *AIP Conf. Proc.*, **1558** (2013), 2341.

[12] T. Kanagawa and J. Kawahara, *JPS Conf. Proc.* (2014), in press.

有限体$\mathbb{F}_p$上定義された楕円曲線の$\mathbb{F}_p$有理点群の構造

室蘭工業大学大学院　数理システム工学専攻２年
坂本真

1　体K上の楕円曲線と群構造

$p \geq 5$とし，$\mathbb{F}_p \subseteq K$を有限体とする。a, bが$D = \quad 4a^3 \quad 27b^2 \neq 0$を満たす$K$の元としたときWeierstrass方程式$E : y^2 = x^3 + ax + b$で定義された曲線を$K$上の楕円曲線という。また無限遠点は楕円曲線を射影平面の曲線とみたとき斉次座標$(x : y : z)$において$(0 : 1 : 0)$となる点のことで，一般に$\mathcal{O}$と表す。

楕円曲線Eに群構造を導入することができ，これはアーベル群となる。

以下，Eを$\mathbb{F}_p$上の楕円曲線とする。$\mathbb{F}_p \quad K$に対して

$$E(K) = \{P = (x, y) \in E \mid x, y \in K\}$$

をEのK有理点群という。特に$K = \mathbb{F}_p$のとき$\mathbb{F}_p$有理点群の構造について知るために，次のことのついて述べる。

(1) $E(\mathbb{F}_p)$の位数を与える公式を求める。

(2) $E(\mathbb{F}_p)$の等分点のx座標の情報だけで群構造を決めることができることを示す。

定理 1.1 ($Hasse \quad Weil$の定理)
Kを有限体とし，$ch(K) = p \geq 5$とする。このとき$\sharp K = q = p^h$とおき，$\beta = \sharp E(K) \quad q \quad 1$とすると$|\beta| \leq 2\sqrt{q}$である。

特に$K = \mathbb{F}_p$ $(p \geq 5)$のとき，$|\beta| \leq 2\sqrt{p}$であり，逆に$|\beta| \leq 2\sqrt{p}$を満たすすべてのβについて

$$\sharp E(K) = p + 1 + \beta$$

となる$\mathbb{F}_p$上の楕円曲線が存在する。

定理 1.2 ($R\ddot{u}ck$の定理)
$\sharp K = q = p^h$, $\sharp E(K) = n = \prod_\ell \ell^{h_\ell}$とおくと

$$E(K) \cong \mathbb{Z}/p^{h_p}\mathbb{Z} \quad \prod_{\ell \neq p}(\mathbb{Z}/\ell^{a_\ell}\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/\ell^{h_\ell - a_\ell}\mathbb{Z}) \qquad 0 \leq a_\ell \leq min(ord_\ell(q \quad 1), [\frac{h_\ell}{2}])$$

ここで $a = \ell^t a',\ (a', \ell) = 1$ のとき $ord_\ell(a) = t$ であり $[\alpha]$ は α を越えない最大の整数である。

逆に上のような a_ℓ が与えられたとき

$$E(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/p^{h_p}\mathbb{Z} \qquad {}_{\ell \neq p}(\mathbb{Z}/\ell^{a_\ell}\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/\ell^{h_\ell - a_\ell}\mathbb{Z})$$

となる $\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線が存在する。

2　楕円曲線の位数 $\sharp E(\mathbb{F}_p)$ の公式

$$\sharp E(\mathbb{F}_p) = p + 1 + \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \Big(\frac{x^3 + ax + b}{p}\Big) = p + 1 + \sum_{x \in \mathbb{F}_p} (x^3 + ax + b)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

$$= p + 1 + (p \quad 1) b_{p-1} \pmod p \quad 1 \quad b_{p-1} \pmod p$$

b_{p-1} は $(x^3 + ax + b)^{\frac{p-1}{2}}$ の $p \quad 1$ 乗の項の係数で，二項定理により次のように表わされる。

$$\sum_{\frac{p-1}{3} \leq i \leq \frac{p-1}{2}} a^{\frac{3i-p+1}{2}} b^{\frac{p-2i-1}{2}} \quad {}_{i} (p \quad 1)/2 \quad {}^{i} (p \quad i \quad 1)/2$$

ここで A_p を $A_p \qquad b_{p-1} \pmod p$ となる $0 \leq A_p \leq p \quad 1$ を満たす整数とすると

$$\sharp E(\mathbb{F}_p) = 1 + mp + A_p$$

となる。この m を決めると次の定理を得る。

定理 2.1

$(0 \leq A_p \leq p \quad 1$ かつ $A_p \quad 0 \pmod 2$ かつ $\sharp E\ [2](\mathbb{F}_p) = 0)$ または
$(0 \leq A_p \leq p \quad 1$ かつ $A_p \ / \ 0 \pmod 2$ かつ $\sharp E\ [2](\mathbb{F}_p) \geq 1)$ の場合は

$$\sharp E(\mathbb{F}_p) = 1 + A_p$$

それ以外の場合は

$$\sharp E(\mathbb{F}_p) = 1 + p + A_p$$

注意 2.2

ここで $E\ [2]$ は楕円曲線 E の位数 2 の点の集合である。

3　楕円曲線の等分点と群構造

一般に $E : y^2 = x^3 + ax + b$ に対して

$$E[n] := \{P \in E \mid nP = \mathcal{O}\}$$

となる点を楕円曲線 E の n 等分点,

$$E\ [n] := \{P \in E \mid ord\ P = n\}$$

を楕円曲線 E の位数 n の点の集合であるという。

定義 3.1
一般に素数 q に対して

$$E[q^\infty] = \bigcup_{r=1}^{\infty} E[q^r]$$

$\Phi_n(x) = 0$ を $E\ [n]$ の x 座標を与える方程式とする。一般に $x \in \mathbb{F}_p$ でも $(x, y) \in E(\mathbb{F}_p)$ とは限らない。しかし，$\Phi_n(x) = 0$ の情報だけで群構造を決定することができる。

定理 3.2
$\sharp E[2^\infty](\mathbb{F}_p) = 2^m\ (m \geq 4)$ とし，$r = min\ ord_2(p \quad 1), [\frac{m}{2}]$ とおく。
$\Phi_{2^{m-s}}(x) = 0$ が $\mathbb{F}_p$ 上で解をもち，$\Phi_{2^{m-s+1}}(x) = 0$ が $\mathbb{F}_p$ 上で解をもたないとき $P = (x, y) \in E(\mathbb{F}_p)$ で P の位数は 2^{m-s} より

$$E[2^m](\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/2^{m-s}\mathbb{Z} \quad (1 \leq s \leq r)$$

命題 3.3
$q \neq 2, p$ の奇素数とするとき $r = min\ ord_q(p \quad 1), [\frac{m}{2}]$ で
$0 \leq s \leq r$ となる s について $\Phi_{q^s}(x) = 0$ が $\mathbb{F}_p$ 上で解をもてば

$$P = (x, y) \in E[q^s](\mathbb{F}_p)$$

これより $E[q^m](\mathbb{F}_p)$ の構造がわかる。

定理 3.4
(a) $q = p$ のとき $E[p^m](\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$
$q \neq 2, p$ の場合
(b) $r = 0$ のとき $E[q^m](\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/q^m\mathbb{Z}$
(c) $r \geq 1$ のとき $\Phi_{q^{m-s}}(x) = 0$ が $\mathbb{F}_p$ 上で解をもち，$\Phi_{q^{m-s+1}}(x) = 0$ が $\mathbb{F}_p$ 上で解をもたないとき

$$E[q^m](\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/q^s\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/q^{m-s}\mathbb{Z} \quad (1 \leq s \leq r)$$

以上の定理・命題を用いると，有限体上における楕円曲線の群構造を決めることができる。それを決めると群構造が等しいときとそうでないときとでその間を同種写像で結びつけることができる。

例 3.5
$p = 29$ で $\sharp E(\mathbb{F}_p) = 32$ の場合
$E(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

$$E_1 : y^2 = x^3 + 28x + 4$$

$E(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$

$$E_2 : y^2 = x^3 + 8x + 9$$

$E(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$

$$E_3 : y^2 = x^3 + 12x + 26$$

$$E_4 : y^2 = x^3 + 17x + 24$$

4 まとめ

楕円曲線の群の位数を求める公式が存在し，これにより位数を求めることができる。

楕円曲線の n 等分点を与える x 座標の方程式 $\Phi_n(x) = 0$ の情報だけで群構造を決定することができる。

今後については楕円曲線間の同種写像により，2 つの楕円曲線の $\mathbb{F}_p$ 有理点群が同型かどうかについて調べ，発表する予定である。

5 参考文献

[1] *j.H.* シルヴァーマン /*j.* テイト，楕円曲線論入門，1995，
34 46, 139 143

[2] 笠井洋介，*The group structure on elliptic curves*，2006

[3] *Hans Georg Rück*，*A Note on Elliptic Curves Over Finite Fields*，
1987, 301 304

半正値エルミート行列上の Generalized Matrix Functions の不等式

田端亮　(広島大学大学院理学研究科)*

1. Introduction

Determinant (行列式) は, $n \times n$ 正方行列の各行各列から 1 つずつ成分を選んだ積に, 符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を係数としたときの総和によって定義される. また, この符号部分を全て $+1$ としたものは permanent (恒久式) と呼ばれる. これらの係数部分は, n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の交代表現, 自明表現 (のトレース) と思うことができるが, 他の表現に置き換えることで, generalized matrix function が定義される.

行列を (半正値) エルミート行列に制限すると, 各 generalized matrix function は実数値関数となるので, 大小関係を考えることができる. これについて Schur の不等式と Lieb の permanental dominance conjecture が知られているが, ある観点から, これらの不等式の精密化について述べる.

2. Generalized Matrix Functions の不等式

定義. $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ とする. G を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の部分群, χ を G の表現から定まる指標であるとき, (normalized) generalized matrix function $\overline{d}_\chi^G$ を次で定義する.

$$\overline{d}_\chi^G(A) := \frac{1}{\chi(\mathrm{id})} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

また, $G = \mathfrak{S}_n$, χ が既約指標のときの generalized matrix function を immanant という.

n の分割とは, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$ となる整数の非増大列 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_k \ge 0$ のことである. 分割はヤング図形との対応があるので, ヤング図形と区別せずに扱うことにする. $\mathfrak{S}_n$ の既約表現もまた, n の分割と 1 対 1 に対応することが知られているので, immanant はヤング図形でパラメータ付けすることができる. 例えば, $n = 3$ のときの 3 つの immanant を具体的に書いてみる:

$$\begin{aligned}
\det A = \overline{d}_{\ydiagram{1,1,1}}(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}, \\
\overline{d}_{\ydiagram{2,1}}(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} - \frac{1}{2}(a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}), \\
\mathrm{per}\, A = \overline{d}_{\ydiagram{3}}(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33}.
\end{aligned}$$

この generalized matrix function は Schur によって導入されたものであるが, 次のような不等式を示した.

定理 (Schur [7])**.** A が半正値エルミート行列であるとき, 次が成り立つ.

$$\overline{d}_\chi^G(A) \ge \det A.$$

* e-mail: tabata-ryo@hiroshima-u.ac.jp

つまり, determinant とは最小の generalized matrix function である. これに対し, Lieb による最大なものの予想が次であり, permanental dominance conjecture と呼ばれる.

予想 (Lieb [2]). Aが半正値エルミート行列であるとき, 次が成り立つ.

$$\overline{d}_{\chi}^{G}(A) \leq \operatorname{per} A.$$

この予想は, $n \leq 3$で正しい. また, immanant に限ると $n \leq 13$で正しいことが知られている ([5]).

3. 不等式の一般化に向けて

ここでは, permanental dominance conjecture のある一般化を考えたい. まず, Merris が予想し, Pierce, Grone-Pierce によって示された generalized matrix function に関するある不等式を紹介する.

定理 (Pierce [6], Grone-Pierce [1]). A が半正値エルミート行列であるとき, 次が成り立つ.

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \leq \frac{n-1}{n} \operatorname{per} A + \frac{1}{n} \det A$$

この左辺は, G を単位群, χ をその自明指標としたときの generalized matrix function であり, その upper bound を permanent と determinant の内分点として与えた, permanental dominance conjecture のある一般化といえる. この観点から, その他の generalized matrix function について, 次を考える.

問題. G を $\mathfrak{S}_n$ の部分群とし, χ を G の既約指標とする.

