量子場の数理解析
──歴史的概観と新しい漸近的摂動論──

新 井 朝 雄

1 序──歴史的概観

1.1 素粒子と量子場

現代物理学の物質観によれば，私たちの周囲に見られる巨視的物質や光（電磁波）は，究極的には，'素粒子' と呼ばれる微視的対象からなるとされる．夥しい数の原子からなる巨視的物質の原子核を構成する核子（陽子または中性子）とそのまわりを運動する電子は素粒子の基本的な例に属する．電磁波を形成する素粒子は光子と呼ばれる[1)]．だが，素粒子は，粒子とはいっても，古典力学的な意味での粒子ではなく，古典物理学では説明できない '波動-粒子の二重性' を有し，時空内の各点において生成したり，消滅したりすることが可能である．この他にも，素粒子は，スピン（ある種の内部自由度に関する角運動量）など，古典物理学的概念の埒外にある特性を有する．このように古典物理学的な観点からは甚だ捉えがたい素粒子の本性を明らかにし，素粒子たちが織りなす諸現象を解明するための理論の一つとして考案されたのが**量子場の理論**（**場の量子論**）(quantum field theory) である．この理論の根底にある基本的な考え方は，同種の素粒子に対して，これらを時空内で生成したり，消滅させたりする機能をもつ**量子場**と呼ばれる一つの抽象的対象──当該の**素粒子の場**ともいうべき対象──が存在し（たとえば，電子の場は**電子場**，光子の場は**光子場**または**量子輻射場**と呼ばれる），量子場どうしの相互作用により，素粒子の生成・消滅を含む諸現象が引き起こされるというものである．すなわち，量子場は，現象的次元における素粒子たちの背後に横たわる，より根源的な単一的・統一的対象として措定される．量子場の理論は，概念図式的には，素粒子の種類も個数も時間的に一定な量子系を扱う有限自由度の量子力学を包摂する[2)]．

1.2 量子場の理論の始まり

量子場の理論の萌芽的形態は，歴史的には，Heisenberg (1925)，Born–Heisenberg–Jordan (1926) と Schrödinger (1926) らによる量子力学の発見からまもなく，Dirac [38] や P. Jordan ら [68]–[70] によって示唆された．そして，Heisenberg–Pauli [62] によって，古典場のラグランジュ理論から，これに対応する量子場の理論を得るための '正準量子化 (canonical quantization)' と呼ばれる方法の形式的一般論が提示された[3)]．この方法は，自由場の場合，すなわち，相互作用をしない量子場の場合[4)]，素粒子の波動-粒子の二重性を統一的に記述する形式を与えるとともに，素粒子の**スピンと統計の関係**[5)] を見事に説明した．この意味においては，正準量子化による量子場の理論は満足の行くものであった．

ところが，素粒子どうしの相互作用によって引き起こされる現象──たとえば，素粒子の生成・消滅を含む衝突・散乱現象──を説明するために，量子場の相互作用を入れたモデルをつくり，観測量を発見法的・形式的な摂動法を用いて計算すると，その結果は有限値ではなく無限大に発散してしまうという奇妙な事態に遭遇した[6)]．この '発散の困難' あるいは '無限大の困難' は，技術的には，主に 3 種類の側面からくる．すなわち，量子場どうしの相互作用において，付随する素粒子の運動量がいく

らでも大きくなり得ることからくる発散——**紫外発散**——と光子のように質量がゼロの素粒子にあっては，エネルギーがいくらでも小さくなることからくる発散——**赤外発散** (これは質量が正の素粒子の量子場については生じない)——，そして，空間の体積の無限性である[7]．1940 年代後半にいたって，発散の困難を回避し，物理的に意味のある結果を与える処方が Tomonaga, Schwinger, Feynman らによって独立に提出された．いわゆる‘くりこみ理論’ (renormalization theory) である ([100])．この処方により，量子場の理論は物理理論として復活し，特に，**量子電磁気学** (量子電磁力学，量子電気力学) (quantum electrodynamics ; QED)——荷電素粒子の場 (特に，電子場) と光子場が相互作用を行う系を扱う量子場の理論——の場合，形式的な摂動計算によって得られる値と実験値は，極めて小さい誤差の範囲で，見事な一致を示した ([75], [92])[8]．しかしながら，無限大の困難は，真正な数学的観点から見た場合，依然として残っており，くりこみ理論は‘真の解決からはなお遠い’ [100, p. 317] ものであった．

1.3 量子場の数理解析の起こり

以上のような状況のもとで，1950 年代から，量子場の理論の数学的基礎に関する研究が開始された．量子場の数理解析の始まりである ([39])．古典場の理論に相対論的なものと非相対論的なものがあることに対応して，量子場の理論にも相対論的なものと非相対論的なものがある[9]．1950 年以前の量子場の理論の主流は相対論的な量子場に関するものであったが，Miyatake ([79], [80])，van Hove ([101])，Friedrichs ([45]) は非相対論的な単純なモデルの研究を行い，そのようなモデルでも発散の困難が生じることを示した．

Cook [34] は，Fock [44] によって形式的に導入された状態空間の厳密な数学的構成を与え，量子場の数理解析の基礎となるヒルベルト空間——今日，全フォック空間，ボソンフォック空間，フェルミオンフォック空間と呼ばれる 3 種のヒルベルト空間——を一般的・抽象的な形で導入した[10]．これによって，自由場の理論の抽象的な形が提示された．Cook の仕事は Segal ([93], [94]) によってさらに広く，深く展開された．

1.4 公理論的場の量子論

こうした研究の流れとともに，1950 年代の半ばからは，相対論的量子場の理論を一般的・公理論的な観点から研究する**公理論的場の量子論** (axiomatic quantum field theory) が登場する ([56], [102], [103])．これは，相対性理論と量子力学の一般原理から要請される，いくつかの基本的性質を公理系として設定し，数学的な厳密性を保持しつつ，公理系からいかなる結果が得られるかを見極めようとするものである．この方法の利点は，量子場の理論に関して，個別のモデルに依らない一般的な事実や構造が明らかにされ得ることである．

相対論的量子場に対する Wightman 流の公理論的アプローチ ([97], [102], [103])——**Wightman の公理系**とこれに同等な **Gårding–Wightman の公理系**を基礎とする——では，量子場は，4 次元ミンコフスキー時空 $\boldsymbol{M}^4$ 上の作用素値関数ではなく，$\boldsymbol{R}^4$ 上の作用素値超関数[11] で，急減少 C^∞ 級関数の空間 $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^4)$ における 4 次元ポアンカレ群の自然な表現[12] に関してユニタリ共変性を有するものとして捉えられる．というのも，相対論的な量子場の理論の自然な公理系のもとでは，時空上の作用素値関数としての量子場は定数作用素以外には存在しない，という驚くべき定理——**Wightman の定理** [30, pp. 177–180]——が導かれるからである (もちろん，定数作用素の量子場は物理的に意味がない)．実は，この構造こそ，上に言及した‘発散の困難’の要因の一つなのである．なぜなら，物理学

における相対論的量子場の理論では，量子場 (多成分量子場の場合はその各成分) を 4 次元時空 $\boldsymbol{M}^4$ 上の作用素値関数 $\phi(x)$ $(x \in \boldsymbol{M}^4)$ とみなし，$\phi(x)^n$ のような対象を考えるのであるが，もし，ϕ が作用素値関数ではなく，作用素値超関数であるならば，通常の関数でない超関数の場合と同様に，そのような対象は，そのままでは意味をもたないからである．この無意味性が‘発散の困難’となって現れるのである．

Wightman の公理系は，時空の次元を $\nu \geq 2$ とすると ($\nu = 4$ が通常の意味での物理的な場合)，$\boldsymbol{R}^\nu$ の n 個の直積空間 $(\boldsymbol{R}^\nu)^n$ 上の緩増加超関数 W_n の列 $\{W_n\}_{n=0}^\infty$ $(W_0 := 1)$ で相対性理論と量子力学の原理が反映されたものによって特徴付けられる．超関数 W_n は，物理的には，**真空** (vacuum) と呼ばれる特別な状態——素粒子が顕在的には存在しない状態——に関する (作用素値超関数としての) 量子場の n 個の積の期待値から定まり，**n 点 Wightman 超関数**と呼ばれる．

相対論的量子場にはいくつかの範疇がある．そのうち最も扱いやすいのが**中性量子スカラー場** (neutral quantum scalar field) と呼ばれるものである．これは，対応する古典場が時空上の実スカラー場となるようなものである．中性量子スカラー場に対する Wightman の公理系におけるポアンカレ不変性，スペクトル条件，局所性と呼ばれる性質の含意を注意深く調べることにより，次の事実が示される：W_n は ν 次元複素数ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^\nu$ の n 個の直積 $(\boldsymbol{C}^\nu)^n$ の中の純虚数時間領域

$$\{((it_1, \boldsymbol{x}_1), (it_2, \boldsymbol{x}_2), \ldots, (it_n, \boldsymbol{x}_n)) \in (i\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^{\nu-1})^n | (it_j, \boldsymbol{x}_j) \neq (it_k, \boldsymbol{x}_k), j \neq k,\, j, k = 1, \ldots, n\}$$

(i は虚数単位) において解析的かつ $(it_1, \boldsymbol{x}_1), \ldots, (it_n.\boldsymbol{x}_n)$ の任意の置換に対して対称な関数 $\widetilde{W}_n$ へと解析接続される ([40, 2.5 節])．この $\widetilde{W}_n$ から

$$S_n((t_1, \boldsymbol{x}_1), \ldots, (t_n, \boldsymbol{x}_n)) := \widetilde{W}_n((it_1, \boldsymbol{x}_1), (it_2, \boldsymbol{x}_2), \ldots, (it_n, \boldsymbol{x}_n))$$

