経 済 学 研 究　*68－1*
北 海 道 大 学　2018. 6

数理統計学について
――ある逆説――

園　　　信 太 郎

1. はじめに

（データが関る）帰納への数学的接近は，数理統計学と総称される。J. Neyman, E. S. Pearson, A. Wald, E. L. Lehmann, といった名称で連想される領域は，「狭義の」数理統計学とも言うべきものである。なお，数理統計学の開拓者である R. A. Fisher は，彼らとは基礎的見解を異にしている。AIC などを使う情報量統計学や，客観的ベイズ推論（objective Bayesian inference）も，「狭義の」とは異なる。問題は主観的ベイズ統計学の位置づけだが，これは後回しにする。

数理統計学には次の難点（1）（2）がある。

（1）確率（たしからしさ）の「定義」の問題。
（2）データによる「条件づけ」の問題。

「狭義の」では，「確率」は無定義であり，しかも「条件づけ」を表す作業が定式化されてはいない。

2. Kolmogorov system

全事象の測度が 1 である完全加法的（あるいは可算加法的）測度を「確率」と呼ぶとするのが，Kolmogorov system の流儀だが，これは結局，「確率」を無定義概念にするということである。つまり，この種の測度（確率測度と呼ばれる）を,「確率」としてしまうのである。だが,「確率」とは「たしからしさ」なのであるから，このような概念規定をそのまま認めるわけにはいかないのは, むしろ当然である。Bruno de Finetti は，生涯にわたって，完全加法性は特別な「仮説」ではあっても，「公理」ではないという態度を貫いている。

一方，E. L. Lehmann の議論を視ればわかるように，「狭義の」では，数理統計学の議論を Kolmogorov system に組込もうとする。つまり，「確率」は無定義のままである。これはいかにもまずいやりかたである。例えば，Newton 力学を「力」の「定義」なしで展開するようなものである。（なお，Bruno de Finetti の表現定理は，本来，有限加法的な世界で展開されたのだが，今日では，完全加法的世界に組込まれている。これでは BdF の思想が忘れ去られてしまう。おおいに思想を語るべきである。）

3. 事象の一回性

事象とは「できごと」であり，本来一回性のものである。繰り返すのは「現象」であって，事象ではない。「雨が降る」は繰り返すが，「その雨」は一回のみである。「某君が，明日の午前中にこの部屋に来る」は，某君が将来しばしば現れることが分かっていても，あくまでも「いちえ」である。この「いちえ」は，英語では unique とか uniqueness とかに対応するであろう。なお, BdF がしつこく述べているように，事象と現象とは峻別されねばならない。

「狭義の」では，「反復的事象，repetitive event」なる言葉が創出されたりもするが，い

かにも苦しく，しかも内容が明晰でない。「数学」を持ち出すのであるから，「明晰な推論と平明な前提」が尊重されなければならない。

4. 客観的ベイズ推論

この事実上の創始者は，Jeffreys, Harold, Sir, であり，prior に関する Jeffreys の規準は広く知られている。この Jeffreys の思想が「つかえる」ことを実学的に示したのは，やはり“Box and Tiao”であろう。

問題の「思想」だが，母数で条件づけられているモデルが，その未知固定母数に対する「情報」とは無縁ではないとして，モデルを使って ignorance prior を指定するという，独特の「個性」を持つ。だが，この ignorance prior とは少しも自明ではない。それは，問題の母数に関する「無知」の状態を表すとされるが，この「無知」とは，あくまでも相対的なものであり，そのモデルから定まる尤度関数との比較における「無知」である。Leonard Jimmie Savage は，生涯にわたって，一貫してこの「無知」を拒否し，それは方法論的に「無意味」としている。

5. 自然共役分布

Schlaifer, Robert, 流の共役分布はどうであろうか。ここでも，モデルから prior の「型」を定めるという「思想」がある。しかしどうしたものか，Jimmie は，この流儀を特に論難していないし，好意的な雰囲気で接している。これはどうも謎である。

6. 未知固定確率

裏と表との区別がつく「不滅の」コインを投げ上げて，「裏」か「表」かを観察するという実験を想定してみる。「表」が出る「確率」が問題となるが，「狭義の」では，通常は，頻度論的流儀を採用して，この「確率」を未知固定の p として，投げ上げを「限りなく」続けるとして，「表」の相対頻度がこの p に「限りなく近づく」状況を想定する。