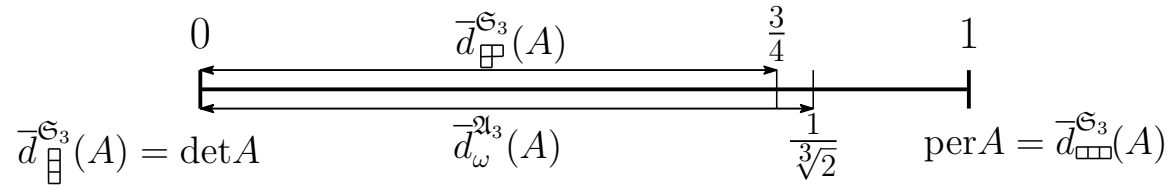
$$R(G,\chi) := \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists A : n \times n \text{半正値エルミート行列 s.t. } \operatorname{per} A \neq \det A, \\ \overline{d}_{\chi}^{G}(A) = t \operatorname{per} A + (1-t) \det A. \end{array} \right\}$$

を決定せよ.

もし, permanental dominance conjecture が正しいならば, Schur の定理と合わせて, $R(G,\chi) \subset [0,1]$ であることに注意する. 現在, $n = 3$ においては, 各既約指標に対して, $R(G,\chi)$ を与えることができている. 例えば, 分割 $\ydiagram{2,1}$ に対応する $\mathfrak{S}_3$ の既約指標, 3 次交代群 $\mathfrak{A}_3$ の非自明指標 ω に対しては,

$$R(\mathfrak{S}_3, \ydiagram{2,1}\,) = \left[0, \frac{3}{4}\right], \quad R(\mathfrak{A}_3, \omega) = \left[0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$$

であり, これらを図示したものが次である.



次の命題は, この $R(G,\chi)$ の最大値, 最小値を考察するために有用である.

命題. 半正値エルミート行列 A に対して, ${}^{*}TT = A$ なる T が存在する.

この T に並ぶ n 個の列ベクトルに着目することで, 半正値エルミート行列 A は「$\mathbb{C}^n$ 内の n 本のベクトルの配置」とみなすことができる. また, 各ベクトルの長さを 1 に揃えてよいことも即座に分かる. これは行列の対角成分を全て 1 にすることに対応する.

定理 (Pate [4], Silva [8])**.** λ を n の分割, A を半正値エルミート行列とする. $\overline{d}_\lambda^{\mathfrak{S}_n}(A) = 0$ となることの必要十分条件は, A に対応する n 本のベクトルを, λ のヤング図形の各箱に 1 本ずつ置き, 各列内で一次独立になるようにできない.

系. $\lambda \neq$ とする. $R(\mathfrak{S}_n, \lambda)$ の最小値 0 であり, $A = J_n$ で与えられる. ここでの J_n とは, 全ての成分が 1 である $n \times n$ 行列であり, n 本の長さ 1 のベクトルが全て同一方向を向いているようなベクトル配置に対応する.

これにより, permanent を除く immanant の場合, Schur の不等式は最良であることが確かめられ, $R(\mathfrak{S}_n, \lambda)$ の最小値を実現する行列を, ベクトル配置で記述することができる. 一方, 最大値に関して次の予想を立てた.

予想. (1) $\lambda \neq$ とする. $R(\mathfrak{S}_n, \lambda)$ の最大値は, Y_n で与えられる.
(2) $\lambda =$ とする. $R(\mathfrak{S}_n,$ $)$ の最大値は, $Y_3 \oplus I_{n-3}$ で与えられる.
ここで, $Y_n, Y_3 \oplus I_{n-3}$ はそれぞれ次のような行列である.

$$Y_n = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}, \quad Y_3 \oplus I_{n-3} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & O & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ \hline & & & 1 & & O \\ & O & & & \ddots & \\ & & & O & & 1 \end{array}\right).$$

Y_n は「原点を重心とする正 $n-1$ 単体の各頂点へのベクトル」というベクトル配置に対応する行列であるので, $Y_3 \oplus I_{n-3}$ は, 3 本のベクトルが正三角形をなし, 残りの $n-3$ 本は他のどれとも直交するようなベクトル配置に対応する.

$R(\mathfrak{S}_n, \lambda)$ の最大値は, そのような美しいベクトル配置に対応する行列で実現されるだろう, と言っている. この予想は, $n \leq 4$ で正しいことが確かめられている.

参考文献

[1] Grone, Pierce, Permanental Inequalities for Correlation Matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 9(2):194-201 (1988)

[2] E. H. Lieb, Proofs of Some Conjectures on Permanents, J. Math. and Mech. 16:127-134 (1966)

[3] Merris, Permanental Dominance Conjecture, Proc. 1986 Auburn Matrix Theory Conference (1986)

[4] T. H. Pate, Immanants and Decomposable Tensors that Symmetrize to Zero, Linear and Multilinear Algebra 28(3):175-184 (1990)

[5] T. H. Pate, Row Appending Maps, Ψ-functions, and Immanant Inequalities for Hermitian Positive Semi-definite Matrices, Proc. London Math. Soc.(3) 76(2):307-358 (1998)

[6] S. Pierce, Permanents of Correlation Matrices, Current Trends in Matrix Theory, R. Grone and F. Uhlig eds., Elsevier, North-Holland, Amsterdam (1987)

[7] I. Schur, Über endliche Gruppen und Hermitische Formen, Math. Z. 1:184-207 (1918)

[8] Dias da Silva, On the μ-colorings of a Matroid, Linear and Multilinear Algebra 27(1):25-32 (1990)

時間周期項を加えたFitzHugh-Nagumo方程式系の自己複製ダイナミクスについて

寺田　知幸[1]，西浦　廉政[2]
[1] 東北大学大学院理学研究科数学専攻, [2] 東北大学原子分子材料科学高等研究機構
[1]sb1m44@math.tohoku.ac.jp, [2]nishiura@wpi-aimr.tohoku.ac.jp

1　はじめに

バナッハ空間 $\mathscr{X}$ 上で定義される時間に依存する微分方程式 (非自励系):

$$u_t = \mathscr{A}(t,u). \tag{1.1}$$

の性質について考察する。このようにして与えられる方程式がもつ性質として、特に時間の影響によってもたらされる特有の性質を調べたい。有限次元の線形微分方程式 $\mathscr{A}(t,u) = A(t)u$、特に行列 $A(t)$ が時間に依存しない定数行列の場合、平衡点 $u \equiv 0$ の安定性はその行列の固有値で決定される。すなわち、固有値の実部がすべて負ならば安定と決定付けられる。一方で系が時間に依存するとき、各時刻 t を止めた定数行列の固有値の実部がすべて負であっても $u \equiv 0$ が安定になるとは限らない。ただし系が時間周期的、すなわち $A(t) = A(t+T)$ の場合にはフロケ行列の固有値により、定数行列のときと同様にその安定性が決定される。フロケ理論や非自励系線形常微分方程式における具体例が紹介されているものとして、例えば文献 [2] や [3] がある。有限次元の場合においてすら非自励系に特有な性質が現れているので、一般のバナッハ空間 $\mathscr{X}$ 上の問題においては、より複雑な現象が起きることが予想される。従って、非自励系にのみ現れる特有な現象や性質を計る“ 指数 (index) ”をうまく定義することで、系 (1.1) から「時間の依存性」がもつ不変量を抽出できないだろうか。ここでは有限次元の (非自励) 線形微分方程式にある種の指数の定義を与えた議論に留まる。このような指数に注目することは様々な分野で行われており、例えば文献 [1] では反応拡散系の進行波の安定性に対する指数として Stability index が定義されている。

本稿では $\mathscr{A}(t,u)$ は半線形放物型偏微分方程式を与える非線型作用素により与えられるものとし、その例として、一般化 FitzHugh-Nagumo 方程式系に時間周期関数を線形に加えたときのダイナミクスを考察する。このとき時間周期項の各時刻 t を止めた自励系においては、系は t に応じて単安定系か双安定系のいずれかの状態が決定され、それらに対応して安定なパルスやフロントが存在する。しかし、時間に依存する系のダイナミクスでは、(時間周期項が無い場合では現れない) パルスの生成と消滅を繰り返す自己複製パターンを生じることを数値的に示す。このような個々の性質を調べることは「時間の依存性」がもつ不変量を抽出する第一歩と考える。

2　非自励線形微分方程式

時間依存する微分方程式で最も単純なものとして非自励線形微分方程式

$$u_t + A(t)u = 0 \tag{2.1}$$

を考える。ただし $A : \mathbb{R} \to M_r(\mathbb{R})$ は周期 T をもつとする: $A(t+T) = A(t)$。系 (2.1) の解として、$u(t) \to 0$ $(t \to \pm\infty)$ を満たす解のみを考える。系 (2.1) は常微分作用素 $\mathscr{L}$ を用いて次のように表すことができる:

$$\mathscr{L}u := \left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) u = 0,$$

すなわち、この場合、解空間は $\ker \mathscr{L}$ で与えられる。ここで $A(t)$ が然るべき条件を満たすとき、$A(t)$ に応じてある角速度 ω が存在し、S^1 上を角速度 ω で進む座標系 w への座標変換で系 (2.1) は定数係数の線形微分方程式

$$w_t + Bw = 0 \quad on\ S^1 \tag{2.2}$$

に変換されるものが存在する。この解空間は

$$\ker\left(\frac{d}{dt} + B\right) = \{w(t) | w_t + Bu = 0,\ \lim_{t\to\infty} w(t) = 0\}.$$

となり、定数係数の線形常微分方程式の一般論から $\dim\ker\left(\frac{d}{dt} + B\right) = 0$ が成り立つ。このとき、次のことが成り立つことが知られている。

定理 2.1 (周期行列版の定数行列の指数定理) 系 (2.2) において

$$\dim\ker\ \frac{d}{dt}+B\ \ -\dim\ker\ -\frac{d}{dt}+B^*\ \ =\frac{sign(B)}{2}-\frac{sign(B)}{2}=0$$

が成り立つ。ここで B^* は B の随伴行列である。

この場合、$\dim\ker\ \frac{d}{dt}+B$ と $\dim\ker\ -\frac{d}{dt}+B^*$ の差が 0 とは、非自明な解が存在しないことを意味する。それでは解空間として異なるものを用いた場合には、どのような指数が現れるか、という疑問が自然に浮かび上がる。このとき、指数を定義する上で重要になるのはフロケ理論が与えるフロケ指数やフロケ乗数であることが予想される。フロケ理論は基本的には一周期分のすべての解により情報を抽出する理論である。筆者はこのような理論ではなく、アプリオリに解空間の性質を調べたいと考えている。

3 非自励な反応拡散系

個々の系に依らずに非自励系のみに現れる特有な現象や性質を調べる上で、まず時間に依存する具体的な方程式において何が起き得るのかを調べることは重要である。そこで本節では、(自励系のときには良く解の性質が知られている) 一般化 FitzHugh-Nagumo 方程式系に時間周期関数を線形に加えた非自励系の解のダイナミクスを数値的に調べる。

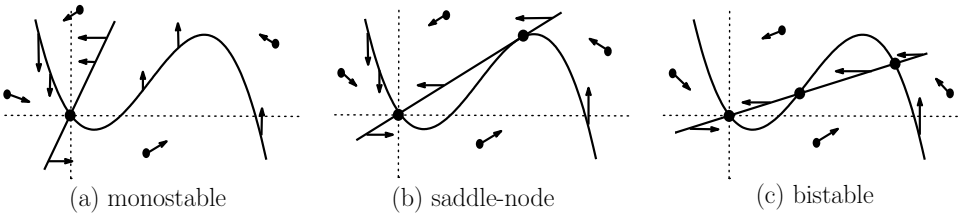
次の時間周期関数を線形に加えた一般化 FitzHugh-Nagumo 方程式系

$$\begin{cases} u_t = d_u u_{xx} + \dfrac{u(1-u)(u-a)-w}{\epsilon} \\ w_t = d_w w_{xx} + u - w + \ \cos(\omega t)u \end{cases} \tag{3.1}$$

を考える。但し $\epsilon>0$ と $0<a<1/2$ は固定する。まず系 (3.1) の拡散項が無い場合の 2 次元常微分方程式系:

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{u(1-u)(u-a)-w}{\epsilon} \\ w_t = u - w + \ \cos(\omega t)u \end{cases} \tag{3.2}$$