によって定まる実解析的関数 S_n を **n 点 Schwinger 関数**という．いま述べた解析接続においては，ν 次元ミンコフスキー時空の点 $(t, \boldsymbol{x})$ $(t \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{\nu-1})$ は，時間成分が純虚数である点 $\widetilde{x} = (it, \boldsymbol{x})$ に移る．一方，点 $\widetilde{x}$ の形式的ローレンツ–ミンコフスキー計量は $(it)^2 - |\boldsymbol{x}|^2 = -(t^2 + |\boldsymbol{x}|^2)$ である．したがって，時空の計量は，(符号を除いて) ユークリッド計量へと変容する．この意味において，上記の型の解析接続——標語的にいえば，純虚数時間への解析接続——をミンコフスキー時空上の量子場の理論の**ユークリッド化**という．ユークリッド化により，Wightman 超関数列の性質は，Schwinger 関数列の特性として表現される．Osterwalder–Schrader ([84], [85]) は，Schwinger 関数列の基本的性質のいくつかに着目し，今日，**Osterwalder–Schrader の公理系**と呼ばれる公理系を打ち立てた．Osterwalder–Schrader の公理系からミンコフスキー時空上の相対論的量子場の理論が構成されること——**Osterwalder–Schrader の再構成定理**——が示される ([84], [85], [107])．ゆえに，Wightman 流の量子場の理論と Osterwalder–Schrader の理論は同等である[13]．

ユークリッド化した理論の利点の一つは，付加的な条件があれば，n 点 Schwinger 関数 S_n を試験関数 $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^\nu)$ で均した汎関数

$$S_n(f_1, \ldots, f_n) := \int_{(\boldsymbol{R}^\nu)^n} S_n(x_1, \ldots, x_n) f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

——**Schwinger 汎関数**——はある ν 次元確率超過程 (一般化された確率場)[14] $\varphi(f)$ $(f \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^\nu))$ の

期待値として表され得るという点にある：

$$S_n(f_1,\ldots,f_n)=\int_\Omega \varphi(f_1)\cdots\varphi(f_n)d\mu.$$

ただし，(Ω,Σ,μ) は $\varphi(f)$ が定義されている確率空間である．このような $\varphi(f)$ は，ミンコフスキー時空上の量子場との対比において，**ユークリッド場**と呼ばれる．たとえば，自由な中性量子スカラー場の Schwinger 汎関数は，ガウス超過程と呼ばれる確率超過程の期待値として表される（[40, 4.5 節]）．こうして，Osterwalder–Schrader の公理系を満たす Schwinger 関数列を確率超過程を用いて構成する道が示唆されるとともに，量子場の理論と確率超過程の理論が結びつく．確率超過程は，もちろん，可換であるので，非可換な量子場に比べて扱いやすい．こうした着想に沿うユークリッド場の一般論は，E. Nelson [83] によって展開された．彼は，マルコフ性と呼ばれる性質を有するユークリッド場の理論の公理系――**Nelson の公理系**――を提示し，そこから Wightman の理論が再構成されることを示した．

以上に概略を述べた公理論的場の量子論は，数学的には，主に，ヒルベルト空間上の非有界線形作用素論，作用素値超関数論，無限次元位相線形空間論，連続群の無限次元ユニタリ表現，超関数論，多変数複素解析関数論，確率超過程論などと深く関わり，どちらかといえば，解析的な色彩に富んでいる．他方，Wightman 流の公理論的量子場の理論と並んで，作用素環（C^* 環，フォン・ノイマン環）を基礎に据える代数的アプローチ――も始められた（[22], [58]）．このアプローチによる研究は，**代数的量子場の理論** (algebraic quantum field theory) として発展し，量子場の理論の代数構造的な側面について深い認識をもたらした（たとえば，[23], [32], [57]）．C^* 環やフォン・ノイマン環は，ヒルベルト空間上の有界線形作用素の $*$ 代数であるが，量子力学や量子場の理論への（直接的）応用を念頭においた，ヒルベルト空間上の非有界線形作用素の（部分）$*$ 代数に関する研究もあることを付け加えておく（たとえば，この方面の研究の成書として [4] がある）．

1.5 構成的場の量子論

相対論的な自由場は相対論的量子場の理論の公理系を満たす（証明については，たとえば，[10], [40], [88] を参照）．しかし，自由場でなく，素粒子の相互作用を記述する量子場のモデルで相対論的量子場の理論の公理系を満たすもの――このようなモデルを**非自明なモデル**と呼ぶ――の存在を示すことは，当初，大きな課題の一つであった．この課題の解決に向けて，1960 年代の半ば頃から，非自明なモデルの存在を構成的に証明し，その上でモデルの諸特性を詳細に解析せんとする研究が開始された．この分野は**構成的場の量子論** (constructive quantum field theory) として発展する．この理論の展開の中で，ν 次元ミンコフスキー時空 $\boldsymbol{M}^\nu=\{(t,\boldsymbol{x})=(t,x_1,\ldots,x_{\nu-1})|t,x_j\in\boldsymbol{R}, j=1,\ldots,\nu-1\}$ $(\nu\geq 2)$ における非線形 Klein–Gordon 方程式

$$\frac{\partial^2\phi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t^2}-\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{\partial^2\phi(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_j^2}+m^2\phi(t,\boldsymbol{x})=-4\lambda\phi(t,\boldsymbol{x})^3 \tag{1}$$

$(m>0,\ \lambda>0$ はそれぞれ，質量，結合定数を表す定数パラメータ）にしたがう相対論的な古典的スカラー場 $\phi:\boldsymbol{M}^\nu\to\boldsymbol{R}$ に対応する，中性量子スカラー場のモデル――$\boldsymbol{\lambda(\phi^4)_\nu}$ **モデル**――で非自明なものが $\nu=2,3$ の場合に構成された（[33], [48]–[51]）．

一般に，相対論的量子場のモデルの数学的構成の方法には大きく分けて 2 種類ある．一つは，ミンコ

フスキー空間上で構成を行い，構成された理論が Wightman の公理系または Gårding–Wightman の公理系を満たすことを示す方法であり，もう一つは，ユークリッド時空 $\boldsymbol{R}^\nu$ において，Osterwalder–Schrader の公理系を満たす Schwinger 関数列を構成する方法である．実は，中性量子スカラー場についていえば，すでに示唆したように，後者の方法——**ユークリッド法**——の方がやりやすい．というのは，ユークリッド法は，基本的に，ある種の汎関数積分 (無限次元積分) の諸性質を解析することに帰着し，相関不等式など古典統計力学の手法が応用できるからである (詳しくは [40] を参照)．ユークリッド法では，発散の困難を避けるために，ν 次元ユークリッド時空 $\boldsymbol{R}^\nu$ を格子間隔 $a>0$ の立方格子空間 $\boldsymbol{Z}_a^\nu := \{(an_1,\ldots,an_\nu)|n_j \in \boldsymbol{Z}, j=1,\ldots,\nu\}$ に置き換え，さらに，格子空間の有限領域 (たとえば，1 辺の長さが $L>0$ の立方体) 上のユークリッド場を用いて '近似的' モデル——**格子近似モデル**——を定義することから出発する (言い換えれば，モデルが数学的にきちんと定義されるところまでもどる)．そして，この格子近似モデルの Schwinger 関数に関して，まず，無限体積極限 $L\to\infty$ をとり，次に連続体極限 $a\to 0$ をとることにより，Osterwalder–Schrader の公理系を満たす Schwinger 関数列を構成せんとするのである[15)]．この方法は，$\nu=2,3$ の場合にはうまくいった．ところが，$\nu\geq 4$ の場合，同じ方法で，ν 次元時空上の $\lambda(\phi^4)_\nu$ モデルを構成しようとすると，得られる理論は——$\nu=4$ の場合は，付加的な条件のもとで——自由場の理論と同等になってしまうことが示される ([3], [47])．すなわち，尋常な方法では，4 次元以上の時空における非自明な量子場のモデルは構成できないことが示唆されたのである[16)]．こうして，構成的場の量子論のプログラムは深刻な壁につきあたった．この困難は現在も克服されておらず，物理的に重要な 4 次元時空上の非自明な相対論的量子場のモデルの存在を証明する問題は，数理物理学における最も重要かつ難しい問題の一つとして残されている．ちなみに，クレイ研究所は，この問題をミレニアム賞金問題 [65] の一つ——ヤン–ミルズ量子場の理論を構成し，かつ質量ギャップの存在を証明する問題 [67]——として挙げている．

1.6 非相対論的量子場の理論の数学的研究

相対論的量子場のモデルの数学的構成の研究の流れと並行して，非相対論的な量子場のモデルの数学的研究もなされてきた (初期の研究として，たとえば，[35], [72], [73] がある)．この場合も量子場の理論における発散の困難に関わる数学的構造を解析し，発散のない理論の構築が目指されることになる．

ところで，相対論的な量子場のモデルか否かにかかわらず，発見法的・形式的表示はあるものの，その定義や存在が不明であるモデルを数学的に厳密な仕方で構成しようとする場合，まず，紫外発散や赤外発散が起きない '近似的' モデルを定義する．これは，量子場の相互作用を記述する作用素——相互作用項——に対して，紫外発散や赤外発散を消す働きをする**運動量切断**と呼ばれる因子を導入することによってなされる[17)]．正質量の量子場，すなわち，付随する素粒子の質量が正である量子場の場合，運動量の大きさが大きい範囲にある素粒子の相互作用への寄与を小さくするだけでよく，この型の運動量切断を**紫外切断**という[18)]．一方，光子場のように，質量ゼロの素粒子を生成したり，消滅させたりする機能を有する量子場——質量ゼロの量子場——の場合，紫外切断に加えて，その大きさがゼロに近い運動量も切断しなければならない場合もある．この場合の運動量切断は**赤外切断**と呼ばれる[19)]．また，モデルによっては，上記の $\lambda(\phi^4)_\nu$ モデルのように，量子場の相互作用が行われる空間の範囲を有界領域に限定する**体積切断**も必要とされるものもある．

