学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理学）　　氏名　武田　裕康

学 位 論 文 名

Confluent hypergeometric systems associated with principal nilpotent p-tuples
(主冪零 p 組に付随する合流型超幾何系)

本論文は Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の冪零正則元の一般化である「principal nilpotent p-tuple(主冪零 p 組)」に付随する超幾何系の合流についての研究である。

Gauss 超幾何微分方程式の一般化の一つとして青本と Gel'fand が独立して青本-Gel'fand 系を導入した。青本-Gel'fand 系のパラメータ空間は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の Cartan 部分代数の双対である。一方、Gel'fand-Retahk-Serganova は Airy 関数の微分方程式の一般化を導入した。この微分方程式系のパラメータ空間は Jordan 群の Lie 代数 (Jordan Lie 部分代数) の双対である。

この先行研究を受けて、木村-原岡-高野はパラメータ空間が一般の正則元の中心化代数の双対となる超幾何系を定義した。ただし、$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の元が正則であるとは「中心化代数の次元が n である」ことを意味する。半単純正則元の中心化代数は Cartan 部分代数、冪零正則元の中心化代数は Jordan Lie 部分代数となる。従って、半単純正則元には青本-Gel'fand 系が、冪零正則元には Gel'fand-Retahk-Serganova の微分方程式系に対応している。$n = 4$ のとき、その他の正則元に対しては Kummer の合流型超幾何関数、Hermite-Weber 関数、Bessel 関数がそれぞれ対応している。

さらに、木村-高野は上で定義された超幾何系、及びその積分表示解の被積分関数の変形が正則元の極限によって記述されることを示した。ここで特に、すべての正則元の中心化代数は Cartan 部分代数の極限として得られる。特に $n = 4$ のときにはこの変形は古典的な意味での合流操作と一致する。以上のことから、「超幾何系とその合流操作」は「Cartan 部分代数の極限として得られる Lie 部分代数とその極限操作」の視点から説明できることがわかった。

ところで、Cartan 部分代数の極限として得られる Lie 部分代数は正則元の中心化代数以外にも存在する。たとえば、齋藤睦は Borel 部分代数の階数次元の可換イデアルは Cartan 部分代数の極限であることを示した。本論文では Cartan 部分代数の極限として得られるある Lie 部分代数を表すために「principal nilpotent p-tuple(主冪零 p 組)」を導入した。$p = 1$ のとき、principal nilpotent p-tuple は冪零正則元と一致する。また、$p = 2$ のとき (pair) は Ginzburg によって導入され、Young 図形と対応することが示されている。principal nilpotent p-tuple $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ の中心化代数は Cartan 部分代数の極限として得られる。

木村-高野の研究から、Cartan 部分代数の極限として得られる Lie 部分代数の双対をパラメータ空間とする微分方程式系が青本-Gel'fand 系の極限として得られるかどうか、というのは自然な疑問である。この問題について考えるために、本論文で principal nilpotent p-tuple の中心化代数の双対をパラメータ空間とする微分方程式系を研究した。

Z を階数 m の $n\times m$ 行列全体、$a\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ に対して、a によって定まる Z 上のベクトル場を ∂_a とする。$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の n 次元可換部分代数 $\mathfrak{a}$ を一つ取る。このとき、$\alpha\in\mathfrak{a}^*$ に対して、微分方程式系 $M_{\mathfrak{a},\alpha}$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_Z\Big/\Bigg(&\sum_{p,q=1}^{n}\sum_{j_1,j_2=1}^{m}\mathcal{D}_Z\left(\partial_{p,j_1}\partial_{q,j_2}-\partial_{p,j_2}\partial_{q,j_1}\right)\\&+\sum_{i,j=1}^{m}\mathcal{D}_Z\left(\sum_{k=1}^{n}z_{k,i}\partial_{k,j}+\delta_{i,j}\right)+\sum_{a\in\mathfrak{a}}\mathcal{D}_Z\left(\partial_a-\alpha(a)\right)\Bigg).\end{aligned}$$

と定義する。$M_{\mathfrak{a},\alpha}$ は $\mathfrak{a}$ が Cartan 部分代数のときには青本-Gel'fand 系、Jordan 部分代数のときには Gel'fand-Retahk-Serganova の微分方程式系と一致する。また、$\mathfrak{a}$ が正則元の中心化代数であるときには木村-高野が定義した超幾何系と一致する。本論文では $\mathfrak{a}$ が principal nilpotent p-tuple の中心化代数のときの $M_{\mathfrak{a},\alpha}$ を「principal nilpotent p-tuple に付随する合流型超幾何系」と定義した。

本論文では principal nilpotent p-tuple に付随する合流型超幾何系が青本-Gel'fand 系の極限から得られることを示した。より具体的には、principal nilpotent p-tuple $(e_1,e_2,\ldots,e_p)$ に対して

$$\boldsymbol{e}(\tau):=\exp\left(\frac{\tau-1}{\tau}(e_1+e_2+\cdots+e_p)\right)\in GL(n,\mathbb{C})$$

とすると、青本-Gel'fand 系から principal nilpotent p-tuple に付随する超幾何系への変形が $\boldsymbol{e}(\tau)$ の作用によって表されることを証明した。特に、対応する積分表示解の被積分関数の変形も $\boldsymbol{e}(\tau)$ の作用で記述した。

木村-小板橋は極大可換部分群の正規化群について研究し、これをパラメータ空間に作用させることで超幾何系のパラメータを特殊化した。本論文の後半では、この先行研究を参考に principal nilpotent p-tuple の中心化代数 $\mathfrak{a}$ の正規化群 $N_G(\mathfrak{a})$ について調べ、これを中心化群で割ったものの代表元を具体的に記述した。さらに、この結果を用いて Young 図形 $(n-1,1)$ に対応する principal nilpotent pair に対して、これに付随する超幾何系は $(n-1)\times m$ 変数一般 Airy 関数の微分方程式系に帰着されることを証明した。また、$n\le 6$ のときの principal nilpotent pair に付随する $2n$ 変数の超幾何系に対する古典的な対応物を記述した。