について考える。この方程式は、前節のものと違い、非線型であるが、時間と伴に系が周期的に変化している。この常微分方程式の平衡点は系 (3.1) の定数定常解を与える。従って、まず系 (3.2) の平衡点が時間と伴にどのように変わるのかを調べる。このとき、ヌルクラインによる解析が有効である。ヌルクラインを用いた解析は次のものである。まず時間周期項の各時刻 t を止める毎に、曲線 $F:=\ \ (u,w)\in\mathbb{R}^2 \mid w=u(1-u)(u-a)\ \ $ と直線 $G:=\ \ (u,w)\in\mathbb{R}^2 \mid w=(1+\ \ \cos(\omega t))u\ \ $ を考える。このとき、F と G の交点の個数が系 (3.2) の平衡点の個数を与える。t をパラメータとし、$t=0$ から大きくしていくと、交点の数は $1\to2\to3\to2\to1$ と周期的に変化する様子が分かる (図 1)※。平衡点の個数が分かったので、次は平衡点の安定性がどのように変化するのか見ていく。平衡点の安定性は系 (3.2) の平衡点における線型化方程式によって決定され、それは定数係数の線形常微分方程式と全く同様である。特に唯一つの平衡点が安定であるとき、系 (3.1) あるいは系 (3.2) は単安定系 (monostable) と呼ばれ、二つの平衡点が安定であるとき、系 (3.2) は双安定系 (bistable) と呼ばれる。系 (3.2) において、異なる定数定常解を結ぶ定常解の事をフロント解と呼び、同一の定数定常解に漸近する定常解をパルス解と呼ぶ。系 (3.2) がフロント解やパルス解をいつもつかとう問題は、系 (3.2) が単安定系であるかあるいは双安定系であるか という問題と密接に関わりがあるが、その詳細はポスターにて紹介したい。



(a) monostable (b) saddle-node (c) bistable

図 1: 系 (3.1) の各時刻 t を止める毎のヌルクライン。曲線 F と直線 G の交点の数が周期的に変化する。

※ 上図 (c) の右端の平衡点の固有値は必ずしも実部負をもつとは限らない。

実際、系 (3.1) において (時間周期項の各時刻 t を止めたとき) 図 1-(a):単安定系のときには進行パルスが現れ、図 1-(c):双安定系においてはフロントが現れる。また図 1-(c) において odd symmetry(曲線 F と直線 G で囲まれた面積が等しい) が成り立つときには、進行フロントではなく、動かないフロント (定常フロント) が現れることが知られている。従って、方程式 (3.1) は単安定系と双安定系を周期的に繰り返すことが分かるが、それに対応してパルス解とフロント解が交互に現れるだけだろうか。理論的な解析は難しいので、方程式 (3.1) において然るべき初期値の元、数値計算を行うと、時間周期項が無い場合では現れないパルスの生成と消滅を繰り返す自己複製ダイナミクス (SP:Self-replication) が確認される (図 2)。自己複製ダイナミクスは、自励系においても例えば Gray-Scott モデルや 3 種 Activator-Substrate-Inhibitor 系モデルにおいても現れるが、系 (3.1) がもつ自己複製ダイナミクスはそれらとは発生原理が全く異なるように見える。またパラメータ $(\omega,\ )$ に関する相図は図 3 のようになる。このようにして得られた自己複製ダイナミクスではあるが、複製や消滅が起きる時刻のまわりでのヌルクラインを調べると、パルス解が存在せずフロント解が存在する、あるいはフロント解が存在せずパルス解が存在するヌルクラインの状況に非常に近いことが分かり、それらは t をパラメータとみなしたときの解析により理解できると期待される。しかし、前節のように各時刻を止めたときに得られる解では表せない状況が非自励系 (3.1) にも現れる。従って、このような自己複製ダイナミクスがなぜ現れたのかを理解するためには、そのような自励系では現れない解の解析を行うことに帰着される。

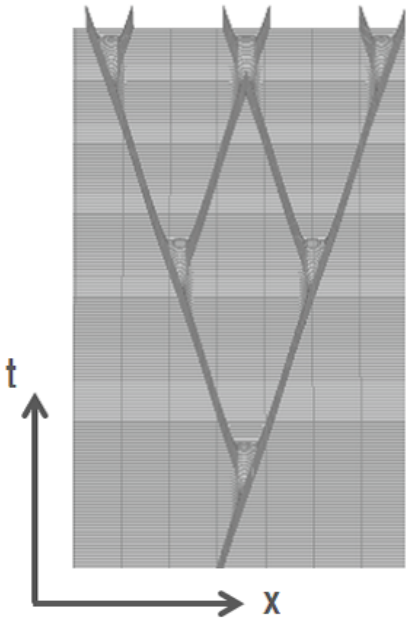


図 2: 境界条件を Neumann 条件とした系 (3.1) の解の数値計算結果。ただし $(d_u, d_v) = (1.0, 0.1)$、$\epsilon = 0.001$、$a = 0.125$ および $(\ ,\omega) = (1.1, 0.5)$ とする。初期値として与えたパルスが時間発展に伴い消滅と生成を繰り返す自己複製ダイナミクスを示す。

結語

本稿では、非自励系のみに現れる特有な現象や性質を計る指数を定義するための準備段階として、時間周期的な性質をもつ系の解の性質について考察を行った。特に、反応拡散系に時間周期外力を加えることで自励系がもつ自己複製ダイナミクスとは全く異なる自己複製ダイナミクスを得た。なぜこのようなダイナミクスが得られたのかを考えることにより、時間が系にもたらす影響が何であるかを解析する特定する第一歩としたい。

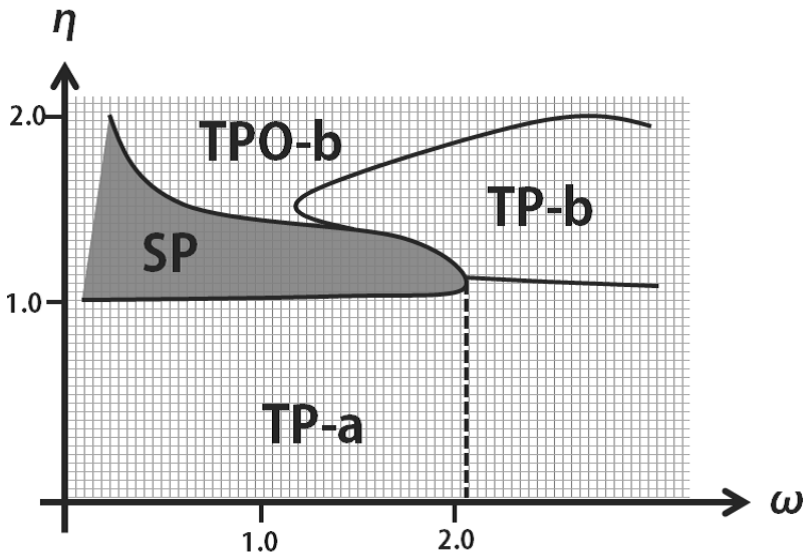


図 3: 系 (3.1) のパラメータ (,ω) に関する相図。灰色の領域は自己複製ダイナミクスが現れるパラメータ領域を表しており、他にも単一の進行パルスが現れる領域として TPO-b、TP-a、TP-b がある。

参考文献

[1] J. Alexander, R. Gardner and C. Jones, A toplogical invariant arising in the stability analysis of travelling waves, *J. Reine Angew. Math*, **410** 1990, pp167-212

[2] J. Hale, *ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS*, Krieger, 1980

[3] K. Josic and R. Rosenbaum, Unstable Solution of Nonautonomous Linear Di erential Equations, *SIAM*, **50** 2008, pp570-584

[4] K. Yokota, *Master thesis of Hokkaido University*, 2002

特異摂動の入った Dereziǹski-Gèrard モデルの解析

船川　大樹*

場の量子論においてはある量子的対象と場が相互作用を起こす場合のエネルギーの解析を行う. 数学としてはエネルギー作用素 (ハミルトニアン) と呼ばれるヒルベルト空間上の自己共役作用素の様々な性質を解析する. 電子と光子の相互作用系, Dirac 粒子と Klein-Gordon 場の相互作用系など様々ある系をそれぞれのエネルギー作用素に置き換えて解析する場の量子論では, エネルギー作用素の一般化と共通の性質を解析することは数学として大変興味深い問題である. ここではエネルギー作用素のある程度の一般化を示し, さらにここで与えた作用素の性質を解析していく.

1　ハミルトニアンの定義

1.1　量子的対象のエネルギー作用素

ある量子的対象 (これは粒子でも場でも良い) のエネルギーを表す作用素として次の性質を満たす線形作用素 A をとる:

$\mathcal{H}$:ヒルベルト空間, $\dim \mathcal{H} \leq \infty$

(A.1):A は $\mathcal{H}$ 上の自己共役な線形作用素で, 特に下に有界.

1.2　ボソンフォック空間

ボソン粒子 (力を伝える粒子) の住む空間として**ボソンフォック空間**がある.

まず, $\mathcal{K}$ をヒルベルト空間としたとき, $\otimes_s^n \mathcal{K}$ を $\mathcal{K}$ の n 重対称テンソル積とする. このとき, $\mathcal{K}$ 上のボソンフォック空間を以下で定義する:

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}) := \oplus_{n=0}^{\infty}(\otimes_s^n \mathcal{K})$$

$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ は $(\Phi, \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty}(\Phi^{(n)}, \Psi^{(n)})_{\otimes_s^n \mathcal{K}}$ を内積として, ヒルベルト空間となっている. ただし, 本紙では内積空間 $\mathcal{K}$ 上の内積 $(f, g)_{\mathcal{K}}$ は f に対して反線形で g に対して線形としている.

さて $S_n : \otimes^n \mathcal{K} \to \otimes_s^n \mathcal{K}$ を対称化作用素とする. 任意の $f \in \mathcal{K}$ に対して,$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ 上の生成作用素 $a^*(f)$ を次のように定義する.

$$(a^*(f)\Psi)^{(n)} = \sqrt{n+1} S_{n+1}(f \otimes \Psi^{(n)}), \quad n \geq 1$$

また, $(a^*(f)\Psi)^{(0)} = 0$ と する. 更に消滅作用素 $a(f)$ は生成作用素 $a^*(f)$ の共役作用素として定義する.

$\Omega_{\mathrm{b}} := \{1, 0, \cdots\} \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ をボソンフォック真空と呼び, $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ 上のボソン有限粒子部分空間を

$$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}^{fin}(\mathcal{M}) := \mathcal{L}\{a^*(f_1)\cdots a^*(f_n)\Omega_{\mathrm{b}}, \Omega_{\mathrm{b}} | f_j \in M, \ j = 1, \cdots n, \ n \in \mathbb{N}\}$$

* e-mail:funakawa@math.sci.hokudai.ac.jp

と定義する. 本紙ではこの空間を有限粒子部分空間と呼ぶことにする. $a^*(f)$ の定義域は次で与えられる.

$$D(a^*(f)) := \{\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K}) \mid \sum_{n=0}^{\infty} \| (a^*(f)\Psi)^{(n)} \|^2_{\otimes_s^n \mathcal{K}} < \infty\}$$

$a^*(f)$ と $a(g)$ の定義域は有限粒子部分空間を含んでおり, また不変にしている. 更に, 有限粒子部分空間上で正準交換関係を満たしている.

$$[a(f), a^*(g)] = (f,g)_{\mathcal{K}}, \quad [a(f), a(g)] = [a^*(f), a^*(g)] = 0$$

ここで $[A,B] = AB - BA$ である. T を K 上の作用素とする. その $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ 上の第 2 量子化作用素 $\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ を

$$\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(T) := \left(\oplus_{n=0}^{\infty} \overline{(\sum_{j=1}^{n} (I \otimes \cdots \otimes I \otimes T \otimes I \otimes \cdots \otimes I)) \mid \hat{\otimes}^n D(T)}\right)_{\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})}$$

と定義する. ただし, 式中の T は j 番目にあり, 最後の $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ は簡約の意味である.