量子場のモデルを特徴付ける物理量の一つとして，当の量子場によって記述される量子系の全エネル

ギーを表す**ハミルトニアン** H がある．ハミルトニアンは，公理論的には，量子系の状態のヒルベルト空間上の自己共役作用素であることが要請され，系の状態の時間発展はユニタリ作用素 $e^{-itH/\hbar}$ によって支配される（$t \in \boldsymbol{R}$ は時間変数）．すなわち，系の時刻 t_0 の状態を表すベクトルを Ψ とすれば，時刻 $t > t_0$ における状態を表すベクトルは——その間に系に対して観測がなされない限り——$e^{-i(t-t_0)H/\hbar}\Psi$ で与えられる（量子系の時間発展に関する公理）．ハミルトニアン H は，通常，非有界である．したがって，その場合，H の非有界性にまつわる諸点に関して注意深い考察が必要とされる．

いま述べたことを考慮して，量子場のモデル構成の方法の一つとして，まず，適切な切断を入れてハミルトニアンをきちんと定義することから始める方法がある[20)]．このアプローチは**ハミルトニアン法**と呼ばれる．そして，そのように切断を入れた理論から，切断を除く極限をとることにより——ここで‘くりこみ’に相当する操作が必要になる——，目標とする‘本来の’量子場の理論を構成しようとするのである[21)]．

E. Nelson [82] は，非相対論的量子場の理論における紫外発散の問題に関して，斬新な結果をもたらした．彼は，有限個の非相対論的な核子が正質量の中性量子スカラー場（中性中間子の量子場）と相互作用を行うモデル——今日，**Nelson モデル**と呼ばれる——に関して，エネルギーのくりこみ——紫外切断 $\kappa > 0$（その大きさが κ より大きい運動量の素粒子は相互作用に寄与しない）を入れたモデルのハミルトニアン H_κ から，紫外切断を除去する極限 $\kappa \to \infty$ でマイナス無限大に発散するある定数作用素 E_κ を引くこと——を行うことにより，くりこまれたハミルトニアン $\hat{H}_\kappa := H_\kappa - E_\kappa$ によって生成される時間発展のユニタリ作用素 $e^{-it\hat{H}_\kappa/\hbar}$ ($t \in \boldsymbol{R}$) が，ある自己共役作用素 $\hat{H}_\infty$ によって生成される時間発展作用素 $e^{-it\hat{H}_\infty/\hbar}$ に，$\kappa \to \infty$ のとき，強収束することを示した．この仕事は，紫外切断の除去が同一のヒルベルト空間内において作用素のレヴェルで遂行される非自明な例が存在することを初めて示した意味で画期的である．というのは，一般的には，相対論的量子場であるか否かに関わらず，切断の除去が作用素の収束によってなされることは期待できず，量子場の真空期待値 (Wightman 超関数)[22)]（$*$ 代数の言葉でいえば，$*$ 代数上の状態列）の収束を用いてなされると推測されるからである．この場合，切断除去の極限として得られる Wightman 超関数から，$*$ 代数の理論における Gel'fand–Naimark–Segal (GNS) 構成法（たとえば，[16, 2.5 節] を参照）により，ヒルベルト空間とそこで作用する量子場が構成されるのである．

1.7 スペクトル解析

一般に，あるヒルベルト空間上の自己共役作用素として与えられる，量子系のハミルトニアン H のスペクトル $\sigma(H)$——より細かくは，真性スペクトル (essential spectrum)，離散スペクトル，絶対連続スペクトル，特異連続スペクトル，点スペクトル（固有値）など——を同定することは量子数理物理学における基礎的課題の一つである．作用素 H が下に有界ならば，そのスペクトルの下限 $E_0(H) := \inf \sigma(H)$ は有限であり，**最低エネルギー**と呼ばれる．これは $\sigma(H)$ に属するが，H の固有値とは限らない．もし，$E_0(H)$ が H の固有値であるならば，その固有空間 $\mathscr{H}_{E_0(H)} := \ker(H - E_0(H))$ の任意の零でないベクトルを H の**基底状態** (ground state) という．この場合，H（または当該の量子系）は基底状態をもつといい，$E_0(H)$ を**基底状態エネルギー**と呼ぶ．$\dim \mathscr{H}_{E_0(H)} = 1$ の場合，**基底状態は一意的**であるという．基底状態が一意的に存在する系は物理的に安定であると解釈される．この意味において，諸々の量子場のモデルにおいて，基底状態の存在と一意性を示すことは量子場の数理解析において第一義的な重要性を有する．

正質量の量子場の切断モデルにおける基底状態の存在と一意性を示し，かつスペクトルを同定する手法は，構成的場の量子論の発展の中で整えられた[23)].

1.8　質量ゼロの量子場の理論における赤外問題

正質量の量子場のモデルの構成にあたっては，付随する素粒子の質量が正であることにより，赤外切断は必要ない．質量ゼロの量子場モデルの場合も，紫外切断を入れれば，赤外切断なしでもハミルトニアン自体は定義され得る．しかしながら，その基底状態が存在するか否かは非常に微妙な問題となる．これは，技術的には，質量ゼロの量子場のモデルでは，相互作用がない場合のハミルトニアン，すなわち，無摂動ハミルトニアンのすべての固有値 (基底状態エネルギーを含む) が**埋蔵固有値**——連続スペクトルの中に埋め込まれた固有値——になっていること，そして，埋蔵固有値は摂動のもとで安定であるとは限らないことによる[24)].

質量ゼロの量子場が関与するモデルの基底状態の存在は赤外切断の特性に依存し得る．赤外切断は運動量の関数によって表される (紫外切断も同様)．この関数を赤外切断関数と呼ぶ．運動量ゼロの近傍での赤外切断関数の振る舞いに応じて，赤外切断関数は正則なものと特異なものとに分けられる．赤外切断関数が運動量ゼロの近傍で正の定数の場合 (これは赤外切断なしの場合) は特異な場合に属し，運動量の大きさがある値より小さければゼロとなる赤外切断関数は正則な赤外切断関数の基本的な例である．たとえば，質量ゼロの van Hove モデル——文献 [35], [79], [80], [101] で扱われた，正質量の中性量子スカラー場のモデルにおいて質量をゼロとしたもの——の場合，赤外切断が正則であれば基底状態は存在し，特異であれば，存在しないことが証明される ([10, 12 章], [13, §8.2, §8.3])．しかも，特異な場合，ある種の発散 (赤外発散) が関与している．この簡単な例から洞察されるように，質量ゼロの量子場のモデルの場合，質量がゼロであることに起因する諸々の問題が生じ得る．この種の問題は総称的に**赤外問題** (infrared problem) と呼ばれる．赤外問題に対する最初の包括的・開拓的な研究は J. Fröhlich [46] によってなされた．この仕事では，スピンのない電子と質量ゼロの中性量子スカラー場との相互作用モデルが取り上げられ (その一つは，数学的には，質量ゼロの Nelson モデルと同等)，赤外切断のないモデルを構築するための数学的方法の一つ (最終的に GNS 構成法に持ち込む方法) が提示された．

1.9　非相対論的量子電磁気学の数学的理論

非相対論的な量子場の理論で原子物理学と直結する最も現実的なものの一つは，非相対論的な荷電素粒子——典型的には非相対論的電子——と光子場の相互作用を扱う**非相対論的量子電磁気学**である．光子場は質量ゼロの量子場であるので，赤外問題が起こり得る ([29], [86])．論文 [46] では，非相対論的量子電磁気学における赤外問題の数学的解析は将来の課題の一つとして言及されただけであった．筆者は，調和ポテンシャルの作用のもとにある 1 個の電子が光子場と双極近似 (電子の反跳を無視する近似) の形で相互作用を行うモデルについて，(1) ハミルトニアンのスペクトル解析——特に，赤外切断なしでの基底状態の存在と一意性，無摂動ハミルトニアンの基底状態エネルギー以外のすべての固有値 (励起状態エネルギー) が摂動のもとで消失し，共鳴極が出現する現象の解析——；(2) 散乱理論と漸近的完全性；(3) 紫外切断の除去——この際に質量に関して無限大のくりこみが必要とされる——など包括的・全体的な研究を行い，非相対論的量子電磁気学の数学的基礎付けに関して，最初のまとまった理論を確立した ([5], [6])．この解析を可能にした要素の一つは，当該のモデルにおいては，電子の位置作用素や光子場のハイゼンベルク作用素[25)] が明示的な表示をもつ，という構造であった．

だが，より一般の場合，すなわち，双極近似でない場合や電子に作用するポテンシャルがより一般のクラスに属する場合には，その種の構造は期待できない．それゆえ，この場合には，別の方法が探求されねばならなかった．