だが，「確率」を「定義」せずに未知固定「確率」を問題とするのは異様であり，そこで，この想像上の極限値 p こそが「本来の」確率なのだと「定義」する流儀が出て来る。しかし，この「定義」はうまく機能しない。実際，「限りなく近づく」が定義されていない。確率論では「確率」収束が浮上する所だが，「確率」を「定義」せずに「確率」を使うこととなり，事実上の悪循環である。

一方，主観的には，p は一人一人が定めるべきものであり，その値は，新しいデータが得られるごとに改訂される。Radical な立場からは，未知固定確率などは存在しないのである。だが，そうすると，数理統計学自体が倒壊するのではないのかとの疑念がわく。このような状況の中から BdF の古典的分析が浮上する。

7. Bruno de Finetti の表現定理

コインの投げ上げで，「裏」及び「表」を，それぞれ 0 及び 1 と表示する。コインの投げ上げを繰り返す「個」が，任意に指定された空ではない 0,1 の有限的系列が現れる「確率」は，結局順番ではなく，0,1 の各総数にのみに依存すると判断したとしよう。そこで，n を正の整数として，0,1 の系列 $x_1, x_2, \cdots$ の長さが n で，対応する確率を $\pi\,(a,b;x_1,x_2,\cdots)$ とする。ここで，a,b は各 1,0 の総数であり，$a+b=n$ である。結局問題の「個」は，コインの投げ上げを「対称的に」とらえているのだが，今日の確率論では，「投げ上げ」のこのような対称的な無限的系列を確率過程としてとらえて，「交換可能な，exchangeable」過程と表現している。

BdF は，有限加法的な考察のみで，$\pi(a,b;x_1,x_2,\cdots)=\int_I u^a(1-u)^b M(du), I=[0,1],$ をみたす有限加法的確率測度 M の存在を導いた。この M は，同じ区間に対して同じ値を取るという意味で「一意」である。これが，de

Finetti の表現定理の原型である。つまり，未知固定の p を持ち出す必要はなく，かわりに M が現れるのである。頻度論的に「p は三分の二以上だ」と表現される状況は，M（[2/3,1]）=1 のことであり, M による表現の「略称」である。この有限加法的表現では，p は「ある変量の実現値」とはなっていないことに注意して頂きたい。

ところが，今日の通常の確率論では，つまり完全加法的とらえ方では，完全加法的 P と変量 U とが存在して $M=P^U$ であることが従う。しかも, 完全加法的 M は一意である。この場合, p は U の実現値である。

だが BdF が指摘しているように，この U が「存在する」とはいかなることか自明ではない。完全加法的には，U とは相対頻度の L^2 極限だが，現実の世界において，p を生み出す U とは何者であろうか。「そのコイン」を生み出す「巨大な」機構を考えるのであろうか。

なお正直に筆者の意見を述べておくと,「論理的には」BdF は「正しい」。しかし,「数学的には」完全加法性が「的を射ている」と判断する。「論理」と「数学」とのギャップが生じている訳だが，筆者は,「数学」への個人的選好を捨てきれず，むしろ「数学」を選ぶ。

8. 尤度原理

「データが与えられている場合，尤度関数が一致すれば，推論結果も一致しなければならない。」これが尤度原理であり，20 世紀前半に発見され，Birnbaum（1962）で，数学的に示されたものである。Savage は，この原理を強く支持する。Birnbaum は，自身の結論から程なく離れて行った。

この「原理」によれば, 客観的ベイズ推論や, 自然共役分布を用いるやりかたには，方法論的に問題があることとなる。当然,「狭義の」と「原理」とは両立しない。

Jimmie は主観確率に基づくベイズ統計学を唱えてはいるのだが，彼自身の統計学の概略を語ってはいない。しかし，もしこの「統計学」が定式化されるのならば，尤度原理と両立するはずである。

9. ある逆説

Jimmie の統計学は，ついに「数理」統計学にはならなかった。それは彼の心中には「あった」。結局，この Radical Bayesian は，現実の Bayesian にはならなかった。率直に筆者の判断を述べるのならば,「Radical Bayesian は結局現実の Bayesian にはならない」のではなかろうか。主観確率の「深み」を極めた者は,「数理」統計学者では，既にない。彼は，図上に艦隊の「その」船影を「観る」のだ。