1.3 自由なハミルトニアンの定義

上で定義したフォック空間の特別な場合として $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}^d)$ の場合を考える. ボソン 1 粒子のエネルギーに対応するエネルギー作用素として ω をとる. この ω の性質を持つ関数 ω の掛け算作用素である (関数と掛け算作用素を同じ ω で書いてあることに注意):

$$\omega : \mathbb{R}^d \text{上のボレル可測関数}, \quad 0 < \omega(k) < \infty \ \ (\text{a.e.} k \in \mathbb{R}^d)$$

ここで各 $k \in \mathbb{R}^d$ は運動量, $\omega(k)$ は運動量 $k \in \mathbb{R}^d$ に対する 1 粒子ボソンのエネルギー量を表している.
さて, 系が表される空間を $\mathcal{F} := \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ とする.
$\mathcal{F}$ 上の系の自由なハミルトニアン H_0 を次で定義する:

$$H_0 := A \otimes I + I \otimes \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega)$$

(A.1) と ω が下に有界な自己共役作用素であることから, H_0 も下に有界な自己共役作用素であることが分かる.

1.4 全ハミルトニアンの定義

上で定義した自由なハミルトニアンに摂動 (相互作用項) を加えることで全ハミルトニアンは定義される.
ここでは相互作用項の定義を行う.
$v \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ を取り固定する.(ここでは $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}^d)$ である必要はない.) この作用素 v を使って一般化された生成・消滅作用素を定義する:

$$D(\tilde{a}(v))^* := \{\Psi \in \oplus_{n=0}^{\infty} [H \otimes \otimes_{sym}^n \mathcal{K}] \mid \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \|(I_{\mathcal{H}} \otimes S_n)(v \otimes I_{\otimes_{sym}^{n-1}\mathcal{K}})\Psi^{(n-1)}\|^2 < \infty\}$$

$$(\tilde{a}(v)^*\Psi)^{(n)} := \sqrt{n+1}(I_{\mathcal{H}} \otimes S_n)(v \otimes I_{\otimes_{sym}^{n-1}\mathcal{K}})\Psi^{(n-1)} \ \ (n \geq 1), \ \ (\tilde{a}(v)^*\Psi)^{(0)} := 0$$

上で定義された作用素 $\tilde{a}(v)^*$ は $\mathcal{K}$ の状態を一つ増やしているので生成作用素と呼ばれる. $\tilde{a}(v)^*$ の共役として消滅作用素 $\tilde{a}(v)$ を定義する. ($\tilde{a}(v) := (\tilde{a}(v)^*)^*$) すると消滅作用素は具体的には次のようにして書くことが出来る:

$$D(\tilde{a}(v)) := \{\Psi \in \oplus_{n=0}^{\infty} [H \otimes \otimes_{sym}^n \mathcal{K}] \mid \sum_{n=0}^{\infty} n \|(I_{\mathcal{H}} \otimes S_n)(v^* \otimes I_{\otimes_{sym}^n \mathcal{K}})\Psi^{(n+1)}\|^2 < \infty\}$$

$$(\tilde{a}(v)\Psi)^{(n)} := \sqrt{n}(I_{\mathcal{H}} \otimes S_n)(v^* \otimes I_{\otimes_{sym}^n \mathcal{K}})\Psi^{(n+1)}$$

こうして定義された生成・消滅作用素を使い, シーガル場の作用素を以下で定義する:

$$\tilde{\phi}(v) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{a}(v) + \tilde{a}(v)^*)$$

このシーガル場の作用素を利用して摂動を次で定義する:

$$H_{\mathrm{DG}} = A \otimes I + I \otimes H_{\mathrm{f}} + \alpha\tilde{\phi}(v) \ \text{ on } \ \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$$

H_{DG} は Derezińnski-Gèrard モデルと呼ばるモデルである. このモデルを参考にし, φ^4 モデルを含んだモデルを定義していく.
そのために, 各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して, $v_x \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}^{\in}(\mathbb{R}^{\lceil}))$ を取り, 固定する. この v_x で摂動を定義する:

$$H_j := \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\mathrm{SP}}(x)\tilde{\phi}(v_x)^j dx \ \ (j = 1, 2, 3, 4), \ \ H_{\mathrm{int}} := \sum_{j=1}^{4} \alpha_j H_j$$

ただし, H_j の積分はボッホナー積分の意味で定義される. χ_{SP} は空間切断であり, $\alpha_j \in \mathbb{R} \ \ (j = 1, 2, 3, 4)$ は結合定数である. また, H_{int} は相互作用 (interaction) 部分である.
こうして全ハミルトニアンは次で定義される:

定義 (特異摂動の入った Derezińnski-Gèrard モデル)

$$H := H_0 + H_{\mathrm{int}} \ \text{ on } \ \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$$

2 自己共役性

ハミルトニアン H は $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ 上の自己共役作用素であることが公理により要請されている.
(A.2): $\chi_{\mathrm{SP}}(x)\|v_x\|^4 \ \in L^1(\mathbb{R}^d_x)$
(A.3): 各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して, $[v_x(k)^*, v_x(k)] = 0 \ a.e.k \in \mathbb{R}^d$
(A.4): 各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して, $I \otimes \omega^{k/2} v_x \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, $\chi_{\mathrm{SP}}(x)\|I \otimes \omega^{k/2} v_x \| \in L^1(\mathbb{R}^d_x) \ \ k = -1, 1, 2$
(A.5): 各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して, $I \otimes \omega^{k/2}[v_x, A] \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, $\chi_{\mathrm{SP}}(x)\|I \otimes \omega^{k/2}[v_x, A]\| \in L^1(\mathbb{R}^d_x) \ \ k =, 1, 2$
(A.6): $\chi_{\mathrm{SP}}(x)\|v_x\|^j$, $\chi_{\mathrm{SP}}(x)\|(I \otimes \omega^{-1/2})v_x\| \in L^1(\mathbb{R}^d_x) \ \ (j = 1, 2, 3)$

定理 1 **(A.1)-(A.6)** を仮定する.
このとき, 全ての $\alpha_1, \alpha_2\alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_4 > 0$ に対して H は自己共役作用素である.

3 基底状態の存在性

系の安定性を裏付けるものとして**基底状態の存在性**がある. 数学としては以下のように定義していく:
作用素 H が下に有界なとき, スペクトルの最低値 (最低エネルギー) を考えることができる. このスペクトルの最低値を $E_0(H)$ と書くことにする. $E_0(H)$ が特に固有値のとき, $E_0(H)$ に対する固有ベクトル Ψ_0 が存在することになる. この Ψ_0 を**基底状態**と呼ぶ.

$$E_0(H) := \inf \sigma(H), \quad H\Psi_0 = E_0(H)\Psi_0 \ \ (\Psi_0 \neq 0)$$

さて, 今 $\inf_{k \in \mathbb{R}^d} \omega(k) = 0$ であるがこれはボソン粒子の質量が 0 であることを意味している. 一般的にボソン粒子の質量が 0 な系の基底状態の存在性を示すことは難しい. そのため, まずはボソン粒子に人工的に質量を加えた場合のハミルトニアンを定義し, 基底状態の存在性を示す.
ボソン粒子に質量 $m > 0$ を人工的に加えた, 新しいエネルギー作用素は $\omega_m(k) := \omega(k) + m$ と定義される.

質量の入ったボソン粒子を素にして作った第 2 量子化作用素 $\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega_m)$ を使い, ボソン粒子に人工的に質量を加えた系のハミルトニアン $H(m)$ を次のように定義する:

$$H(m) := A \otimes I + I \otimes \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega_m) + H_{\mathrm{int}}$$

さて, 質量が入った系のハミルトニアンに対しても基底状態の存在性を示すことは難しい.
基底状態の存在性を示す方法として, ハミルトニアン H について有限体積近似を行い, 近似したハミルトニアンが基底状態を持つことをまず示す.
その後, 元のハミルトニアンに極限をとり, 基底状態の存在性を示していく.

(A.7): ω は連続で $\lim_{|k|\to\infty} \omega(k) = \infty$ 更に, 正の定数 $C, \gamma > 0$ が存在して, 全ての $k, k' \in \mathbb{R}^d$ に対して $|\omega(k) - \omega(k')| \leq C|k - k'|^{\gamma}[1 + \omega(k) + \omega(k')]$ が成立する.

(A.8): A はコンパクトレゾルヴェントを持つとする.

(A.9): 各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して, $v_x \in L^2(\mathbb{R}^d_k, B(\mathcal{H}))$ が成立する.

定理 2　**(A.1)-(A.9)** を仮定する.
このとき, 全ての $\alpha_1, \alpha_2\alpha_3 \in \mathbb{R},\ \alpha_4 > 0$ に対して $H(m)$ は基底状態を持つ.

次にボソンの質量を 0 にとる極限を考えよう. $H(m)$ の規格化された基底状態を Ψ_m と書く:

$$H(m)\Psi_m = E_0(H(m))\Psi_m \ \ (\|\Psi_m\| = 1)$$

特に $\|\Psi_m\| = 1$ であるから, $\{\Psi_m\}_m$ はあるベクトル Ψ_0 に弱収束する部分列 $\{\Psi_{m_j}\}_j$ を持つ.
極限議論から $H\Psi_0 = E_0(H)\Psi_0$ であることは分かるため, Ψ_0 が H の基底状態の候補となる. 特に $\Psi_0 \neq 0$ を示せれば, Ψ_0 が H の基底状態となる.

(A.10)　各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して, $(I \otimes \omega^{-1})v_x \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$

(A.11)　$\chi_{\mathrm{SP}}\mathcal{A}\mathcal{B} \in L^1(\mathbb{R}^d_x),\ \ \mathcal{A} = \|\omega^{-1/2}v_x\|$ *or* $\|\omega^{1/2}v_x\|,\ \mathcal{B} = \|\omega^k v_x\|\ \ (k = \pm 1/2, 0, 1).$
$\chi_{\mathrm{SP}}\|\omega^{1/2}v_x\|C \in L^1(\mathbb{R}^d_x),\ \ C = \|(I \otimes \omega^l[v_x, A])\|,\ \ (l = 0, -1/2).$

補題 3　定数 $\gamma_j(0) \geq 0\ \ (j = 1, 2, 3, 4)$ が存在して, $\|\Psi_0\|^2 \geq 1 - (\sum_{j=1}^4 \gamma_j(0)\alpha_j)^2$ が成立する.
特に結合定数 $\alpha_j\ \ (j = 1, 2, 3, 4)$ が十分小さい場合, $\|\Psi_0\|^2 > 0$ が成立する.

定理 4　十分小さな結合定数 $|\alpha_j|\ \ (j = 1, 2, 3, 4)$ に対して, H は基底状態を持つ.

4　参考文献

[AH] On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model. J. Funct. Anal. 151 (1997), no. 2, 455-503.

[A] Arai, Asao A theorem on essential selfadjointness with application to Hamiltonians in nonrelativistic quantum field theory. J. Math. Phys. 32 (1991), no. 8, 2082-2088.

[DG] J.Dereziǹski;C.Gèrard;Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli-Fierz Hamiltonians. Rev. Math. Phys. 11 (1999), no. 4, 383-450.

[H] Hidaka, Takeru ;Existence of a ground state for the Nelson model with a singular perturbation. J. Math. Phys. 52 (2011), no. 2, 022102, 21 pp.

[O] Ohkubo, Atsushi Ground states of the massless Dereziǹski-Gèrard model. J. Math. Phys. 50 (2009), no. 11, 113511, 10 pp.

[T] Takaesu, Toshimitsu On generalized spin-boson models with singular perturbations. Hokkaido Math. J.39 (2010), no. 3, 317-349.