こうした研究の流れの中で，1990 年代の後半にいたって一つのブレークスルーが起こる．Arai–Hirokawa [21] と Bach–Fröhlich–Sigal [26], [27] によって，独立に，量子的粒子と質量ゼロの量子場の相互作用モデルのある一般的なクラスに対して，基底状態の存在を作用素論的に示す方法が提示されたのである．これらの研究は，それまで極めて困難とされてきた，質量ゼロの量子場が関与する理論における埋蔵固有値の摂動問題に対して，まったく新しいアプローチによる解法への道を切り拓いた．実際，その後，同様の着想に基づく作用素論的手法 [36], [55] も追加され26)，この分野の研究は飛躍的に進展した (より詳しくは [13], [14], [64] を参照)．量子場モデルのハミルトニアンのスペクトルの同定に関しては，任意のヒルベルト空間とボソンフォック空間とのテンソル積ヒルベルト空間で働く，あるクラスの自己共役作用素の真性スペクトルを同定するための新しい定理が発見され ([11])，その応用の一つとして，質量ゼロの量子場が関与するモデルのある一般的なクラスに対して，基底状態の存在の有無にかかわらず，ハミルトニアン H の真性スペクトル $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ とスペクトル $\sigma(H)$ は一致し，$\sigma(H)=\sigma_{\mathrm{ess}}(H)=[E_0(H),\infty)$ が成り立つことが示された27)．現在では，非有界作用素や汎関数積分の解析に関する技術もたいへん高度に洗練され，量子場の数理解析並びに関連する諸分野において数多くの結果が蓄積されてきている (レヴューとして [63], [64]，成書として [37], [76], [96] がある)．この領域はなおも活発に研究されており，広がりと深化を見せている．

1.10 正準交換関係の表現と基底状態の存在の有無

これまでの叙述では，陽にはふれなかったが，量子場のモデルを構築するための基礎となる‘正準量子化’は，数学的な観点からは，無限自由度の正準交換関係 (canonical commutation relations ; CCR) (Bose 場の場合) または正準反交換関係 (canonical anticommutation relations ; CAR) (Fermi 場の場合) の表現とみることができる．

一般に，実内積空間 $\mathscr{V}$ の各元 f に対して，ヒルベルト空間 $\mathscr{F}$ 上の対称作用素 $\phi(f),\pi(f)$ が対応し，$\mathscr{F}$ で稠密な部分空間 $\mathscr{D}$ が存在して，次の (i)〜(iv) が成立するとき，三つ組み $(\mathscr{F},\mathscr{D},\{\phi(f),\pi(f)|f\in\mathscr{V}\})$ を $\mathscr{V}$ **上の CCR の表現**といい，$\mathscr{F}$ をその表現空間という28)：(i) $\mathscr{D}\subset D(\phi(f))\cap D(\pi(f))$, $f\in\mathscr{V}$ (作用素 A に対して，$D(A)$ は A の定義域を表す)；(ii) 任意の $f\in\mathscr{V}$ に対して，$\phi(f)\mathscr{D}\subset\mathscr{D}$, $\pi(f)\mathscr{D}\subset\mathscr{D}$；(iii) (試験ベクトルに関する線形性) すべての $f,g\in\mathscr{V}$, $a,b\in\boldsymbol{R}$ に対して，$\phi(af+bg)=a\phi(f)+b\phi(g)$, $\pi(af+bg)=a\pi(f)+b\pi(g)$ ($\mathscr{D}$ 上)；(iv) (CCR) すべての $f,g\in\mathscr{V}$ に対して，$[\phi(f),\pi(g)]=i\hbar\langle f,g\rangle_{\mathscr{V}}$, $[\phi(f),\phi(g)]=0$, $[\pi(f),\pi(g)]=0$ ($\mathscr{D}$ 上)．ただし，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{V}}$ は $\mathscr{V}$ の内積を表す．

物理的には，作用素 $\phi(f)$ が量子場を表すとき，$\pi(f)$ は $\phi(f)$ の**正準共役運動量**または**正準共役場**と呼ばれる．

$\mathscr{V}$ 上の二つの CCR の表現 $(\mathscr{F},\mathscr{D},\{\phi(f),\pi(f)|f\in\mathscr{V}\})$, $(\mathscr{F}',\mathscr{D}',\{\phi'(f),\pi'(f)|f\in\mathscr{V}\})$ に対して，ユニタリ変換 $U:\mathscr{F}\to\mathscr{F}'$ があって，$U\phi(f)U^{-1}=\phi'(f)$, $U\pi(f)U^{-1}=\pi'(f)$, $f\in\mathscr{V}$ が成り立つとき，これらの表現は**同値**であるという29)．

CAR の表現の定義については省略する (たとえば，[9, 5.2.2 項] を参照)．

注意 1 実内積空間 $\mathscr{V}$ が有限次元でその次元が n の場合，三つ組み $(\mathscr{F},\mathscr{D},\{\phi(f),\pi(f)|f\in\mathscr{V}\})$

は自由度 n の CCR の表現と呼ばれる．これは，物理的には，外的な力学的自由度が n の量子力学系──量子場ではなく，有限個の量子的粒子からなる系──の記述に使われる．したがって，上述の ‘CCR の表現’ という概念は有限自由度の量子力学を包含する統一的な概念なのである．表現論的な観点からは，有限次元自由度の量子力学は，有限自由度の CCR および CAR の表現 (スピンのような内部自由度を記述する) として統一的に捉えることができる．同様に，自由な量子場の理論や切断の入った相互作用を記述する量子場の理論は，無限自由度の CCR や CAR の表現として捉えられる．しかし，切断のない，完全な時空対称性を有する非自明な量子場のモデルがそのような観点から捉えられるかどうかは未知である．実は，これは，非自明な相対論的な量子場の理論の構成の問題と深く関わっており，時空が 5 次元以上の場合，否定的な結果，すなわち，‘CCR や CAR の表現を基盤としてつくられる相対論的な量子場は自由場しか存在しない’ という，ある意味で興味深い結果 [28] が得られている．時空が 4 次元の場合について，この事実が成立するかしないかを明らかにすることは重要な問題の一つとして残されている．

上述のハミルトニアン法においては，Bose 場のモデルは，CCR を満たす対象と他のいくつかの代数的対象に関する交換関係を用いて表される代数的構造によって抽象的に定義される[30)]．そして，CCR の表現を一つ与えるごとに，当のモデルの具象的実現の一つが与えられるのである．この文脈では，CCR の表現は，物理的には，時刻 0 の場 (量子場とその正準共役場) を表す．d を自然数として，$(1+d)$ 次元時空上の Bose 場のモデルを構成する場合，通常は，時刻 0 の場を表す CCR の表現として，$\mathscr{S}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^d)$ 上の Fock 表現 (以下の 3 節の注意 8 を参照) が採用される．だが，これは，自由 Bose 場のモデルが Fock 表現を用いて簡潔かつ整合的に構成されること，および非自由場の理論を自由場の理論の摂動として構成しようとする発想によるものであり，何か普遍的な基準があってのことではない．Fock 表現と同値でない CCR の表現が無数に存在すること (たとえば，[9, 4.8.3 項] を参照) を考慮するならば，Fock 表現に固執する必要はない．すなわち，Bose 場のモデルの構成にあたっては，Fock 表現と非同値な CCR の表現を使う道も開かれているのである．この観点を推し進めると，一つのモデルに対して，非同値な実現が存在する可能性が洞察される．実際，質量ゼロで赤外切断なしの van Hove モデルや Nelson モデルでは非同値な実現が現れる ([10, 12 章], [12])．Fock 表現では，これらのモデルの基底状態は存在しないが，Fock 表現と同値でない ‘適切な’ CCR の表現では基底状態の存在が証明されるのである．質量ゼロで赤外切断なしの Nelson モデルを非 Fock 表現 (Fock 表現と同値でない表現) を用いて解析した研究 [12] は，1.8 項で言及した赤外問題に新たな光を当てるものである (関連する研究として [90] がある)[31)]．

以上，量子場の数理解析の歴史を手短に概観した．以下では，筆者が最近発見した新しい漸近的摂動論 [19] を概説したい．これも，量子場の理論における埋蔵固有値の摂動論の一部をなすものである．

2 新しい漸近的摂動論

2.1 背景

結合定数 $\lambda \in \boldsymbol{R}$ を有する，量子場のモデルのハミルトニアン $H(\lambda)$ の基底状態 $\Psi_0(\lambda)$ が任意の $|\lambda| < r$ ($r > 0$ は定数) に対して存在することが示された場合，次の重要な研究課題の一つとして，基底状態エネルギー $E_0(\lambda) := \inf \sigma(H(\lambda))$ または $\Psi_0(\lambda)$ が λ の関数としてどのようなものであるか

を調べることが挙げられる．無摂動ハミルトニアン $H_0 := H(0)$ の基底状態エネルギー $E_0 := E_0(0)$ が H_0 の離散固有値の場合には，解析的摂動論 [71], [89] の応用により，摂動作用素 $H_1(\lambda) := H(\lambda) - H_0$ に対する適切な条件のもとで，$E_0(\lambda)$ と $\Psi_0(\lambda)$ はともに $\lambda = 0$ の近傍で漸近的または (条件を強めれば) 解析的であることが示される．しかし，E_0 が離散固有値でない場合，特に，埋蔵固有値の場合には，解析的摂動論を適用できないので，別の方法を考える必要がある．

Hainzl–Seiringer [59] は，変分法と作用素不等式の方法を用いて，非相対論的量子電磁気学におけるスピン付きの Pauli–Fierz モデル [86] の基底状態エネルギーに関して，結合定数の 2 次の次数までの漸近展開を導いた．Bach–Fröhlich–Pizzo [24], [25] は，スピンなしの Pauli–Fierz モデルの基底状態エネルギーに対して，結合定数の任意の有限の次数までの '準漸近的展開' を求めるための逐次代入法を開発した．Faupin–Møller–Skibsted [43] は埋蔵固有値に関して，結合定数の 2 次の次数までの漸近展開を導く一般摂動論を提示した．他方，何人かの研究者は，$E_0(\lambda)$ が λ について解析的であるという結果を得た：Griesemer–Hasler [54] (非相対論的量子電磁気学のあるモデル)；Abdesselam [1] と Hasler–Herbst [61] (質量ゼロのスピン-ボソンモデル)；Abdesselam–Hasler [2] (質量ゼロの Nelson モデル)．

