



Title	Stochastic-geometrical analysis to investigate critical behavior for statistical-mechanical models [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	半田, 悟
Citation	北海道大学. 博士(理学) 甲第13554号
Issue Date	2019-03-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/74212
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/
Type	theses (doctoral - abstract and summary of review)
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	Satoshi_Handa_abstract.pdf (論文内容の要旨)



[Instructions for use](#)

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士（理 学） 氏 名 半田 悟

学 位 論 文 題 名

Stochastic-geometrical analysis to investigate critical behavior
for statistical-mechanical models
(統計力学モデルの臨界現象に対する確率幾何学的な解析)

水の三態変化をはじめとし、超伝導現象に関わる量子相転移、2016年にノーベル物理学賞を受賞したトポロジカル相転移など、私たちの身の回りには相転移・臨界現象で溢れている。量子コンピューティングを筆頭とし、実社会への応用を意識した相転移・臨界現象に関する実験や数値計算の数は計り知れない。本学位論文では、相転移・臨界現象を数学的に厳密な立場から解析することを念頭に、いくつかの統計力学モデルに対して相転移・臨界現象に関する数学的な結果を与えた。

様々な統計力学モデルにおいて、そのモデルが相転移現象を示すことが数学的に示されている。臨界点の近傍や直上では様々な物理量が特異的な振る舞いをすることが知られており、数学的には物理量の関数がパラメータに対して冪的な振る舞いを示す。その冪指数は臨界指数と呼ばれ、モデルの詳細には依らない、次元や系の対称性だけに依存する普遍性の強いものである。そのため、それらの臨界指数を用いて物理系は分類できると信じられており、相転移・臨界現象の背後に潜む数理的な構造を解き明かすための重要な研究対象になっている。低次元の臨界指数は対象とするモデルによって状況は異なるが、特に3次元の厳密な結果は殆ど無い。他方、高次元の臨界指数は平均場モデルにおける臨界指数へと退化すると信じられている。このことを厳密に示すことは簡単ではないが、様々な統計力学モデルに対して、高次元の臨界指数に関する数学的な研究結果が多く残されている。しかしながら、結果が部分的（限定的）であるものや未解決の臨界指数も残されている。本学位論文では、統計力学モデルに対して、確率幾何学的な解析手法を用いて、それらの課題に対するいくつかの結果を与えた。

第1章では、相転移・臨界現象の概要を説明し、論文中で扱う古典イジングモデル、自己回避歩行モデル、パーコレーションモデル、量子イジングモデルに対する結果を述べた。

第2章では、古典イジングモデルを導入し、歴史的な経緯や最近の研究方向についてまとめ、未解決の臨界指数であった1-arm 指数の平均場評価を与えた。規格化定数が1であるパーコレーションモデルとは大きく異なり、1ではない規格化定数（分配関数）も適切にコントロールする必要があり解析が難しい。しかしながら、イジングモデルのランダムカレント表現と呼ばれる確率幾何学的な表現を用いることで、パーコレーションモデルで用いた二次モーメント評価という手法をイジングモデルへと遺伝させることに成功した。その結果、これまでのスピン系の相関不等式にはない、並進対称性を持たない物理量に対する新しい相関不等式を導出した。その不等式を用いることで、1-arm 指数の平均場評価を得た。パーコレーションモデルでは高次元の1-arm 指数は2であることが示されていたが、それとは異なり、イジングモデルの場合は1以下であることが示された。

第3章では、自己回避歩行モデルとパーコレーションモデルを導入し、体心立方格子上でのレース展開の解析を行った。レース展開は高次元を解析する数少ない手法であるが、最隣接格子モデルを解析する際には、無限級数を収束させるために次元のパラメータを十分大きくとる必要があった。そのため十分高次元という制約が課されていた。したがって、平均場に退化するぎりぎりの次元（上部臨界次元）より大きい全ての次元で、平均場現象が成立することを証明する必要がある。体心立方格子上のランダムウォークの良い性質を活用することで、特にパーコレーションモデルは9次元以上において平均場的に振る舞うことを示した（パーコレーションモデルでは上部臨界次元

は6であると信じられている)。論文中では自己回避歩行模型に限って証明を記載した。

第4章では、量子イジング模型を導入し、臨界指数に関するこれまでの先行研究について述べ、臨界指数への量子効果の影響を調べるために、帯磁率の温度変化に対する臨界指数の高次元での解析を行った。これまでの量子イジング模型の臨界指数に関する先行研究の手法とは異なり、鈴木・トロッター変換を用いることで、量子イジング模型を一次元だけ次元の上がった古典イジング模型とみなし、古典系のランダムカレント表現をそのまま使うという手法を用いた。これにより、様々な古典系の手法を移植することができ、解析も先行研究と比べて非常に見通しが良くなった。

以上、本学位論文では、確率幾何学的な手法に基づき、古典系から量子系も含めた幅広い高次元統計力学模型の相転移・臨界現象に対する数学的に厳密な解析を行い、得られた結果をまとめた。