Fat Point の極小自由分解について

矢城 信吾

２０１４年３月

1　このポスターの概略

このポスターでは，超平面上にある Fat Point および，超曲面上の Fat Point の極小自由分解についての結果を紹介する．この結果は

1. Fat Point の定義イデアルを，超平面上にあると考えて計算する．
2. 射影空間 $\mathbb{P}^n$ 上にあると考えて計算する．

これらの視点から見た極小自由分解の Betti 数の関係を表したものである．以下，その構成方法を [FHL1] に沿って紹介する．

1.1　記号の準備および構成

k を任意標数の代数的閉体，$S = k[x_0, \cdots, x_n]$ を次数付き多項式環（ただし，$\deg x_i = 1$ $(i = 0, \cdots, n)$）とし，M を有限生成次数付き S 加群とする．このとき，次のような分解が存在する．各 $F_i = \bigoplus S^{\beta_{i,j}}(-j)$ としたとき

$$0 \to F_r \to \cdots \to F_1 \to F_0 (\to M \to 0).$$

この分解において，すべての i に対して，$\operatorname{Im} \varphi_i \subseteq \mathfrak{m} F_{i-1}$ が成立するとき，M の（S 加群としての）極小自由分解という．

また，有限生成次数付き S 加群 $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_k$ の第 d 次成分 $[M]_d$ は，有限次元 k ベクトル空間であるから，M の Hilbert 関数 H_M が次で定義される．

$$H_M(d) := \dim_k [M]_d.$$

この Hilbert 関数と Betti number の関係は次のようになる．

Proposition 1.1. $\{\beta_{i,j}\}$ を有限生成次数付き S 加群 M の *Betti number* とする．$B_j := \sum_{i\geq 0}(-1)^i\beta_{i,j}$ とすると，次のような関係が成立する．

$$H_M(d) = \sum_{j\geq 0} B_j \binom{n+d-j}{n}.$$

また，B_j は次のように書き換えられる．

$$B_j = H_M(j) - \sum_{k<j} B_k \binom{n+j-k}{n} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k H_M(j-k)\binom{n+1}{k}.$$

Proposition 1.2. $\{\beta_{i,j}\}$ を有限生成次数付き S 加群の *Betti number* とする．ある i に対して，$d\in\mathbb{N}$ がとれて，$\beta_{i,j}=0(\forall j<d)$ が成り立つとき，$\beta_{i+1,j+1}=0(\forall j<d)$ が成立する．

次に，Fat Point に関する構成方法である．k を任意標数の代数的閉体とし，$S' = k[x_0,\cdots,x_n]$ を次数付き多項式環（ただし，$\deg x_i = 1\ (i=0,\cdots,n)$）とする．また，$S = S'/(x_0) \cong k[x_1,\cdots,x_n]$ とおく．点 $p_i\in\mathbb{P}^n(i=1,\cdots,r)$ は超平面 $\mathbb{P}^{n-1}\cong H$ 上に点とし，部分スキーム $Z' = m_1p_1+\cdots+m_rp_r\subset\mathbb{P}^n$ とする．Z' を H 上の部分スキームとしてみるときには，$Z = m_1p_1+\cdots+m_rp_r\subset H$ とする．各 $Z'(i)$ を次のように定義する：

$$Z'(i) := Z(I(Z):(x_0^i))\subset\mathbb{P}^n$$

次に，$0\leq i\leq m=\max\{m_1,\cdots,m_r\}$ に対して

$$Z'_{m-i} = (m_1-i)_+p_1+\cdots+(m_r-i)_+p_r\subset\mathbb{P}^n$$
$$Z_{m-i} = (m_1-i)_+p_1+\cdots+(m_r-i)_+p_r\subset H$$

とする．（ただし，$n_+=\max_{n\in\mathbb{Z}}\{n,0\}$ である．）このとき，$Z'=Z'_m$ であり

$$\phi = Z'_0\subset Z'_1\subset\cdots\subset Z'_m = Z'$$

の包含関係がある．これより，$Z(i)=Z_{m-i}$ であり，$Z_{m-i}=Z'(i)\cap H\subset H\ (i\geq 0)$.

次に，Poincaré 多項式を定義する．Poincaré 多項式は，極小自由分解の Betti 数の関係を多項式で表したものである．

Definition 1.3.

$$0\to F_m\to\cdots\to F_1\to F_0\to I(X)\to 0$$

を $I(X)$ の極小自由分解とする．各 F_j を $F_j = \bigoplus_i S^{\beta_{i,j}}(-i)$ と表すと，*Poincaré* 多項式は次のように定義される．

$$P_X = \sum_{i,j} \beta_{i,j} T^i X^j \in \mathbb{Z}[T, X].$$

Example 1.4.

1. $X = \subset \mathbb{P}^n$（空集合）とすると，$I(X) = (1)$ だから $P_X = 1$.
2. $X = \{p\}$ を $\mathbb{P}^3$ 内の単純点とする (e.g. $p = (1:0:0:0), I(X) = (x_1, x_2, x_3)$)．このとき，$P_X = 3T + 3XT^2 + X^2T^3$ である．

1.2 主定理

これらの準備のもとで，Poincaré 多項式について次のことがいえる．

Theorem 1.5. *Fat point* の部分スキーム $Z = m_1p_1 + \cdots + m_rp_r \subset \mathbb{P}^n$ の *Poincaré* 多項式と各 Z'_i の *Poincaré* 多項式には次のような関係が成り立つ：

$$P_Z = T^m + (1 + XT)(\sum_{0<i\leq m} T^{m-i} P_{Z'_i}),$$

ただし，$m = \max\{m_1, \cdots, m_r\}$ である．

この証明には，次の (1)(2) のアイデアで行う．

(1) 各 $I(Z_i)$ の極小自由分解間に準同型写像を考える．
(2) それらを用いて，$I(Z')$ の極小自由分解との関連性を調べる．

まず，(1) について次の補題を考える．

Lemma 1.6. M, N を有限生成次数付き S 加群とし，$h : M \to N$ を S 加群としての準同型とする．F, G を自由 S 加群とし，全射な準同型 $\alpha : F \to M, \beta : G \to N$ を考える．このとき，$\beta \circ h_0 = h \circ \alpha$ となるような準同型写像 $h_0 : F \to G$ が存在する．h が次数 t の準同型であるとき，h_0 も次数 t の準同型となる．さらに，$h(M) \subset S_1N$ であれば，h_0 は $h_0(F) \subset S_1G$ が成り立つようにとることができる．

この補題を極小自由分解に利用することで次の補題をえる．

Lemma 1.7. M, N を有限生成次数付き S 加群とし，$h : M \to N$ を S 加群として

の準同型とする．$F_\bullet, G_\bullet$ をそれぞれ M, N の極小自由分解とする．このとき，準同型 $h_j : F_j \to G_j$ $(j \geq 0)$ が存在し可換である：

$$\begin{array}{ccc} F_j & \xrightarrow{\phi_j} & F_{j-1} \\ {\scriptstyle h_j}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle h_{j-1}} \\ G_j & \xrightarrow{\phi'_j} & G_{j-1} \end{array}$$

h が次数 t の準同型であるとき，h_j も次数 t の準同型となる．さらに，h が $h(M) \subset S_1 N$ であれば $h_j(F_j) \subset S_1 G_j$ $(j \geq 0)$ が成り立つようにとることができる．

この補題を用いて，次のような極小自由分解を構成することになる．各 $I_i := I(Z_i)$ 上の極小自由分解を $F_{i,\bullet} \to I(Z_i) \to 0$ とし，

$$F'_{i,j} := F_{i,j}(-(m-i)) \otimes_S S'$$
$$F'_0 := \bigoplus_{i=0}^{m} F'_{i,0}, F'_j := F'_{0,j} \oplus (\bigoplus_{i=1}^{m}(F'_{i,j} \oplus F'_{i,j-1}(-1))) \ (j \geq 1)$$

とおくと，$F'_\bullet \to I(Z') \to 0$ は $I(Z')$ の極小自由分解となる．最後に，今回拡張した定理について述べる．

Theorem 1.8. *Fat point* の部分スキーム $Z = m_1 p_1 + \cdots + m_r p_r \subset \mathbb{P}^n$ の *Poincaré* 多項式と各 Z'_i の *Poincaré* 多項式には次のような関係が成り立つ：

$$P_Z = T^m + (1 + XT^d)(\sum_{0<i\leq m} T^{m-i} P_{Z'_i}),$$

ただし，$m = \max\{m_1, \cdots, m_r\}$ であり，Z は d 次超曲面上の *Fat point* とする．

参考文献

[Ei1] Eisenbud, David; The geometry of syzygies. A second course in commutative algebra and algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, 229. Springer-Verlag, New York, 2005. xvi+243 pp. ISBN: 0-387-22215-4

[FHL1] Fatabbi, Giuliana; Harbourne, Brian; Lorenzini, Anna; Resolutions of ideals of fat points with support in a hyperplane, Proc. Amer. Math. Soc., 134 (2006), 3475-3483.

ON DIFFUSION PHENOMENA FOR THE LINEAR WAVE EQUATION WITH SPACE-DEPENDENT DAMPING

若杉　勇太
（大阪大学大学院理学研究科　数学専攻　博士後期 3 年）

1. 導入

本発表では，線形消散型波動方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \quad u + a(x)u_t = 0, && (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^n, \\ &(u,u_t)(0,x) = (u_0,u_1)(x), && x \in \mathbf{R}^n \end{aligned} \tag{1.1}$$

の解の漸近挙動について考える．ここで，$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\quad u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$．また，$u = u(t,x)$ は実数値の未知関数とし，$a(x) = \langle x \rangle \quad = (1+|x|^2) \quad ^{/2}$ $(0 \quad < 1)$ とする．さらに，簡単のため，$u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ かつ，適当な正定数 L に対し $\mathrm{supp}\,(u_0,u_1) \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \quad L\}$ を仮定する．方程式 (1.1) は，摩擦の大きさが場所によって変化するような媒質の中を伝わる波動現象を記述する一つのモデルである（波動方程式の導出，物理的な意味や，基本的な事柄については，[12] に詳しい解説がある）．目標は，(1.1) の解の $t \to +\infty$ における漸近形が，対応する熱方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} &a(x)v_t - \quad v = 0, && (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^n, \\ &v(0,x) = v_0(x), && x \in \mathbf{R}^n \end{aligned} \tag{1.2}$$

の適当な解で与えられることを示すことである．このように，消散型波動方程式の解が時間無限大において，対応する熱方程式の解に漸近する現象を拡散現象と言う．

ここで，Fourier 変換を用いた拡散現象の直感的な説明をしてみよう．方程式 (1.1) で $a(x) \equiv 1$ とおいた定数係数の消散型波動方程式

$$u_{tt} - \quad u + u_t = 0 \tag{1.3}$$

を考える．さらに簡単のため，初期値は $u_0 = 0$ として，$(u,u_t)(0,x) = (0,u_1)(x)$ という初期値を考える．(空間変数に関する）Fourier 変換は

$$\mathcal{F}[u(t,\cdot)](\ ) = \hat{u}(t,\ ) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{\ ix\ }\ u(t,x)dx$$

で定義され，

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x_j}(t,\cdot)\right](\ ) = i\ _j \mathcal{F}[u(t,\cdot)](\ )$$

という性質を持つ（ただし，$i = \sqrt{-1}$）．つまり，x_j 成分での微分という（複雑な）演算が，Fourier 変換を通すことにより，多項式 $i\ _j$ の掛け算という（簡単な）演算に変化する．

この Fourier 変換を用いて，まず熱方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} &v_t - \quad v = 0, && (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbf{R}^n, \\ &v(0,x) = v_0(x), && x \in \mathbf{R}^n \end{aligned} \tag{1.4}$$

の解表示を求めてみよう．方程式 (1.4) に Fourier 変換を施すと，　をパラメータとする常微分方程式

$$\hat{v}_t + |\ |^2 \hat{v} = 0, \quad \hat{v}(0,\ ) = \widehat{v_0}(\ )$$

が得られる．これは簡単に解くことができて，

$$\hat{v}(t,\ ) = e^{\ t|\ |^2} \widehat{v_0}(\ )$$

という表示を得る．

一方，方程式 (1.3) に Fourier 変換を施すと，

$$\hat{u}_{tt} + |\ |^2 \hat{u} + \hat{u}_t = 0.$$

という常微分方程式が得られる．初期条件は，$\hat{u}(0,\ ) = 0, \hat{u}_t(0,\ ) = \widehat{u_1}(\ )$ となる．この常微分方程式は陽的に解くことができて，

$$\hat{u}(t,\ ) = \frac{1}{\sqrt{1-4|\ |^2}}\ \ e^{\ t(1\ \ \sqrt{1\ \ 4|\ |^2})/2} + e^{\ t(1+\sqrt{1\ \ 4|\ |^2})/2}\ \ \hat{u_1}(\ ).$$

という表示を得る．この表示を用いて，t が十分大きいときの解の様子を調べてみよう．まず，$|\ |$ が十分大きいときには，上式から，$\hat{u}(t,\ )$ は $t \to +\infty$ で指数関数的に減衰することが分かる．次に，$|\ |$ が十分小さいときには，

$$\frac{1-\sqrt{1-4|\ |^2}}{2} = \frac{|\ |^2}{1+\sqrt{1-4|\ |^2}} \quad\ |\ |^2$$

となるので，$\hat{u}(t,\ )$ は $t \to +\infty$ で

$$\hat{u}(t,\ ) \quad e^{\ t|\ |^2} \hat{u_1}(\ )$$

とみなすことができる．この右辺は上で求めた熱方程式の解の Fourier 変換に他ならないから，これより消散型波動方程式 (1.3) の解は $t \to \infty$ で熱方程式 (1.4) の解に近づくことが見てとれる．