しかしながら，これらの研究で使用された方法は，扱うモデルに依存しているように見える．そこで，筆者は次の特性を有する新しい漸近的摂動論を探求した：(i) モデルに依らない；(ii) E_0 が離散固有値であるか否かにも依らない；(iii) E_0 が離散固有値の場合には，従来の漸近的摂動論 [71], [89] と同じ結果を与える．だが，そのためには，まったく新しいアイディアが必要であった．T. Kato [71] によって包括的に展開された解析的摂動論や漸近的摂動論の起源は，Rayleigh [87] と Schrödinger [91] にある (それゆえ，解析的摂動論における摂動級数は，しばしば，Rayleigh–Schrödinger 級数と呼ばれる)．他方，Rayleigh [87] と Schrödinger [91] の摂動論とは別の型の摂動論があったことは案外知られていない．それは Brillouin [31] と Wigner [104] によるものである ([106])．Brillouin–Wigner の摂動論の利点は，無摂動固有値 E_0 が孤立固有値である必要がないということであり (しかし，さしあたり，多重度が 1 であることが要請される)，形式的には，Rayleigh–Schrödinger の摂動論を含む．他方，すでに注意したように，Rayleigh–Schrödinger の摂動論に起源を有する解析的摂動論では，無摂動固有値は離散固有値でなければならない．そこで，次のように問うのは自然である．Brillouin–Wigner の形式的摂動論の背後にある数学理論はどのようなものか．筆者は，論文 [19] において，そのような数学理論の構築へ向けての最初の第一歩となる新しい漸近的摂動論を展開した．以下は，この理論の主要部分の解説である．

2.2 固有値と固有ベクトルに関する連立方程式

$\mathscr{H}$ を複素ヒルベルト空間とし，その内積とノルムをそれぞれ，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ (左側に関して反線形，右側に関して線形)，$\| \cdot \|$ と記す．本論に入る前に，ヒルベルト空間上の線形作用素論における基本的定義と記号を列挙しておく．

$A, A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ を $\mathscr{H}$ 上の線形作用素とする．

(i) $D(A)$: A の定義域．

(ii) $\ker A := \{\Psi \in D(A) | A\Psi = 0\}$ (A の核)．

(iii) $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$: A の点スペクトル (固有値の全体)．

(iv) $D(\sum_{j=1}^n A_j) := \bigcap_{j=1}^n D(A_j)$．

(v) $D(\prod_{j=1}^{n} A_j) := \{\Psi \in D(A_n) | A_j \cdots A_n \Psi \in D(A_{j-1}), j = 2, \ldots, n\}$,
$\prod_{j=1}^{n} A_j := A_1 A_2 \cdots A_n$.

H_0 を $\mathscr{H}$ 上の対称作用素で次の条件を満たすものとする：

(H.1) H_0 は単純固有値 (多重度 1 の固有値) $E_0 \in \boldsymbol{R}$ をもつ.

ここで，E_0 は H_0 の孤立固有値である必要はなく，埋蔵固有値でもよい．固有値 E_0 に属する単位ベクトル Ψ_0 を一つ固定する：

$$H_0 \Psi_0 = E_0 \Psi_0, \quad \|\Psi_0\| = 1.$$

固有空間

$$\mathscr{H}_0 := \{\alpha \Psi_0 | \alpha \in \boldsymbol{C}\}$$

への正射影作用素を P_0 とすれば

$$Q_0 := I - P_0$$

は $\mathscr{H}_0$ の直交補空間 $\mathscr{H}_0^{\perp}$ への正射影作用素である.

作用素 H_0 は対称であるので，H_0 は $\mathscr{H}_0$ によって簡約される (すなわち，任意の $\Psi \in D(H_0)$ に対して，$P_0 \Psi \in D(H_0)$ かつ $H_0 P_0 \Psi = P_0 H_0 \Psi$ が成り立つ)．したがって，H_0 は $\mathscr{H}_0^{\perp}$ によっても簡約される．$\mathscr{H}_0^{\perp}$ への簡約部分を H_0' とする．すなわち，

$$D(H_0') := D(H_0) \cap \mathscr{H}_0^{\perp}, \quad H_0' \Psi := H_0 \Psi, \ \Psi \in D(H_0').$$

作用素 H_0' は $\mathscr{H}_0^{\perp}$ 上の対称作用素である.

次の事実に注意する：$E \in \boldsymbol{C} \setminus \sigma_{\mathrm{p}}(H_0')$ ならば，$H_0' - E$ は単射であり，逆作用素 $(H_0' - E)^{-1}$ ——有界作用素とは限らない——が存在する.

H_1 を $\mathscr{H}$ 上の線形作用素 (対称作用素とは限らない) とし，この作用素による H_0 の摂動

$$H(\lambda) := H_0 + \lambda H_1 \quad (\lambda \in \boldsymbol{R})$$

を考える．ここで，$\lambda \in \boldsymbol{R}$ は**摂動パラメータ**または**結合定数**と呼ばれる．この作用素の固有ベクトルと固有値に関する基本定理を述べる前に，あるいいまわしを定義しておく.

定義 1 (i) ベクトル $\Psi \in \mathscr{H}$ とベクトル $\Phi \in \mathscr{H}$ が $\langle \Psi, \Phi \rangle \neq 0$ を満たすとき，Ψ と Φ は**重なり合う**という.

(ii) ベクトル $\Psi \in \mathscr{H}$ と重なり合うベクトルが部分集合 $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ の中にあるならば，**Ψ は $\mathscr{D}$ と重なり合う**という.

次の定理は，新しい漸近的摂動論のための基礎となる構造を記述する：

定理 1 (H.1) を仮定する．このとき，各 $\lambda \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ に対して，次の (i)，(ii) が成立する：

(i) $E(\lambda) \in \sigma_{\mathrm{p}}(H(\lambda)) \setminus \sigma_{\mathrm{p}}(H_0')$ かつ Ψ_0 が $\ker(H(\lambda) - E(\lambda))$ と重なり合うならば，ベクトル $\Psi(\lambda) \in \ker(H(\lambda) - E(\lambda))$ で $Q_0 H_1 \Psi(\lambda) \in D((E(\lambda) - H_0')^{-1})$ かつ

$$E(\lambda) = E_0 + \lambda \langle \Psi_0, H_1 \Psi(\lambda) \rangle, \tag{2}$$

$$\Psi(\lambda) = \Psi_0 + \lambda (E(\lambda) - H_0')^{-1} Q_0 H_1 \Psi(\lambda) \tag{3}$$

を満たすものが存在する．

(ii) [(i) の逆] もし，$E(\lambda) \in \boldsymbol{C} \setminus \sigma_{\mathrm{p}}(H_0')$ と $\Psi(\lambda) \in D(H(\lambda)) \cap D((E(\lambda) - H_0')^{-1} Q_0 H_1)$ が (2) と (3) を満たすならば，$E(\lambda) \in \sigma_{\mathrm{p}}(H(\lambda))$ かつ $\Psi(\lambda) \in \ker(H(\lambda) - E(\lambda)) \setminus \{0\}$ であり，$\Psi(\lambda)$ と Ψ_0 は重なり合う．

注意 2 定理 1 においては，H_0 が下に有界な自己共役作用素の場合であっても，E_0 は H_0 の基底状態エネルギーである必要はない．また

$$\lim_{\lambda \to 0} E(\lambda) = E_0 \tag{4}$$

とは限らない．だが，もし，定数 $\lambda_0 > 0$ があって $\sup_{|\lambda| < \lambda_0} |\langle \Psi_0, H_1 \Psi(\lambda) \rangle| < \infty$ が成り立つならば，(2) から (4) が導かれる．

定理 1 の証明は，それほど難しくないが，省略する ([19] の Proposition 2.1 を参照)．定理 1-(i) における (2) と (3) は $H(\lambda)$ の固有値 $E(\lambda)$ と固有ベクトル $\Psi(\lambda)$ に関する連立方程式であることに注意しよう．他方，定理 1-(ii) は，$H(\lambda)$ の固有値の存在を証明する方法の一つを与える．すなわち，連立方程式 (2)，(3) を満たす解 $(E(\lambda), \Psi(\lambda))$ の存在が示されるならば，$E(\lambda)$ は $H(\lambda)$ の固有値であり，$\Psi(\lambda)$ はこれに属する固有ベクトルの一つであることが結論されるのである．

量子場のモデルへの応用においては，次の状況が起こり得る：

(H.2) (i) H_1 は対称作用素であり，$\Psi_0 \in D(H(\lambda)) = D(H_0) \cap D(H_1)$.

(ii) 定数 $r > 0$ が存在して，すべての $\lambda \in \boldsymbol{I}_r^{\times} := (-r, 0) \cup (0, r)$ に対して，$H(\lambda)$ は，次の性質を満たす固有値 $E(\lambda) \in \boldsymbol{R}$ をもつ：

(a) $E(\lambda) \notin \sigma_{\mathrm{p}}(H_0')$.

