経済学研究 *69－1*
北海道大学 2019.6

サヴェジ基礎論のある論点

園　信太郎

1.「基礎論」の論点

サヴェジ氏は彼の「基礎論」の第1章で，自分は「確率」の解釈を問題にすると発言している。つまり「確率」の計算体系を既に与えられているとして，そこでの「確率」を表す記号に対する「解釈」を問題とするのである。サヴェジ氏は，計算体系として Kolmogorov system の類事物を念頭においているようである。だがこれでは「基礎論」の論点への誤解を招きやすい。

2.「基礎論」第4章

「基礎論」の第4章を熟読すれば，彼が真剣に問題としているのは，「確率」の「定義」であることがわかる。この「定義」に基づいて，彼は「確率」の計算法則を導出するのである。なお，この章の標題は Critical Comments on Personal Probability である。

3. 完全加法性について

完全（あるいは可算）加法性は，彼の計算体系では公理ではなく「仮説」である。これは Bruno de Finetti の立場を引き継ぐものである。実際，二つの連続する奇数が素数である「確率」を問題とする数論の研究者がいたとしても，この「確率」が定式化できるか否かは脇に置くとして，この双子素数の探究者が「不合理」であるとは言えないであろう。つまり，完全加法性の侵犯が不合理であるとは断定し難いので，それは，状況によっては極めて生産的な「仮説」ではあっても，規範的な意味での「公理」や「公準」ではないのである。

4. 本来の基礎論

「基礎論」の論旨については今日でも誤解がある。それはサヴェジ氏による第1章の書き方に発する誤解である。しかし第4章を熟読すれば，彼が執拗に問題としている事柄が「定義」であることが了解できる。用心が必要である。あるいは「基礎論」は読まれざる古典であるかもしれない。

5. 補遺－Grundbegriffe は未完である－

これは Kolmogorov（1933）である。今日ではこの K（1933）の様式ではなく，次の（1）（2）（3）が Kolmogorov の公理系とよばれている。

$\mathcal{F}$ を Ω 上の σ 集合体（あるいは完全加法族）とし，その元を事象とよぶ。Ω は標本空間とよばれる。空集合 ϕ は空事象とよばれる。P は $\mathcal{F}$ 上の実関数である。

（1）全ての事象 A に対して $P(A) \geqq 0$，つまり非負性。
（2）互いに排反な事象列 A_n , $n=1,2,3,\cdots$, に対して，
$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$，つまり完全（あるいは可算）加法性。
（3）$P(\Omega)=1$，つまり「1」。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間とよばれ，P は確率測度あるいは単に確率とよばれる。

三次元 Lebesgue 測度を三次元単位立方体に制限したものは「体積」であって「確率，たしからしさ」ではない。つまり Kolmogorov の公理系は「確率」の「定義」とはみなせない。

それは計算法則を規定する「なにか」である。なお「1」だが，これは複素数体の乗法単位元 1 に関る。P を「たしからしさ」とすると，これが「抽象的な」1 となぜ結びつくかは自明ではなく，「確率」を定義した後に，「1」は証明されなければ「ならない」。問題は完全加法性である。完全加法性をみたさない「P」を用いる「個人」が不合理であるのならば，この要請は「公理」とよべるが，しかしこの個人論的不合理性が示されない限り，完全加法性の要請は「仮説」であり，公理とか公準などとよぶのは問題がある。

完全加法性の「仮説」は,「確率の定義の問題」という巨大な氷山を迂回して,「確率の解析学」を構築するためのある種の「わざ」である。

ひとまず完全加法性を認めると，K(1933) の主定理である，あまりにも有名な「Kolmogorov の拡張定理」が従う。この「拡張定理」では，有限次元の周辺分布たちが「一致条件，consistency condition」をみたすことが要請されるが，これらの分布たちを定める際に，確率算の基本性質である加法法則や乗法法則が，しばしば暗黙の内に利用される。Kolmogorov 自身は確率算の基本法則は，一人一人の「経験」に基づいて了解されるべきものだと判断しているようである。だがこれらの基本法則こそ規範的に示されねばならないのであり，それを為さなければ，確率算の「基礎づけ」が為されたとは言い難い。

筆者は，例えば園（2014）の冒頭にあるように，若き日の Bruno de Finetti の流儀に従って，確率算の基礎づけを為すのが穏当であると判断している。また,「確率」を定める際の個人的価値尺度の問題は，園（2017）で要約したように，今日でもなお，Leonard Jimmie Savage によればよいと思う。なお，天下り式に上の（1）（2）（3）を導入して，確率論の「入門」講義を「かたづける」のは，特に若い学徒にとっては「良くない」と，筆者は判断する。

K(1933) はなるほど傑出した古典だが，確率算の基礎づけが脱落しており，そのままでは未完である。

2018 年 11 月 3 日（土）

参考文献

Kolmogoroff, A. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1933. A. N. Kolmogorov による古典である。1973 年に Springer-Verlag, New York, より復刻版が出ている。復刻版の 13 頁に,「連続性の公理，Das Stetigkeitsaxiom」が提示されているが，これは E. Hopf の拡張定理を用いるための布石である。しかし，この呼称は誤解を招きやすい。集合の包含関係に関して単調非増大の事象列の共通部分が空となることは，列を構成する事象が空事象に「近づく」ことを，必ずしも意味しない。実際，各非負の整数 n に対して集合 $\{n, n+1, n+2, n+3, \cdots\}$ を考え，これらの共通部分を取れば空集合だが，$\{n, n+1, n+2, n+3, \cdots\}$ が空に「近づく」わけでは全くない。これらは，0 から始まる自然数系列と「同型」である。

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics, Second Revised Edition,* Dover, New York, 1972. 初版は 1954 年に Wiley より出ている。統計的決定理論の一つの公理化が，副産物として従う。また，期待効用最大化の原理が基礎づけられている。

園 信太郎,『確率概念の近傍』，内田老鶴圃，東京，2014 年。

園 信太郎,『サヴェジ・システム試論』，内田老鶴圃，東京，2017 年。