ここで関連する結果について述べておく．$a(x) = 1$ の場合には多くの結果があり，(1.1) の解が時間無限大において，初期値 $v_0 = u_0 + u_1$ を持つ (1.2) の解に漸近することが知られている（例えば Nishihara による論説 [4] や [3, 5, 10] を参照．また，非線形の問題については [6, 11] なども参照）．また，Wirth [9] は，時間変数に依存する摩擦項を持つ波動方程式

$$u_{tt} - \quad u + b(t)u_t = 0$$

を考察し，摩擦が効果的，すなわち，粗く言って $tb(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$ かつ $b(t)^{\ 1} \notin L^1((0,\infty))$（典型例として，$b(t) = (1+t)^{\ \beta}$ $(-1 < \ \ < 1)$ がある）のときに，解が時間無限大において対応する熱方程式

$$b(t)v_t - \quad v = 0$$

の解に漸近することを示した．

方程式 (1.1) で　>1 の場合には，Mochizuki [2] により，ある初期値 (u_0, u_1) に対し解は自由波動方程式

$$w_{tt} -\quad w = 0$$

の非自明な解に漸近することが示されている（時間変数に依存する摩擦の場合の対応する結果については [8] を参照）．

方程式 (1.1) で 0　　<1 の場合には，Todorova-Yordanov [7] により，解の L^2 評価

$$\|u(t)\|_{L^2}\quad C(1+t)^{\frac{n}{2}\frac{2\alpha}{\alpha}+\varepsilon}$$

が得られている．ただし，ε は任意の正数とする．ここで，$\mathbf{R}^n$ 上の関数 $f(x)$ に対して，その L^2 ノルム $\|f\|_{L^2}$ は，

$$\|f\|_{L^2} := \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

で定義される．彼らの証明と同様の方法で，熱方程式 (1.2) に対して，同様の評価

$$\|v(t)\|_{L^2}\quad C(1+t)^{\frac{n}{2}\frac{2\alpha}{\alpha}}$$

を示すことができる．ここで，減衰率 $-\frac{n}{2}\frac{2}{}$ は最適と思われる．実際，

$$G(t,x) = t^{\frac{n}{2}\frac{\alpha}{\alpha}} e^{\frac{|x|^2}{(2\ \alpha)^2 t}\frac{\alpha}{}}$$

という関数を考えると，これは方程式 $|x|\quad v_t -\quad v = 0$ および $\|G(t)\|_{L^2} = Ct^{\frac{n}{2}\frac{2\alpha}{\alpha}}$ を満たす．

2. 主結果

我々の主結果は次で与えられる．

定理 1. u を初期値問題 (1.1) の解，v を初期値 $v_0 = u_0 + \frac{1}{a(x)}u_1$ を持つ方程式 (1.2) の解とする．このとき，

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^2} = o(t^{\frac{n}{2}\frac{2\alpha}{\alpha}})$$

が成り立つ．

注意 2. もう少し強く，

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^2} = O(t^{\frac{n}{2}\frac{2\alpha}{\alpha}\quad\frac{1}{2}\frac{\alpha}{}+\varepsilon})$$

（ε は任意の正数）を示すことができる．

定理 1 の証明は，以下に述べる高階導関数に対する重み付きエネルギー評価を用いることによってなされる．まず

$$(t,x) = A\frac{\langle x\rangle^2}{1+t},\quad A = \frac{1}{(2-\ )^2(2+\delta)} \tag{2.1}$$

とおく（δ は正定数で，後で定める）．非負整数 k に対して，k 階の重み付き初期エネルギーを

$$I_k := \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\psi(0,x)} \left(u_0(x)^2 + \sum_{j=0}^{k} (|\partial_t^{j+1} u(0,x)|^2 + |\nabla_x \partial_t^j u(0,x)|^2) \right) dx$$

で定める．ここで，$\partial_t^j u = \frac{\partial^j u}{\partial t^j}$, $\nabla_x u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ なる記号を用いた．このとき，次のエネルギー評価が成立する．

定理 3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，以下が成り立つ：関数　を (2.1) で定義し，k を非負整数とする．このとき，ある定数 $C > 0$ が存在して，初期値問題 (1.1) の解 u に対し，次の評価が成立する．

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{2\psi(t,x)} a(x) |\partial_t^k u(t,x)|^2 dx \quad CI_k(1+t)^{\frac{n-\alpha}{2-\alpha}\,2k+\varepsilon},$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{2\psi(t,x)} |\nabla_x \partial_t^k u(t,x)|^2 dx \quad CI_k(1+t)^{\frac{n-\alpha}{2-\alpha}\,2k\;\;1+\varepsilon}.$$

注意 4. Todorova-Yordanov [7] により，$k = 0$ の場合の評価は既に示されている．定理 2 は，[7] の結果の高階エネルギーに対する拡張である．

今後の課題として，まず定理 1 の減衰率が最良なのかという問題が挙げられる．また，　$= 1$ の場合の漸近形を求めること（Ikehata-Todorova-Yordanov [1] により，解の減衰率は求められている）や，非線形項を持つ場合，摩擦が時間変数にも依存する場合など，基本的な問題がまだ多く残されている．

References

[1] R. Ikehata, G. Todorova, B. Yordanov, *Optimal decay rate of the energy for wave equations with critical potential*, J. Math. Soc. Japan **65** (2013), 183-236.

[2] K. Mochizuki, *Scattering theory for wave equations with dissipative terms*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **12** (1976/77), 383-390.

[3] T. Narazaki, *L^p-L^q estimates for damped wave equations and their applications to semi-linear problem*, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 585-626.

[4] K. Nishihara, *Diffusion phenomena of solutions to the Cauchy problems for a damped wave equation* (*Japanese*) , Sūgaku **62** (2010), no. 2, 164-181.

[5] K. Nishihara, *$L^p - L^q$ estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application*, Math. Z. **244** (2003), 631-649.

[6] G. Todorova, B. Yordanov, *Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping*, J. Differential Equations **174** (2001), 464-489.

[7] G. Todorova, B. Yordanov, *Weighted L^2-estimates of dissipative wave equations with variable coefficients*, J. Differential Equations **246** (2009), 4497-4518.

[8] J. Wirth, *Wave equations with time-dependent dissipation. I. Non-effective dissipation*, J. Differential Equations **222** (2006), 487-514.

[9] J. Wirth, *Wave equations with time-dependent dissipation. II. Effective dissipation*, J. Differential Equations **232** (2007), 74-103.

[10] H. Yang, A. Milani, *On the diffusion phenomenon of quasilinear hyperbolic waves*, Bull. Sci. Math. **124** (2000), no. 5, 415-433.

[11] Qi S. Zhang, *A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping: the critical case*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), 109-114.

[12] 井川満『双曲型偏微分方程式と波動現象』，岩波書店，2006.

E-mail address: y-wakasugi@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

複素スカラー場が自己相互作用する系における基底状態

和田　和幸　(北大理)*

2014/3/4

1　問題の動機

2013 年ノーベル物理学賞受賞者は、『ヒッグス粒子の存在』を提唱した P.Higgs 氏と F.Englert 氏の 2 方に選ばれました。このヒッグス粒子の存在に関しては、いわゆる『自発的対称性の破れ（以下 SSB と略)』と呼ばれる概念が重要な役割を果たしています。物理の教科書ではこの SSB を起こす模型の例がいくつか挙げられていますが、本当にそれらの例は数学的な視点からしても SSB が起こっているのだろうか？と疑問が私の動機づけであります。SSB に関する数学的な結果は幾つかありますが、全体として SSB について解明出来ているとは言いがたいと感じております。私は SSB を起こす面白い例を作りたいという動機の下で、以下に紹介する模型の性質を調べております。物理的な説明はこのテクニカルレポートでは収まりきらないので、割愛させて頂きます。場の量子論の文脈で SSB が起こるかどうかを議論するには、まず基底状態を準備しなくてはなりません。それは基底状態の存在性の問題そのものになります。このテクニカルレポートではその問題に部分的な答えを与えるべく言葉の定義を解説し、主結果を述べさせていただきます。場の量子論関連の数理は、記号や数式の定義が多いのが宿命です。このテクニカルレポートを片手に、ポスターを眺めて頂ければ幸いです。以下に紹介する記号の説明は基本的な性質は [1] によくまとめられてあります。

2　言葉の定義

スピンが 0 で電荷を持つ粒子と、スピンが 0 で反対の電荷を持つ反粒子が d-空間次元に一つずつ共存する系の状態のヒルベルト空間として、次の $\mathscr{K}$ がとれます。

$$\mathscr{K} := L^2(\mathbb{R}^d) \oplus L^2(\mathbb{R}^d) \tag{1}$$

この時、粒子と反粒子が無数に共存する系のヒルベルト空間は次の $\mathscr{H}$ で与えられます。

$$\mathscr{H} := \oplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n \mathscr{K} = \{\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} : \Psi^{(n)} \in \otimes_s^n \mathscr{K}, \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\Psi^{(n)}\right\|_{\otimes^n \mathscr{K}}^2 < \infty\} \tag{2}$$

ここで、$\otimes_s^n \mathscr{K}$ は $\mathscr{K}$ の n 重対称テンソル積を表し、物理的には粒子と反粒子がそれぞれ n 個ずつ共存している系の状態を表現します。このヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ には、次のような特別なベクトル Ω が存在します。

$$\Omega := \{1, 0, 0, 0, \cdots\} \tag{3}$$

Ω はフォック真空と呼ばれ、粒子も反粒子もいない状態を表現します。$\otimes_s^0 \mathscr{K} := \mathbb{C}$ と約束します。$\mathscr{H}$ の部分空間として、有限粒子部分空間 $\mathscr{H}_0$ を次で定義します。

$$\mathscr{H}_0 := \{\Psi \in \mathscr{H} : \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s,t,} \Psi^{(n)} = 0 \quad \text{for all} \quad n > N\} \tag{4}$$

$\mathscr{H}_0$ は、$\mathscr{H}$ の稠密な部分空間となります。

場の量子論では、粒子や反粒子は絶えず生成や消滅を繰り返していると考えます。そこで生成作用素、消滅作用素

* E-mail; wadakazu(at)math.sci.hokudai.ac.jp

を導入します。まず $u,v\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し、生成作用素 $A(u\oplus v)^\dagger$ を次のように定義します。

$$D(A(u\oplus v)^\dagger):=\{\Psi\in\mathscr{H}:\sum_{n=0}^{\infty}\left\|(A(u\oplus v)^\dagger\Psi)^{(n)}\right\|^2_{\otimes_s^n\mathscr{H}}<\infty\}\tag{5}$$

$$(A(u\oplus v)^\dagger\Psi)^{(n)}:=\sqrt{n}S_n((u\oplus v)\otimes\Psi^{(n-1)})\quad(n\geq 1)\qquad(A(u\oplus v)^\dagger\Psi)^{(0)}:=0\tag{6}$$

ここで、線形作用素 T に対し、$D(T)$ は T の定義域を表し、S_n は n 次の対称化作用素を表します。$A(u\oplus v)^\dagger$ はざっくりいうと、『粒子の状態が u, 反粒子の状態が v である時、それらが共存した状態 $u\oplus v$ を生成させなさい』という命令になります。$\mathscr{H}_0\subset D(A(u\oplus v)^\dagger)$ なので、特に $A(u\oplus v)^\dagger$ は稠密に定義されています。そこで、消滅作用素 $A(u\oplus v)$ を以下のように生成作用素の共役として定義します。

$$A(u\oplus v):=(A(u\oplus v)^\dagger)^*\tag{7}$$

こうして生成作用素と消滅作用素による族 $\{A(u\oplus v),A(z\oplus w)^\dagger:u,v,z,w\in L^2(\mathbb{R}^d)\}$ は $\mathscr{H}_0$ 上で次の正準交換関係と呼ばれるものを満たす事がよく知られています；

$$[A(u\oplus v),A(z\oplus w)]=[A(u\oplus v)^\dagger,A(z\oplus w)^\dagger]=0,\qquad[A(u\oplus v),A(z\oplus w)^\dagger]=\langle u\oplus v,z\oplus w\rangle_{L^2\oplus L^2}.\tag{8}$$