(b) Ψ_0 は $\ker(H(\lambda) - E(\lambda))$ と重なり合う．

次の定理は定理 1 からただちに導かれる：

定理 2 (H.1) と (H.2) を仮定する．このとき，各 $\lambda \in \boldsymbol{I}_r^{\times}$ に対して，ベクトル $\Psi(\lambda) \in \ker(H(\lambda) - E(\lambda))$ で $Q_0 H_1 \Psi(\lambda) \in D((E(\lambda) - H_0')^{-1})$ かつ (2)，(3) を満たすものが存在する．

2.3 最低エネルギーに対する上界

摂動作用素 H_1 が対称作用素の場合を考える．このとき，$H(\lambda)$ の数域の下限

$$\mathscr{E}_0(\lambda) := \inf_{\Psi \in D(H(\lambda)), \|\Psi\| = 1} \langle \Psi, H(\lambda) \Psi \rangle \tag{5}$$

は実数または $-\infty$ である．

もし，$H(\lambda)$ が自己共役で下に有界ならば，$\mathscr{E}_0(\lambda) = E_0(H(\lambda))$ ($H(\lambda)$ の最低エネルギー) であることに注意しよう．

無摂動作用素 H_0 と E_0 に関するより強い条件として次のものを考える：

(H.3) H_0 は自己共役であり，$E_0 = \inf \sigma(H_0)$ (このとき，$H_0 \geq E_0$).

仮定 (H.1) と (H.3) のもとで次の定理が導かれる：

定理 3 ($\mathscr{E}_0(\lambda)$ に対する上界) (H.1) と (H.3) を仮定し，H_1 は対称作用素で

$$\Psi_0 \in D(H_1 (H_0' - E_0)^{-1} Q_0 H_1)$$

を満たすとする．次の量 N_0, a, b を導入する：

$$N_0 := \|(H_0' - E_0)^{-1} Q_0 H_1 \Psi_0\|^2,$$
$$a := \langle Q_0 H_1 \Psi_0, (H_0' - E_0)^{-1} Q_0 H_1 \Psi_0 \rangle,$$
$$b := \langle (H_0' - E_0)^{-1} Q_0 H_1 \Psi_0, H_1 (H_0' - E_0)^{-1} Q_0 H_1 \Psi_0 \rangle.$$

このとき，すべての $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$\mathscr{E}_0(\lambda) \le E_0 + \frac{1}{1 + N_0 \lambda^2} \left(\langle \Psi_0, H_1 \Psi_0 \rangle \lambda - a\lambda^2 + b\lambda^3 \right). \tag{6}$$

証明 (概略)　連立方程式 (2) と (3) から，発見法的な意味で，ベクトル

$$\Psi_1 := \Psi_0 + \lambda (E_0 - H_0')^{-1} Q_0 H_1 \Psi_0 \in D(H_0) \cap D(H_1)$$

は，$H(\lambda)$ の基底状態に対する第一次近似を与えると予想される．したがって，このベクトルの規格化 $\hat{\Psi}_1 := \Psi_1 / \|\Psi_1\|$ を (5) における最小化ベクトル列の一つとして選べば，$\mathscr{E}_0(\lambda) \le \langle \hat{\Psi}_1, H(\lambda) \hat{\Psi}_1 \rangle$ であり，比較的よい上界が得られると考えられる．右辺の計算については，[19, Theorem 2.7] を参照. ∎

注意 3　$(H_0' - E_0)^{-1} \ge 0$ であるので，$a \ge 0$ である．もし，$H_1 \Psi_0 \notin \mathscr{H}_0$ ならば $a > 0$ が示される.

系 1　定理 3 と同じ仮定のもとで

$$|\langle \Psi_0, H_1 \Psi_0 \rangle| < |\lambda| (a - b\lambda)$$

が成り立つ場合を考える．このとき，$\mathscr{E}_0(\lambda) < E_0$．特に $\mathscr{E}_0(\lambda) \in \rho(H_0)$ (H_0 のレゾルヴェント集合).

証明　仮定された不等式は $\langle \Psi_0, H_1 \Psi_0 \rangle \lambda - a\lambda^2 + b\lambda^3 < 0$ を導く．これと (6) によって求める不等式が得られる. ∎

2.4　$E(\lambda)$ の λ について 2 次の次数までの漸近展開

固有値 $E(\lambda)$ の λ に関する漸近展開を導出するには，付加的な条件が必要とされる：

(H.4) (i) $\lim_{\lambda \to 0} \|\Psi(\lambda)\| = 1$. (ii) $E(\lambda) < E_0$, $\forall \lambda \in \boldsymbol{I}_r^{\times}$.

以下では，(H.1)–(H.4) を仮定する．次の作用素を導入する：

$$K(\lambda) := (E(\lambda) - H_0)^{-1} Q_0 H_1, \quad G(\lambda) := H_1 (E(\lambda) - H_0)^{-1} Q_0.$$

定理 4 ([19, Theorem 3.5])　(H.1)–(H.4) を仮定する．さらにすべての $\lambda \in \boldsymbol{I}_r^{\times}$ に対して

$$\Psi_0 \in D(G(\lambda) H_1) \cap D((H_0' - E_0)^{-1/2} Q_0 H_1) \tag{7}$$

であり，$\sup_{\lambda \in \boldsymbol{I}_r^{\times}} \|G(\lambda) H_1 \Psi_0\| < \infty$ が成り立つとする．このとき

$$E(\lambda) = E_0 + \lambda \langle \Psi_0, H_1 \Psi_0 \rangle - a\lambda^2 + o(\lambda^2) \quad (\lambda \to 0).$$

注意 4　条件 (7) は，ベクトル Ψ_0 に関するある種の正則性 (regularity)── Ψ_0 がベクトルとしてどのようなクラスに属するかという性質──の条件として解釈され得る.

2.5　$E(\lambda)$ の λ について任意の有限次数までの漸近展開

作用素

$$K_0 := (E_0 - H_0')^{-1} Q_0 H_1$$

を導入し，各 $\ell \in \boldsymbol{N}$ に対して，$\boldsymbol{R}^\ell$ 上の作用素値関数 K_ℓ を次のように定める：

$$K_\ell(x_1, \ldots, x_\ell) := \sum_{r=1}^{\ell} (-1)^r \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_r=\ell \\ j_1,\ldots,j_r \geq 1}} x_{j_1} \cdots x_{j_r} (E_0 - H_0')^{-(r+1)} Q_0 H_1,$$
$$(x_1, \ldots, x_\ell) \in \boldsymbol{R}^\ell.$$

$N \geq 2$ を自然数とし，条件

$$\Psi_0 \in \bigcap_{n=2}^{N} \bigcap_{\substack{q+\ell=n \\ q,\ell \geq 1}} \bigcap_{\substack{\ell_1+\cdots+\ell_q=\ell-1 \\ \ell_1,\ldots,\ell_q \geq 0}} \bigcap_{r_1=0}^{\ell_1} \cdots \bigcap_{r_q=0}^{\ell_q} D\left(\prod_{j=1}^{q} (E_0 - H_0')^{-(r_j+1)} Q_0 H_1 \right) \tag{8}$$

のもとで，有限数列 $\{a_n\}_{n=1}^N$ を次の漸化式によって定義する：

$$a_1 := \langle \Psi_0, H_1 \Psi_0 \rangle,$$
$$a_n := \sum_{\substack{q+\ell=n \\ q,\ell \geq 1}} \sum_{\substack{\ell_1+\cdots+\ell_q=\ell-1 \\ \ell_1,\ldots,\ell_q \geq 0}} \langle H_1 \Psi_0, K_{l_1}(a_1, \ldots, a_{\ell_1}) \cdots K_{l_q}(a_1, \ldots, a_{\ell_q}) \Psi_0 \rangle,$$
$$n = 2, \ldots, N.$$

たとえば，a_2, a_3 は次のように与えられる：

$$a_2 = -\langle H_1 \Psi_0, (H_0' - E_0)^{-1} Q_0 H_1 \Psi_0 \rangle = -a \leq 0,$$

$$a_3 = \langle (H_0' - E_0)^{-1} H_1 \Psi_0, H_1 (H_0' - E_0)^{-1} Q_0 H_1 \Psi_0 \rangle$$
$$- \langle \Psi_0, H_1 \Psi_0 \rangle \| (H_0' - E_0)^{-1} Q_0 H_1 \Psi_0 \|^2.$$

次の定理は，論文 [19] における主結果の一つである：

定理 5 ([19, Theorem 4.1]) $N \geq 2$ とし，(H.1)–(H.4) を仮定する．さらに，(8) が成立し，$\Psi_0 \in \bigcap_{n=1}^{N-1} D(G(\lambda)^n H_1)$ かつ $\sup_{r \in \boldsymbol{I}_r^\times} \|G(\lambda)^n H_1 \Psi_0\| < \infty, n = 1, \ldots, N-1$ が満たされるとする．このとき，

$$E(\lambda) = E_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \lambda^n + o(\lambda^N) \quad (\lambda \to 0). \tag{9}$$

注意 5 ベクトル Ψ_0 の正則性の条件 (8) と漸近展開の次数 N との対応関係は興味深い．

注意 6 対称作用素 H_1 が H_0 に関して相対的に有界 (H_0 有界)，すなわち，$D(H_0) \subset D(H_1)$ かつ定数 $a, b \geq 0$ があって，$\|H_1 \Psi\| \leq a \|H_0 \Psi\| + b \|\Psi\|, \Psi \in D(H_0)$ が成り立つとし，仮定 (H.3) において，E_0 が多重度 1 の孤立固有値であるとしよう．このとき，解析的摂動論の基本定理 [89, Theorem XII.9] を応用することにより，次の事実が証明される：定数 $\delta > 0$ が存在し，$|\lambda| < \delta$ ならば，$H(\lambda)$ は E_0 の近くにただ一つの単純固有値 $E(\lambda)$ をもち，$E(0) = E_0$ かつ $|\lambda| < \delta$ で $E(\lambda)$ は解析的である．この場合，$E(\lambda)$ の λ に関する漸近展開は (9) と一致することが示される．

