学　位　論　文　内　容　の　要　旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　須田　裕介

学　位　論　文　題　名

Persistency and Breathing Behavior of Chimera States
in Nonlocally Coupled Phase Oscillators
（非局所結合位相振動子系におけるキメラ状態の持続性と振動挙動）

エネルギーや物質が流入・散逸する系では、自律的なリズム現象が自然界・人工物を問わずしばしば出現する。このようなリズム現象は系を構成する要素こそ異なるものの、相互作用する非線形振動子の多体系（結合振動子系）として共通した数学的枠組みで議論される。結合振動子系は、物理学・数学・化学・生物学など様々な学問分野で長年にわたり横断的に研究されてきた。振動子の集団運動としては同期現象が有名であるが、近年キメラ状態と呼ばれる奇妙な安定状態が注目を集めている。キメラ状態は「同条件下にある振動子の集団において、同期状態と非同期状態が共存する安定状態」であり、一次元非局所結合位相振動子系において初めて発見された。現在では、数値計算によって様々な系でキメラ状態の出現が確認されており、実験的にもその存在は確認されている。しかし、ごく一部を除いて理論的な解明には至っておらず、基本的な性質でさえも未だ問題を残している。本論文は、一次元非局所結合位相振動子系のキメラ状態に関して、「安定性」と「定常性」にそれぞれ着目した二つの基礎研究で構成される。

先行研究において、一次元系のキメラ状態は振動子数が無限（連続極限）のときに真に安定であり、振動子数が有限な離散系では不安定であることが報告されている。特に、振動子数が小さい場合は、キメラ状態は時間発展の中でカオス的に消失し、完全同期状態へ遷移する。これは、原理的に離散系しか扱うことのできない数値計算において重要な問題である。

一つ目の研究において、我々は「離散系でも安定なキメラ状態（persistent chimera state）」の存在を数値計算によって示した。キメラ状態が消失し、完全同期状態に遷移するためには、完全同期状態が安定でなければならない。言い換えれば、完全同期状態が不安定なパラメータ領域で出現するキメラ状態であれば、少なくとも先行研究のような遷移は起こりえない。しかし、従来の一次元系では、キメラ状態が出現する領域では常に完全同期状態が安定であった。そこで我々は、従来の一次元系を高次の相互作用項を含む系に拡張し、振動子数が十分大きい場合でキメラ状態が出現する領域を数値計算によって調べた。その結果、拡張した系では完全同期状態が不安定な領域であってもキメラ状態が出現することがわかった。

次に、振動子数が小さい場合の各パラメータにおけるキメラ状態の平均寿命を数値計算によって調べた。その結果、キメラ状態の寿命は完全同期状態が不安定な領域に近づくにつれ増加し、完全同期状態が不安定な領域では無限大に発散することがわかった。すなわち、

振動子数が小さい場合でも安定なキメラ状態が存在する。驚くべきことに、そのようなキメラ状態が出現する領域は完全同期状態が安定な領域にも存在し、さらには、高次の相互作用項がゼロとなる領域にも存在した。したがって、適切なパラメータを用いれば、たとえ従来の系であっても、離散系で安定なキメラ状態が存在することが示された。

二つ目の研究では、キメラ状態の定常性に着目した研究を行った。多くの先行研究において、一次元系のキメラ状態は連続極限で定常状態であることが仮定されてきた。この仮定は非常に強力であり、現在のキメラ状態の解析的理論の根幹をなしている。この仮定は数値計算の結果から予想されたものであるが、いかなる場合でも成り立つという保証はない。実際、先行研究において、「一次元系のキメラ状態で定常でない（特に、振動的な）ものは存在しないのか」という問題提起もされている。その回答として、我々は「連続極限下で振動的なキメラ状態（breathing chimera state)」の存在を示した。

こちらの研究では特に、同期領域と非同期領域が二つずつ共存しているキメラ状態（以下、マルチキメラ）に着目した。そして、振動子数を十分大きくして数値計算を行ったところ、大域的秩序変数が時間的に振動するマルチキメラの存在を確認した。大域的秩序変数は位相振動子全体の同期度を表す量であり、定常状態であれば時間的に一定となる。したがって、この場合のマルチキメラは定常ではなく系全体で集団的に振動していると言える。

次に我々は、振動マルチキメラがHopf分岐によって定常マルチキメラから分岐した解であると予想し、定常マルチキメラの線形安定性解析によってこれを示した。Hopf分岐とは、安定な不動点（定常解）が不安定化し、その周囲にリミットサイクル解（振動解）が出現する分岐である。Hopf 分岐は、不動点の線形安定性解析によって得られるヤコビ行列の固有値のうち、一組の複素共役な固有値が虚軸上を横切ることによって引き起こされる。実際、数値的に定常マルチキメラの線形安定性解析を行ったところ、そのような一組の固有値が虚軸上を横切る様子が確認できた。このとき、連続極限に近づくにつれ、この一組の固有値の実部がゼロでない値に収束したことから、連続極限であってもHopf分岐が実現しているとみなすことができる。また、線形安定性解析を行う中で定常マルチキメラの平均場が結合核関数の奇数次フーリエ成分にしかよらないことを示した。そして、振動マルチキメラの出現には結合核関数の偶数次フーリエ成分が必要であることを数値的に確認した。

引き続き振動マルチキメラを調べたところ、振動マルチキメラには、定常マルチキメラと見た目の位相パターンが変わらないもの（Type-1）と元々の同期領域に加えて平均振動数の異なる同期領域を持つもの（Type-2）が存在することを数値的に確認した。そして、この二種類の振動マルチキメラの関係について、定常解の解析的理論を振動解に拡張することによって、理論的に説明することを試みた。その結果、Type-1 の振動マルチキメラは振動が小さいゆえに定常マルチキメラと見た目の位相パターンが変わらないこと、そして、そこから振動が大きくなることで Type-1 から Type-2 に振動マルチキメラが変化することを示した。また、定常解に関する自己無撞着解析を振動解に拡張することを試み、新たな自己無撞着方程式を導出し、それを数値的に解くことに成功した。

以上のように、本論文の研究は一次元系のキメラ状態の最も基本的な性質の一つである「安定性」と「定常性」について新たな知見を与えている。本研究の成果が、キメラ状態の完全な理論的解明に向けての一助となることを信じている。