10. 補遺―数学そのものへの二つの論駁―

「明晰な推論と平明な前提」に基づいて探究を行おうとすれば，数学は不可避であると，筆者は判断する。しかし，数学そのものへの論駁があることは承知している。つまり, 一つは「数学は虚構である」というものであり，もう一つは「数学は幻覚である」というものである。

「虚構」だが，論理主義者たちが執拗に主張するように,「数学は論理学だ」という返答が思い浮かぶ。しかし, 実際に数学に関れば,「数学は論理学だ」では済ませないことが，薄薄わかる。だが,「虚構」ではあるまい。「端的な事実としての真理」こそ数学の真骨頂である。「円周率 π は超越数である」は, 紛れもなく「真理」であり，このような「真理」の探究こそが数学の本務である。

「幻覚」だが, 補助線や補助円が「観える」とは,「ない」ものが「みえる」のだから「幻覚」であろうか。平面や立体の初等幾何学を几帳面に学ぶことで，それぞれの資質に応じて，たしかにそれらは「観える」ようになるのである。自身の実力よりも少しだけ上の問題に挑戦してみ

れば，この「観える」を「体感」できる。それは「真理」の必然として「そこにある」のだ。筆者は，既に Dedekind が本音をもらしているように，「それらの存在」は，『人間精神による自由な創出である』と思う。これらの「存在」を足場として，人は「真理」へと接近する。これはいわゆる「梯子悟り」である。なお「観える」という表現は通常の表現だが, 実際には,「浮き出てくる」のである。あちらから「くる」のだ。

2017 年 12 月 12 日（火）

参考文献

Birnbaum, Allan, On the foundations of statistical inference, *Journal of the American Statistical Association,* **57**, 269-306, 1962. 園（1914）の付録の文献表を参照。

Box, George E. P., and George C. Tiao, *Bayesian inference in statistical analysis*, Wliley classics library, Wiley, New York, 1992. 初版は Addison-Wesley より 1973 年に出ている。

Dedekind, Julius Wilhelm Richard（デデキント，あるいはデーデキント）著，河野 伊三郎 訳,『数（すう）について―連続性と数の本質―』，岩波文庫，岩波書店，1961 年 11 月 16 日。用心すべき点が二つある。デデキントは，切断そのものを「実数」とする流儀を意識して避けている。彼の本音は,「数とは人間精神の自由なる創出」だからである。また，彼は，第二篇論文の序文で論理主義者の様な発言をしているが，本論では,「論理学」を脇に置いて，自身の数学を語り始める。彼の System を今日の「空間」に置き換えれば, 彼が, 数論における「幾何学的精神の貫徹」を目指したことは，ほぼ明らかである。

Jeffreys, Harold, Sir, *Theory of probability, Third edition,* Clarendon Press, Oxford, 1983. 初版は 1939 年。

Kyburg, Henry E., Jr., and Howard E. Smokler（eds）, *Studies in subjective probability*, Krieger, New York, 1980. Wiley 版（1964）ではなく Krieger 版である。ここに Bruno de Finetti（BdF）の二つの論文（1937, 1977）が収められている。

Lehmann, E. L., *Testing statistical hypothesis, Second edition*, Springer, New York, 1997. 初版は Wiley より 1959 年に出ている。

Savage, Leorard Jimmie, *The foundations of statistics, Second revised edition*, Dover New York, 1972. 第 1 版は Wiley から 1954 年に出ている。サヴェジ氏の「基礎論」である。

Savage, Leorard Jimmie, *The writings of Leonard Jimmie Savage—A memorial selection—*, The American Statistical Association, Washington, D. C., 1981. サヴェジ氏の「論文集」である。

Schlaifer, Robert, *Probability and statistics for business decisions—An introduction to managerial economics under uncertainty—*, McGraw-Hill, New York, 1959. サヴェジ氏は，この労作を現代ベイズ統計学の源としている。

園 信太郎『確率概念の近傍―ベイズ統計学の基礎をなす確率概念―』, 内田老鶴圃，東京，1914 年 5 月 15 日。なお，この冊子の付録の文献表をぜひとも一瞥して頂きたい。

園 信太郎『サヴェジ・システム試論―統計的決定理論の公理化と期待効用の最大化―』，内田老鶴圃，東京，1917 年 5 月 10 日。