3　量子場のモデルへの応用

この節では，前節の一般論を，文献 [21] で導入された量子場のモデル――**GSB モデル** (generalized spin-boson model)――へ応用する．このモデルは，任意の量子系と Bose 場の相互作用を記述する一般的なモデルであり，その具象的実現として，通常のスピン-ボソンモデルや非相対論的量子電磁気学における双極近似の Pauli–Fierz モデル [8], [17]――ただし，光子場の自己相互作用項を落としたもの――を含む．

3.1　定義

任意の量子系 S を考え，その状態のヒルベルト空間を $\mathscr{K}$ とする．1 粒子状態のヒルベルト空間が $\mathfrak{h}$ である Bose 場と系 S との相互作用を考える．Bose 場の状態のヒルベルト空間として，$\mathfrak{h}$ 上のボソンフォック空間

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathfrak{h}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_{\mathrm{s}}^{n} \mathfrak{h} = \left\{ \psi = \{\psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \,\middle|\, \psi^{(n)} \in \otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathfrak{h}, n \geq 0, \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi^{(n)}\|^2 < \infty \right\},$$

すなわち，$\mathfrak{h}$ の n 重対称テンソル積ヒルベルト空間 $\otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathfrak{h}$ ($\otimes_{\mathrm{s}}^{0}\mathfrak{h} := \boldsymbol{C}$) の無限直和ヒルベルト空間をとる[32]．Bose 場と量子系 S が相互作用を行う系の状態のヒルベルト空間は $\mathscr{K}$ と $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathfrak{h})$ のテンソル積ヒルベルト空間

$$\mathfrak{H} := \mathscr{K} \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathfrak{h})$$

によって与えられる．

量子系 S のハミルトニアンは $\mathscr{K}$ 上の下に有界な自己共役作用素 A によって与えられるとし，

$$E_0 := \inf \sigma(A), \quad \widetilde{A} := A - E_0 \tag{10}$$

とおく．作用素 $\widetilde{A}$ は非負の自己共役作用素である．

1 個のボソンのハミルトニアンは，$\mathfrak{h}$ 上の非負自己共役作用素 h_{b} で表されるとしよう．このとき，ボソンの n 粒子系のハミルトニアンは，$\otimes_{\mathrm{s}}^{n}\mathfrak{h}$ 上の非負自己共役作用素

$$h_{\mathrm{b}}^{(n)} := \sum_{j=1}^{n} I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overbrace{h_{\mathrm{b}}}^{j\,\text{番目}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I, \quad h_{\mathrm{b}}^{(0)} := 0$$

によって与えられる (I は恒等作用素を表す)．$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathfrak{h})$ 上の無限直和作用素

$$d\Gamma(h_{\mathrm{b}}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} h_{\mathrm{b}}^{(n)}$$

は非負自己共役作用素であり，h_{b} の**第 2 量子化作用素**または単に**第 2 量子化**と呼ばれる．これは，物理的には，目下の Bose 場の自由ハミルトニアン (相互作用を取り入れていないハミルトニアン) を記述する．

各 $f \in \mathfrak{h}$ に対して，**消滅作用素** (annihilation operator) と呼ばれる，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathfrak{h})$ 上の稠密に定義された閉作用素 $a(f)$ が存在し，その共役作用素 $a(f)^*$ は次の形をもつ：

$$(a(f)^*\psi)^{(0)} = 0, \quad (a(f)^*\psi)^{(n)} = \sqrt{n}\, S_n(f \otimes \psi^{(n-1)}),\ n \geq 1, \psi \in D(a(f)^*).$$

ここで，S_n は $\mathfrak{h}$ の n 重テンソル積ヒルベルト空間 $\otimes^n\mathfrak{h}$ 上の対称化作用素である．$a(f)^*$ は**生成作用素**と呼ばれる．消滅作用素と生成作用素は，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathfrak{h})$ の稠密な部分空間

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathfrak{h}) := \{\psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathfrak{h}) | \exists n_0 \in \boldsymbol{N} \text{ such that } \psi^{(n)} = 0, \forall n \geq n_0\}$$

の上で交換関係

$$[a(f), a(g)^*] = \langle f, g\rangle_{\mathfrak{h}}, \quad [a(f), a(g)] = 0, \quad [a(f)^*, a(g)^*] = 0, \quad f, g \in \mathfrak{h} \tag{11}$$

を満たす．

ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathfrak{h})$ に属するベクトル $\Omega_0 := \{1, 0, 0, \ldots\}$ は**フォック真空**と呼ばれ

$$a(f)\Omega_0 = 0, \ f \in \mathfrak{h},$$
$$d\Gamma(h_{\mathrm{b}})\Omega_0 = 0$$

を満たす．したがって，$d\Gamma(h_{\mathrm{b}})$ はゼロ固有値をもつ．

注意 7 h_{b} が単射ならば，$d\Gamma(h_{\mathrm{b}})$ のゼロ固有値の固有空間は $\{\alpha\Omega_0 | \alpha \in \boldsymbol{C}\}$ であり，したがって，固有値 0 の多重度は 1，すなわち，それは単純固有値である．しかし，h_{b} が単射でない場合には，$\ker(d\Gamma(h_{\mathrm{b}})) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_{\mathrm{s}}^n \ker h_{\mathrm{b}}$ [9, 定理 6.22] が成り立つので，その多重度は無限大になる．

消滅作用素と生成作用素からつくられる対称作用素

$$\phi(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(a(f)^* + a(f))$$

は **Segal の場の作用素**と呼ばれる．これは，本質的に自己共役であることが示される (したがって，その閉包は自己共役)．

注意 8 J を $\mathfrak{h}$ 上の共役子 (conjugation)，すなわち，$\mathscr{H}$ から $\mathscr{H}$ への反線形な写像で $J^2 = I$ と等長性 $\|Jf\| = \|f\|, \forall f \in \mathfrak{h}$ を満たすものとする．このとき，$\mathfrak{h}_J := \{f \in \mathfrak{h} | Jf = f\}$ は実ヒルベルト空間であり，任意の $f \in \mathfrak{h}$ は $f = f_1 + if_2$ ($f_1, f_2 \in \mathfrak{h}_J$) という形に一意的に表される．そこで，各 $f \in \mathfrak{h}_J$ に対して，$\pi(f) := \phi(if)$ とおくと，(11) によって，$\{\phi(f), \pi(f) | f \in \mathfrak{h}_J\}$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathfrak{h})$ 上で CCR を満たすことがわかる．すなわち，$(\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathfrak{h}), \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathfrak{h}), \{\phi(f), \pi(f) | f \in \mathfrak{h}_J\})$ は $\mathfrak{h}_J$ 上の CCR の表現である．この CCR の表現は **Fock 表現**と呼ばれる (添え字集合が $\mathfrak{h}_J$ の稠密な部分空間の場合も同じ呼称を用いる場合がある)．

結合定数 $\lambda \in \boldsymbol{R}$ の GSB モデルのハミルトニアン $H_{\mathrm{GSB}}(\lambda)$ は，J を任意の自然数として，$\mathscr{K}$ 上の J 個の (有界とは限らない) 対称作用素の組 $(B_1, \ldots, B_J)$ と $\mathfrak{h}$ の J 個の元 $g_1, \ldots, g_J$ の組 $g = (g_1, \ldots, g_J)$ を用いて次のように定義される：

$$H_{\mathrm{GSB}}(\lambda) := H_0(h_{\mathrm{b}}) + \lambda H_1(g),$$
$$H_0(h_{\mathrm{b}}) := A \otimes I + I \otimes d\Gamma(h_{\mathrm{b}}), \quad H_1(g) := \sum_{j=1}^{J} B_j \otimes \phi(g_j).$$

作用素 $\lambda H_1(g)$ が量子系 S と Bose 場の相互作用を記述し，各 g_j は抽象的なレヴェルでの運動量切断を表す．

注意 9 h_{b} が単射で各 B_j が $\widetilde{A}^{1/2}$-有界 (注意 6 を参照) かつ $g_j \in D(h_{\mathrm{b}}^{-1/2})$ $(j = 1, \ldots, J)$ なら

ば，$H_1(g)$ は $H_0(h_{\mathrm{b}})$-有界であることが証明される ([21])．したがって，この場合，注意 6 に述べた事実が $H_0 = H_0(h_{\mathrm{b}}), H_1 = H_1(g)$ の場合に適用される．

3.2　GSB モデルのいくつかの性質

以下，簡単のため，GSB モデルの Bose 場の部分を具象化して考える．すなわち，任意の自然数 d に対して，d 次元空間上の Bose 場を考え，1 個のボソンの運動量表示での状態空間として

$$\mathfrak{h} = L^2(\boldsymbol{R}^d)$$

をとる (右辺の $\boldsymbol{R}^d$ は物理的には運動量空間を表す[33])．したがって，$g_j \in L^2(\boldsymbol{R}^d)$ $(j = 1, \ldots, J)$ である．