ここで、$[X,Y]:=XY-YX$ です。ヒルベルト空間 H 上で、$\mathscr{H}_0$ よりも狭くて稠密な部分空間 $\mathscr{H}_{\rm fin}(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ を以下で定めます。

$$\mathscr{H}_{\rm fin}(C_0^\infty(\mathbb{R}^d)):=\mathrm{Span}\{\Omega,A(u_1\oplus v_1)^*\cdots A(u_n\oplus v_n)^*\Omega:n\in\mathbb{N},u_j\oplus v_j\in(C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\oplus(C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\}.\tag{9}$$

この部分空間は、作用素を解析するにあたり非常に有用な部分空間です。$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数で、そのサポートがコンパクトなものの全体を表します。

次に場の作用素を導入します。$f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し、線形作用素 $\phi(f)$ を次で定義します。

$$\phi(f):=\frac{1}{\sqrt{2}}(A(f\oplus 0)+A(0\oplus f)^\dagger).\tag{10}$$

$1/\sqrt{2}$ は後の便宜のための規格化定数です。この作用素はざっくり言うと『粒子を状態 f で 1 つずつ消して和をとりなさい + 状態 f の反粒子を生成させなさい』という命令になっております。$\mathscr{H}_0\subset D(\phi(f))$ がわかるので、ここから $\phi(f)$ の閉方と共役が定義できます。$\phi(f)$ の閉方も同じ記号で表す事にします。この時 von Neumann の定理から、$\phi(f)\phi(f)^*$ と $\phi(f)^*\phi(f)$ は $\mathscr{H}$ 上の非負自己共役作用素となります。$\phi(f)^*$ の具体的な作用は、$\mathscr{H}_0$ 上で、次のようになります。

$$\phi(f)^*=\frac{1}{\sqrt{2}}(A(f\oplus 0)^\dagger+A(0\oplus f))\qquad(\text{on}\quad\mathscr{H}_0)\tag{11}$$

この作用素はざっくり言うと先程とは逆に『状態 f の粒子を生成させなさい + 反粒子を状態 f で 1 つずつ消して和をとりなさい』という命令になっております。場の作用素の族 $\{\phi(f),\phi(g)^*:f,g\in L^2(\mathbb{R}^d)\}$ は次のような交換関係を $\mathscr{H}_0$ 上で満たします。

$$[\phi(f),\phi(g)]=[\phi(f^*),\phi(g)^*]=0\qquad[\phi(f),\phi(g)^*]=i\mathrm{Im}\langle f,g\rangle.\tag{12}$$

1 粒子のハミルトニアンを非負の掛け算作用素 ω で表すことにします。通常は $\omega(k)=|k|$ や $\omega(k)=\sqrt{k^2+m^2}(m>0)$ が採用されますが、数学的な一般性を持たせる為に、ω は後に述べるようないくつかの性質を満たす非負の可測関数としておきます。この時無数の粒子と反粒子が相互作用をせずに存在している系のハミルトニアン $d\Gamma_{\rm b}(\omega\oplus\omega)$ は、以下で定義されます。

$$d\Gamma_{\rm b}(\omega\oplus\omega)=0\oplus\oplus_{n=1}^\infty(\omega\oplus\omega)^{(n)}\tag{13}$$

$$(\omega\oplus\omega)^{(n)}:=\sum_{j=1}^n\overline{1\otimes\cdots\otimes 1\otimes\underbrace{(\omega\oplus\omega)}_{j-th}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1\restriction\hat{\otimes}_s^nD(\omega\oplus\omega)}\tag{14}$$

ここで $\hat{\otimes}_s^n$ は代数的対称テンソル積を表し、作用素 T と部分空間 D に対して $T\restriction D$ は T の D への制限を表します。言葉の説明はある程度終わりましたので、次節で模型を導入します。特に、上の定義で $\omega\oplus\omega$ の部分を $1\oplus 1$ としたものを個数作用素といいます。

3　模型の導入と仮定

$x \in \mathbb{R}^d$ に対し、$f_x \in L^2(\mathbb{R}^d)$ となるベクトルの集合 $\mathscr{F} = \{f_x\}_{x\in\mathbb{R}^d} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ を導入します。$\chi_{\rm sp}$ を非負の可測関数で、$L^1(\mathbb{R}^d)$ に属するものとします。今回のテクニカルレポートで主役となるハミルトニアン H は、次のようになります。

$$H := d\Gamma_{\rm b}(\omega \oplus \omega) + \overline{\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\rm sp}(x)\big\{\mu\phi(f_x)^*\phi(f_x)dx + \lambda(\phi(f_x)^*\phi(f_x))^2\big\}dx} \tag{15}$$

ここで、$\mu \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ は結合定数で、相互作用の強さを表します。特に $\mu < 0$ の時は積分の中身が直観的にはいわゆる Higgs ポテンシャル（ワイン瓶の底のような W の形をしたポテンシャル）になっており、一番興味のある対象です。[3] では $\chi_{\rm sp} \equiv 1$ の場合を *Goldstone* 模型と呼んでいます (但し数学的な厳密さはありません)。積分は $\mathscr{H}$-値強 Bochner 積分の意味で取ります。定義域を書くと、

$$D(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\rm sp}\big(\phi(f_x)^*\phi(f_x)\big)^\sharp dx) = \{\Psi \in \mathscr{H} : \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\rm sp}(x)\big\|\big(\phi(f_x)^*\phi(f_x)\big)^\sharp\Psi\big\|_{\mathscr{H}}dx < \infty\} \ \ (\sharp = 1 \ \text{ or } \ 2) \tag{16}$$

上の定義域で、特にノルムの 1 乗の積分が有限になるために $\chi_{\rm sp} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ が重要です。本来は $\chi_{\rm sp} \equiv 1$ としたいのですが、$\mathscr{H}$ 上の線形作用素として定義できなくなるので、今は仕方なく入れざるを得ないといった所です。$\chi_{\rm sp} \equiv 1$ とできるかは、非常に重要で難しい問題です。$\chi_{\rm sp}$ は空間切断と呼ばれています。

物理的に興味のある具体例として次のものを想定しています。

$$\omega(k) = |k| \tag{17}$$

$$f_x(k) := \frac{\hat{\chi}_{\rm uv}(k)}{\sqrt{(2\pi)^d|k|}}e^{-ikx} \quad (\text{a,e,}k \in \mathbb{R}^d) \tag{18}$$

ここで、$\hat{\chi}_{\rm uv}$ は実数値関数 $\chi_{\rm uv}$ のフーリエ変換で、$\hat{\chi}_{\rm uv}/\sqrt{|\cdot|} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ となるものを取ります。ここでも $\chi_{\rm uv} \equiv 1$ としたいのですが、そうすると $f_x \notin L^2(\mathbb{R}^d)$ となってしまうので仕方なく入れなければいけません。$\chi_{\rm uv}$ を紫外切断と言います。($|k|$ が十分大きい所が紫外線の領域に対応しています。)

以上の下で、仮定を幾つか設けます。

仮定 1 (ω に関する仮定)
(1)$\omega(k) = 0$ となる k は原点のみ。
(2) ある定数 $C > 0$ とある $\alpha > 0$ が存在して、$|\omega(k) - \omega(k')| \le C|k - k'|^\alpha \quad (\text{for} \quad k, k' \in \mathbb{R}^d)$
(3)$\omega(k) \to \infty \quad (\text{as}|k| \to \infty)$

仮定 2 ($\mathscr{F}$ に関する仮定)
(1) 任意の $\sigma \ge 0$ に対し、$\mathrm{Im}\langle f_x^\sigma, f_y^\sigma\rangle = 0 \quad (\text{for all } x, y \in \mathbb{R}^d) \quad$ ここで、$f_x^\sigma := f_x\chi\{k \in \mathbb{R}^d : \omega(k) \ge \sigma\}$
(2)$f_x \in D(\omega) \cap D(\omega^{-5/4})$ で、$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\|f_x\|, \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\|\omega^{-5/4}f_x\|, \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\|\omega f_x\| < \infty$
(3) ほとんど至る所の $k \in \mathbb{R}^d$ に対し、対応 $x \mapsto f_x(k)$ は可測で、$ess.sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f_x(k)| < \infty$

4　主結果

定理 1　任意の μ,λ に対し、H は下に有界な自己共役作用素で、$\mathscr{H}_{\rm fin}(C_0^\infty)$ 上で本質的自己共役である。

一般に自己共役作用素 T が下に有界であるならば、最低エネルギー $E_0(T)$ が以下で定義されます。

$$E_0(T) := \inf\sigma(T) \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

$\sigma(T)$ は T のスペクトル集合を表します。$E_0(T)$ が T の固有値である時、T は基底状態を持つと言います。H が基底状態を持つかは自明ではありません。しかし、仮定の下でその存在性が言えます。

定理 2 任意の μ,λ に対して、H は基底状態を持つ。

証明の概略

定理 1 の証明は [5] の手法を応用します。まず [1] の結果を用いて狭い部分空間上で本質的自己共役である事を示します。次に H_0, H_1, H_2 それぞれが H に対して相対有界であることを示す事により証明は達成されます。定理 2 の証明は、まず $\sigma > 0$ に対し赤外正則化ハミルトニアン H_σ と、そこから更に”人為的な質量”を入れたハミルトニアン $\tilde{H}_\sigma$ を次で定義します。

$$\tilde{H}_\sigma := d\Gamma_{\rm b}(\omega_\sigma \oplus \omega_\sigma) + \overline{\mu \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\rm sp}(x)\phi(f_x^\sigma)^*\phi(f_x^\sigma)dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\rm sp}(x)(\phi(f_x^\sigma)^*\phi(f_x^\sigma))^2 dx} \tag{20}$$

$$H_\sigma := d\Gamma_{\rm b}(\omega \oplus \omega) + \overline{\mu \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\rm sp}(x)\phi(f_x^\sigma)^*\phi(f_x^\sigma)dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\rm sp}(x)(\phi(f_x^\sigma)^*\phi(f_x^\sigma))^2 dx} \tag{21}$$

但し ω_σ は正値で無限遠で発散する Hölder 連続な関数です。手順としましては、

1)$\tilde{H}_\sigma$ が基底状態を持つ事を示す。　　2)H_σ が基底状態を持つ事を示す。

3)$\sigma \to 0$ の極限を考察し、H が基底状態を持つ事を示す。

という流れになります。特に (1) は 1 の分割を用いた、いわゆる局所化の議論を用いますが、その時 *Energy-Number Estimate* と呼ばれる補題が、様々な模型を調べる際に重要な役割を果たしています。しかし今回考察する模型ではハミルトニアンの相互作用部分と、個数作用素の交換子が上手く評価できず、*Energy-Number Estimate* が使えません。今回はこの補題を用いる事なく $\hat{H}_\sigma$ の基底状態の存在を示す事ができた点が改良点であると言えます。今回は、1) の証明に重点を置きながら発表させていただきます。

参考文献

[1] 新井朝雄,『フォック空間と量子場（上, 下)』, 日本評論社,2000

[2] A.Arai, ”A theorem on essential self-adjointness with application to Hamiltonians in nonrelativistic quantum field theory”, J.Math.Phys.**32**, 2082, (1991)

[3] C.Gerard,”Spectral and Scattering Theory of Space-cutoff Charged $P(\varphi)_2$ Models”, Lett.Math.Phys,**92**, 197-220,(2010)

[4] 久後汰一郎,『ゲージ場の量子論 (1,2)』, 培風館,1989

[5] T.Hidaka,”Existence of a ground state for the Nelson model with a singular perturbation”, J.Math.Phys, **52**, 022102, (2011)

一点位相付量子ウォークの極限定理

渡邊隆子 (お茶の水女子大学大学院　理学専攻　物理科学領域)

はじめに

ランダムウォークは，酔っ払いの挙動，拡散現象，株価の変動など日常の多くの現象を記述し解析するのに重要な役割を担ってきた. 近年,「量子ウォーク」がランダムウォークの量子版として量子系で同等の立場になることが期待されており，様々な側面から研究が行われている．量子ウォークは，1988 年に量子確率論の立場から Gudder [1] により導入され，2000 年代以降，量子コンピュータの発展とともに急速に研究されている新しい研究分野である．

量子ウォークには，離散時間と連続時間のモデルがある [2]．連続時間の量子ウォークは，時間発展の規則がシュレディンガー方程式によって記述されることから量子散乱などの物理現象との対応が考えられる．一方，量子コンピュータの発展に伴い複雑ネットワーク上の離散時間量子ウォークの解析は今後ますます必要になってくることが予想される．

近年，量子ウォークの理論研究，特に量子ウォークの漸近挙動に関する研究が活発に行われている．離散時間量子ウォークには，古典系のランダムウォークには見られない「局在化」現象と「逆鐘型」の特異な確率分布が見られる．これらは「量子暗号」や「情報伝達の速さ」の観点からも量子ウォークが着目される所以であろう.

