学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　齋　藤　逸　人

学 位 論 文 題 名

On Moduli Spaces of Quasi-Maps and Gromov-Witten Invariants
(擬写像のモジュライ空間とグロモフ・ウィッテン不変量に関する研究)

超弦理論では，Calabi-Yau 多様体に A 模型及び B 模型と呼ばれる物理理論が対応する．ミラー対称性とは，この二種類の理論が等価な多様体の対が存在するだろうという予想である．1991 年の論文 [1]は，Gromov-Witten 不変量(以下，GW 不変量)と呼ばれるある種の「曲線の個数」を，Hodge 理論と呼ばれる複素幾何学的な手法を用いて計算し，数学者の注目を浴びた．それ以来，ミラー対称性は現在高度に発展しているが，GW 不変量の計算は常に中心的な問題の一つである．本学位論文もまた，GW 不変量の計算に関する研究である．

GW 不変量は「安定写像のモジュライ空間」という空間上の交点数として定義される．一方，秦泉寺雅夫先生の論文[2]では，射影空間の場合に，モジュライ空間の「コンパクト化」と呼ばれる操作の仕方を変更することで，興味深いモジュライ空間が得られていることを示している．この空間は「擬写像のモジュライ空間」と呼ばれ，安定写像のそれよりもはるかに単純な構造をもつ．擬写像のモジュライ空間上にも，GW 不変量と同様な交点数を定義することができるが，これはコンパクト化の仕方を変えてしまったために，一般には GW 不変量とは一致しない．しかし，この交点数はミラー対称性でいう所の B-模型側の最も重要な情報を持っている．すなわち，この交点数を用いて Picard-Fuchs 方程式と呼ばれる微分方程式の解を与えることができる．また，この母関数によって「ミラー写像」と呼ばれる A-模型と B-模型の等価性をつなぐ写像が得られることが知られている．もちろん，これらの情報から GW 不変量を計算することもできる．このように，モジュライ空間を用いた幾何的な議論のみによって，ミラー対称性を語りつくすことの可能性が存在する．

本学位論文は二つのパートからなる．第一パートの前半では，射影超曲面の場合について詳細に議論した．上述の秦泉寺雅夫先生の論文では擬写像のモジュライ空間とその交点数に関する多くの結果が述べられているが，しかし，擬写像のモジュライ空間そのものの幾何学的な性質について詳しく述べられていなかった．本学位論文では，これが「トーリック多様体」であることを初めて明らかにした．

本研究では，トーリック多様体を定義する「扇」と呼ばれる集合を，一般次元の射影空間と任意の次数に対して，具体的に与えることができた(第 3 節)．これにより，擬写像のモジュライ空間の更なる性質を系統的に明らかにすることができた．即ち，「射影空間の擬写像のモジュライ空間はコンパクトなトーリックオービフォールドである」ことを証明する．また，扇の構造から，交点数の情報を全て含む「Chow 環」と呼ばれる代数的対象を計算した．さらに Chern 類を計算することで，Euler 標数を導いた．

一方，安定写像のモジュライ空間の Chow 環が射影空間の場合に既に知られている[3]．本研究論文では，次数 1 および 2 の場合に，具体的な生成元同士の変換を与えることで，安定写像モジュライ空間の Chow 環が擬写像のモジュライ空間のそれを部分環として含んでいることを示すことができた．第 4 節から第 6 節では，これをヒントに，GW 不変量に対する新たな計算公式を証明する．この公式は，擬写像のモジュライ空間の交点数の公式と似た形式

で与えられる．これまで GW 不変量は，ミラー対称性を用いるか，Kontsevich の論文[4]のように，固定点定理を用いるしかなかった．本研究は，これらの道具を用いないで GW 不変量を計算することで，Chow 環から直接的に GW 不変量を導くことができるということを直接的に示すことができた．

第二パートでは，擬写像のモジュライ空間を重み付き射影空間 P(1,1,1,3)に拡張する研究について述べる．第 8 節では，第一パートと同様に，トーリック多様体を定義する扇を任意の次数の場合に具体的に与えることに成功し，これがコンパクトなトーリックオービフォールドであることを示し，Chow 環を計算した．

第 9 節では，このモジュライ空間の交点数と楕円曲線の j-不変量とのかかわりについて扱う．擬写像のモジュライ空間の P(1,1,1,3)への拡張を試みた動機は，それに含まれる Calabi-Yau 多様体(この場合は K3 曲面となる)のミラー多様体に関する Picard-Fuchs 方程式から，楕円曲線の j-不変量が得られることである[5]．第一パートや[2]の方針に従えば，j-不変量の逆関数の展開係数が P(1,1,1,3)上の擬写像のモジュライ空間の交点数としてあらわされるはずである．実際，上述の秦泉寺雅夫先生の論文[2]のプレプリント版では，この主張が予想として述べられている．本学位論文の後半では，この擬写像のモジュライと楕円曲線の j-不変量を直接的に結びつける主張を秦泉寺雅夫先生との共同研究によって証明した．

参考文献

[1] P.Candelas, X.de la Ossa, P.Green and L.Parkes, “A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal field theory”, Nuclear Physics B395(1991).
[2] M. Jinzenji, “Mirror Map as Generating Function of Intersection Numbers: Toric Manifolds with Two Kahler Forms, Comm. Math. Phys. 323(2013), no. 2, 747-811. (arXiv: 1006.0607).
[3] M. Mustatva, A. Mustata, The Chow ring of Mbar_{0,m}(P^n,d), J. Reine Angew. Math. 615 (2008), 93-119.
[4] M. Kontsevich, Enumeration of Rational Curves via Torus Actions, The Moduli space of curves, R.Dijkgraaf, C.Faber, G.van der Geer (Eds.), Progress in Math., v.129, Birkh¥"{a}user, 1995, 335-368.
[5] B. Lian, S. T. Yau, “Arithmetic Properties of Mirror Map and Quantum Coupling”, Comm. Math. Phys. 176(1996), no. 1, 163-191.
[6] H. Saito, “Chow Rings of Mp_{0,2}(N,d) and Mbar_{0,2}(P^{N-1},d) and Gromov-Witten Invariants of Projective Hypersurfaces of Degree 1 and 2”, Internat. J. Math. 28, Issue No. 12.