量子ウォークの漸近挙動は，局在化に対応する時間平均極限定理と逆鐘型の確率分布に対応する弱収束極限定理によって記述される [2]．これらの極限定理が厳密に得られているのは，一次元上の一様量子ウォーク，原点のみユニタリ行列が異なる量子ウォーク，三状態の Grover ウォークのみである [2, 3].

他方，量子ウォークからはいくつかの測度を構成出来る [2]．その一つに「定常測度」がある．Konno et al. [2] によれば，一次元上のある種の 2 状態量子ウォークに対しては時間平均極限測度と定常測度は互いに深く関係する.

量子ウォークの定義

量子ウォークの中でも最も活発に研究がされている一次元格子上の最近接に量子ウォーカーが移動する 2 状態の量子ウォークの定義と基本的な性質をまとめる．量子ウォークは全空間 $\mathcal{H}$ とその上の時間発展作用素，および分布列から成り立っている：

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_C.$$

但し，$\mathcal{H}_P = Span\{|x\rangle : x \in \mathbb{Z}\}$ は量子ウォーカーの場所を，$\mathcal{H}_C = Span\{|J\rangle : J \in \{L, R\}\}$ は量子ウォーカーの自由度をそれぞれ表すヒルベルト空間である. 非自明な時間発展を与えるユニタリ作用素を定義するために，量子ウォーカーの場所を表す $\mathcal{H}_P$ に 2 次の自由度を持つ空間 $\mathcal{H}_C$ が付随する.

一次元上の二状態量子ウォークは,「量子コイン」とも呼ばれる以下のような 2×2 のユニタリ行列 U により定義される.

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U(2).$$

但し，$a, b, c, d \in \mathbb{C}$. U のユニタリ性から

$$|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1,\ a\overline{b} + c\overline{d} = 0,\ c = -\Delta\overline{b},\ d = \Delta\overline{a}$$

が成立する．また，$|\Delta| = 1$ である．量子ウォーカーは「左向き」と「右向き」の二つのカイラリティ $|L\rangle$ と $|R\rangle$ を持ち，それぞれ量子ウォーカーの動く向きに対応している．実際，

$$|L\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |R\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおくと，$U|L\rangle = a|L\rangle + c|R\rangle, \quad U|R\rangle = b|L\rangle + d|R\rangle$ となる．量子ウォークでは量子ウォーカーが右に移動する重み Q，及び左に移動する重み P を

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}, \quad P + Q = U$$

で定義される 2×2 の正方行列 $P,\ Q$ でそれぞれ定義する．ここで，U は 2×2 のユニタリ行列であることに注意する．量子ウォークは，古典系のランダムウォークの最も自然な量子化とみなすことが出来る．

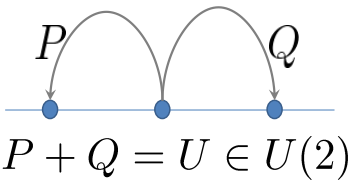


図 1: 量子ウォーク

「アダマールウォーク (Hadamard walk)」は量子ウォークの中で最も活発に研究されてきたモデルで，以下のユニタリ行列で定義される．

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

H は「アダマール行列」と呼ばれる．アダマールウォークはそのユニタリ行列の各成分の絶対値の二乗が $1/2$ であることから，左右に確率 $1/2$ でウォーカーが移動する古典の対称なランダムウォークに対応する量子ウォークと考えることも出来るが，その確率分布の対称性は初期量子ビットに強く依存する [3].

時間発展と確率分布

量子ウォークの時間発展と量子ウォーカーの存在確率を定義する．量子ウォークの時間発展は，ユニタリ行列と初期状態によって完全に決定される．特性関数，k 次モーメント，極限定理などに対して初期状態がどのように関わってくるかを調べることは，量子ウォークの研究において極めて重要なテーマである．原点での初期量子コイン状態が $\varphi \in \mathbb{C}^2$ で，時刻 n での量子ウォークを X_n とおく．ここで，量子ウォーカーの時刻 t 場所 x における確率振幅 $\Psi_t(x)$ を

$$\Psi_t(x) = \begin{bmatrix} \Psi_t^{(L)}(x) \\ \Psi_t^{(R)}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

と書く．$\Psi_t^{(L)}(x)$ が確率振幅の左向きのカイラリティ，$\Psi_t^{(R)}(x)$ が確率振幅の右向きのカイラリティにそれぞれ対応する．即ち，量子ウォークでは各時刻 t において各場所 x に確率振幅 $\Psi_t(x)$ が配置されていると考える．このとき，量子ウォーカーは以下の漸化式に従って時間発展をする．

$$\Psi_{t+1}(x) = P_{x+1}\Psi_t(x+1) + Q_x\Psi_t(x-1).$$

さらに，時刻 t 場所 x に量子ウォーカーが存在する確率 $P(X_t = x)$ を

$$P(X_t = x) = |\Psi_t^{(L)}(x)|^2 + |\Psi_t^{(R)}(x)|^2$$

で定義する．これにより量子ウォークの確率分布が定義される．

量子ウォークの測度

本研究の主題である定常測度と時間平均極限測度を導入する．時刻 n での系全体の確率振幅ベクトルを

$$\Psi_n = {}^T[\cdots, \Psi_n^L(-1), \Psi_n^R(-1), \Psi_n^L(0), \Psi_n^R(0), \Psi_n^L(1), \Psi_n^R(1), \cdots]$$

とおく．また，$U^{(s)}$ を系全体の時間発展を決定する $\infty \times \infty$ のユニタリ行列とし，系の初期状態が Ψ_0 のときの場所 x 時刻 n に量子ウォーカーが存在する測度 $\mu_n(x)$ を以下で定める．

$$\mu_n(x) = \|\Psi_n(x)\|^2 = |\Psi_n^L(x)|^2 + |\Psi_n^R(x)|^2.$$

このとき，写像 $\phi : (\mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$ を以下のように定める．

$$\Psi = {}^T\left[\cdots, \begin{bmatrix}\Psi^L(-1)\\ \Psi^R(-1)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\Psi^L(0)\\ \Psi^R(0)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\Psi^L(1)\\ \Psi^R(1)\end{bmatrix}, \cdots\right] \in (\mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}}$$

に対して，$\mu(x) = \phi(\Psi)$ を

$$\mu(x) = \phi(\Psi(x)) = |\Psi^L(x)|^2 + |\Psi^R(x)|^2 \quad (x \in \mathbb{Z})$$

で定義する．さらに，以下のような測度の集合 $\mathcal{M}_s$ を導入する．

$$\mathcal{M}_s = \{\phi(\Psi_0) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \setminus \{\mathbf{0}\} : \Psi_0 \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}\text{は，任意の } n \geq 0 \text{ に対して, } \phi((U^s)^n\Psi_0) = \phi(\Psi_0)\}.$$

$\mathcal{M}_s$ の元を「定常測度 (stationary measure)」と呼ぶ．

次に，$\mu_n(x)$ に $n \to \infty$ の極限が存在するとき，その極限 $\mu_\infty(x)$ を以下で定義する．

$$\mu_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(x) \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

さらに，$\mu_n(x)$ の時間平均とその極限 $\overline{\mu}_\infty(x)$ を以下で定める．

$$\overline{\mu}_T(x) = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{T-1} \mu_n(x), \quad \overline{\mu}_\infty(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{T-1} \mu_n(x).$$

そして，以下のような測度の集合 $\overline{\mathcal{M}}_\infty$ を導入する．

$$\overline{\mathcal{M}}_\infty = \{\overline{\mu}_\infty = \overline{\mu}_\infty^{\Psi_0} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \setminus \{0\} : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}\}.$$

$\overline{\mu}_\infty^{\Psi_0}$ は初期状態依存性を表し，$\overline{\mathcal{M}}_\infty$ の要素を「時間平均極限測度 (time-averaged limit mesure)」と呼ぶ．

局在化

量子ウォーク特有の性質として，時間が十分に経過したときに量子ウォーカーが出発点に戻る確率が正になる「局在化」がある．一次元上の場所に依存しない離散時間量子ウォークに関しては，2 状態では局在化が起こらず 3 状態以上で局在化が起こり得ることが知られている [3]．局在化は時間平均極限測度によって以下のように定式化される．

定義 1. 量子ウォーカーが原点から出発する離散時間量子ウォークに対して局在化が起こるとは，以下が成り立つことと定義する．

$$\overline{\mu}_{\infty}(0) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} P(X_t = 0) > 0.$$

弱収束の極限定理

$abcd \neq 0$ のときの量子ウォーク X_n に対する新しいタイプの極限定理を紹介する．この極限定理は古典系の中心極限定理に対応しており，逆鐘型の確率分布を表す．

定理 1. $n \to \infty$ のとき，

$$\frac{X_n}{n} \Rightarrow Z.$$

となる．ここで，Z の密度関数は $x \in (-|a|, |a|)$ に対して，

$$f_K(x;a) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{\pi(1-x^2)\sqrt{|a|^2-x^2}} I_{(-|a|,|a|)}(x) \left\{ 1 - \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{a\alpha\overline{b\beta}}{|a|^2} \right) x \right\}.$$

$|x| \geq a$ に対しては，$f(x;a) = 0$. 但し，$I_A(x)$ は定義関数であり，$I_A(x) = 1$ $(x \in A)$, $I_A(x) = 0$ $(x \in X \setminus A)$ で定義される．また，$Y_n \Rightarrow Y$ は，Y_n が確率変数 Y に弱収束することを意味する．

参考文献

[1] Gudder, S. P.: Quantum Probability, Academic Press Inc., CA (1988).
[2] N. Konno, T. Luczak, and E. Segawa: Limit measures of inhomogeneous discrete-time quantum walks in one dimension, Quantum Information Processing, **12**, 33 − 53 (2013).
[3] N. Konno: Quantum walks and quantum cellular automata, Springer, **5191**, 12 − 21 (2008).
[4] A. Wojcik, T. Luczak, P. Kurzynski, A. Grudka, T. Gdala, and M. Bednarska-Bzdega: Trapping a particle of a quantum walk on the line, Phys. Rev. A, **85**, 012329 (2012).
[5] N. Konno and T. Watanabe: The stationary measure of a space-inhomogeneous quantum walk on the line, arXiv:1309.3054 (2013).

索 引

■ア行
相原 祐太, 73
足立 崇英, 255
李 正勲, 113
池田 創一, 239
石田 敦英, 11
大城 和秀, 163
岡崎 建太, 185
緒方 勇太, 217
小川 駿, 285
奥田 喬之, 35
■カ行
可香谷 隆, 93
加瀬 遼一, 231
金川 哲也, 289
加葉田 雄太朗, 127
河田 貴久, 51
川本 昌紀, 85
金城 就実, 221
源嶋 孝太, 263
光明 新, 279
小西 正秀, 251
■サ行
坂田 繁洋, 59
坂本 真, 293
佐々木 多希子, 151
佐藤 一樹, 275
佐野 めぐみ, 101
スリアジャヤ アデ イルマ, 271
関坂 歩幹, 171
瀬戸 樹, 209
■タ行
高岡 邦行, 201
高橋 剛, 89
高橋 甫宗, 109
只野 誉, 19
田端 亮, 297
塚本 靖之, 189
土田 旭, 123
寺田 知幸, 301
十鳥 健太, 159
冨澤 佑季乃, 167
■ナ行
内藤 貴仁, 177
内免 大輔, 105
中島 秀斗, 259
永幡 裕, 3
楢崎 政宏, 117
縫田 光司, 27
野口 朗, 139
野口 和範, 193
■ハ行
橋爪 惠, 197
畑中 美帆, 155
原口 忠之, 181
日高 建, 81
平島 拓真, 267
二口 伸一郎, 77
布田 徹, 69
船川 大樹, 305
穂坂 秀昭, 235
本多 俊一, 131
■マ行
松岡 謙晶, 243
嶺山 良介, 135
閔 正媛, 247
■ヤ行
八木 潤, 225
矢城 信吾, 309
安本 真士, 213
山口 崇幸, 205
山本 健, 143
弓林 司, 147
横山 俊一, 43
■ワ行
若杉 勇太, 313
渡邊 隆子, 321
渡辺 朋成, 97
和田 和幸, 317