1 個のボソンのハミルトニアン h_{b} は，$\boldsymbol{R}^d$ 上の非負値連続関数 $\omega : \boldsymbol{R} \ni k \mapsto \omega(k) \geq 0$ による掛け算作用素によって与えられるとする：$h_{\mathrm{b}} = \omega$．ただし，ω の 零レヴェル集合 $\{k \in \boldsymbol{R}^d | \omega(k) = 0\}$ のルベーグ測度は 0 で

$$\lim_{|k| \to \infty} \omega(k) = \infty \tag{12}$$

が満たされるとする．この条件のもとでは，掛け算作用素 ω は単射であることがわかる．

例 1　(i) $E_{\mathrm{R}}(k) = \sqrt{k^2 + m^2}, k \in \boldsymbol{R}^d$ ($m \geq 0$ は定数)．これは，物理的には，質量 $m \geq 0$ の相対論的自由粒子が運動量 $k \in \boldsymbol{R}^d$ で運動するときのエネルギーを表す．質量 m，スピンが 0 の相対論的な自由 Bose 場のハミルトニアンは，$d\Gamma(E_{\mathrm{R}})$ によって与えられる．

(ii) $E_{\mathrm{NR}}(k) := k^2/(2m), k \in \boldsymbol{R}^d$ ($m > 0$ は定数)．これは，物理的には，質量 m の非相対論的自由粒子が運動量 $k \in \boldsymbol{R}^d$ で運動するときのエネルギーを表す．質量 m，スピンが 0 の非相対論的な自由 Bose 場のハミルトニアンは，$d\Gamma(E_{\mathrm{NR}})$ によって与えられる．

(12) と ω の連続性により，

$$\omega(\boldsymbol{R}^d) = [\omega_0, \infty), \quad \omega_0 := \inf_{k \in \boldsymbol{R}^d} \omega(k)$$

が成り立つ．したがって，第 2 量子化作用素のスペクトルに関する一般論から

$$\sigma(d\Gamma(\omega)) = \{0\} \cup [\omega_0, \infty), \quad 0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(d\Gamma(\omega))$$

が得られる．掛け算作用素 ω の単射性により，$d\Gamma(\omega)$ の固有値 0 は単純固有値である．

例 2　例 1 の関数 $E_{\mathrm{R}}, E_{\mathrm{NR}}$ の場合，$(E_{\mathrm{R}})_0 = m, (E_{\mathrm{NR}})_0 = 0$ である．

自己共役作用素のテンソル積のスペクトルに関する一般論により，

$$\sigma(H_0(\omega)) = ([E_0, E_0 + \omega_0) \cap \sigma(A)) \cup [E_0 + \omega_0, \infty)$$

が得られる．特に，$\omega_0 = 0$ の場合には

$$\sigma(H_0(\omega)) = [E_0, \infty)$$

となり，$H_0(\omega)$ のすべての固有値は埋蔵固有値になっている．こうして，$H_{\mathrm{GSB}}(\lambda)$ のスペクトル解析は，埋蔵固有値の摂動問題の一つのクラスを与える．もちろん，この場合，すでに注意したように，既存の解析的摂動論は適用され得ない．

作用素 B_j と関数 g_j および結合定数 λ に関する適切な条件のもとで，$H_{\mathrm{GSB}}(\lambda)$ は自己共役であり，下に有界であることが証明される ([21])．しかし，ここでは，より一般性をもたせるために結合定数の集合

$$\Lambda := \{\lambda \in \boldsymbol{R} | H_{\mathrm{GSB}}(\lambda) \text{ は自己共役かつ下に有界}\}$$

を導入する．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$H_{\mathrm{GSB}}(\lambda)$ の最低エネルギーを

$$E_0(\lambda) := \inf \sigma(H_{\mathrm{GSB}}(\lambda))$$

とする．次の定理は，$E_0(\lambda)$ が λ の偶関数であることを語る：

定理 6 (**[19, Theorem 5.1]**) 集合 Λ は $\boldsymbol{R}$ の原点に関して対称であり (すなわち，$\lambda \in \Lambda$ ならば $-\lambda \in \Lambda$)，$E_0(\lambda) = E_0(-\lambda)$，$\lambda \in \Lambda$ が成り立つ．

以下において次の条件を仮定する：

(A.1) 作用素 A のレゾルヴェントはコンパクトである．

(A.2) 各 B_j $(j = 1, \ldots, J)$ は $\widetilde{A}^{1/2}$-有界である ((10) と注意 6 を参照)．

(A.3) $g_j, g_j/\omega \in L^2(\boldsymbol{R}^d)$，$j = 1, \ldots, J$．

(A.4) 定数 $\gamma > 0$ と $C > 0$ が存在して

$$|\omega(k) - \omega(k')| \leq C|k - k'|^\gamma (1 + \omega(k) + \omega(k')), \quad k, k' \in \boldsymbol{R}^d$$

が成立する．

仮定 (A.1) は，A のスペクトルが離散固有値のみからなることを意味する．特に，A は基底状態をもつ．A の規格化された基底状態の一つを u_0 とする：

$$Au_0 = E_0 u_0, \quad \|u_0\| = 1.$$

1 次元部分空間 $\mathscr{F}^{(0)} := \{\alpha\Omega_0 | \alpha \in \boldsymbol{C}\}$ への正射影作用素を P_{Ω_0}，$\ker \widetilde{A}$ への正射影作用素を p_0 とする．このとき

$$P_0 := p_0 \otimes P_{\Omega_0}$$

は，$H_0(\omega)$ の固有値 E_0 の固有空間

$$\mathfrak{H}_0 := \ker \widetilde{A} \otimes \mathscr{F}^{(0)}$$

への正射影作用素である．

GSB モデルの基底状態の存在については，次の定理が成り立つ．

定理 7 (**[21, Theorem 1.3]**) (A.1)–(A.4) を仮定する．このとき，次の (i)，(ii) を満たす定数 $r > 0$ が存在する：

(i) $(-r, r) \subset \Lambda$.

(ii) 各 $\lambda \in (-r, r)$ に対して，$H_{\mathrm{GSB}}(\lambda)$ は基底状態 $\Psi_0(\lambda)$ をもち (すなわち，$H_{\mathrm{GSB}}(\lambda)\Psi_0(\lambda) = E_0(\lambda)\Psi_0(\lambda)$)，$\lambda \in (-r, r)$ に依らない定数 $M > 0$ があって，すべての $|\lambda| < r$ に対して，$\|\Psi_0(\lambda)\| \leq 1$ かつ

$$\langle \Psi_0(\lambda), P_0\Psi_0(\lambda)\rangle \geq 1 - \lambda^2 M^2 > 0$$

が成り立つ.

3.3 $E_0(\lambda)$ の漸近展開 (I)

ハミルトニアン $H_{\mathrm{GSB}}(\lambda)$ の基底状態エネルギー $E_0(\lambda)$ の λ に関する漸近展開を導くには, さらに付加的な条件が必要とされる.

(A.5) A の固有値 E_0 は単純であり, ある $j_0 \in \{1, \dots, J\}$ があって $B_{j_0}u_0 \neq 0$ が成り立つ.

(A.6) 関数の集合 $\{g_1, \dots, g_J\} \subset L^2(\boldsymbol{R}^d)$ は一次独立である.

定理 8 ([19, Theorem 5.13]) (A.1)–(A.6) を仮定し,

$$a_{\mathrm{GSB}} := \frac{1}{2}\sum_{j,\ell=1}^{J}\int_{\omega(k)>0}\langle B_j u_0, (\widetilde{A}+\omega(k))^{-1}B_\ell u_0\rangle g_j(k)^* g_\ell(k)dk$$

とする. このとき, $a_{\mathrm{GSB}} > 0$ であり

$$E_0(\lambda) = E_0 - a_{\mathrm{GSB}}\lambda^2 + o(\lambda^2) \quad (\lambda \to 0)$$

が成り立つ.

注意 10 同様の漸近展開 (結合定数に関して 2 次の次数までの漸近展開) が, 質量ゼロの Dereziński–Gérard モデル [36] と非相対論的量子電磁気学の Pauli–Fierz モデル [86] の基底状態エネルギーに対して得られている ([43], [59]). しかし, 方法は [19] のそれとまったく異なる. 文献 [36], [43], [59] の漸近展開の手法を結合定数の任意の次数まで拡張するのは困難であるように見える. しかし, [19] の方法はこれを可能にする.

3.4 $E_0(\lambda)$ の漸近展開 (II)

$H_0'(\omega)$ を $H_0(\omega)$ の $\mathfrak{H}_0^{\perp}$ への簡約部分とし, 次の記号を導入する:

$$\Psi_0 := u_0 \otimes \Omega_0,$$

$$\kappa_\ell(x_1, \dots, x_\ell) := \sum_{r=1}^{\ell}(-1)^r \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_r=\ell \\ j_1,\dots,j_r\geq 1}} x_{j_1}\cdots x_{j_r}(E_0 - H_0'(\omega))^{-r-1}(1-P_0)H_1(g),$$

$$(x_1, \dots, x_\ell) \in \boldsymbol{R}^\ell.$$

定理 9 ([19, Theorem 5.17]) (A.1)–(A.6) を仮定し, 偶数の $N \geq 4$ に対して

$$g_j,\ \frac{g_j}{\omega^{N-1}} \in L^2(\boldsymbol{R}^d), \quad j = 1, \dots, J \tag{13}$$

が成り立つとする. 有限数列 $\{b_n\}_{n=1}^{N}$ を次のように定義する:

$$b_1 := 0,$$

$$b_n := \sum_{\substack{q+\ell=n \\ q,\ell\geq 1}} \sum_{\substack{\ell_1+\cdots+\ell_q=\ell-1 \\ \ell_1,\dots,\ell_q\geq 0}} \langle H_1(g)\Psi_0, \kappa_{l_1}(b_1, \dots, b_{\ell_1})\cdots\kappa_{l_q}(b_1, \dots, b_{\ell_q})\Psi_0\rangle,$$

$$n = 2, \dots, N.$$

このとき

$$b_{2n-1} = 0, \quad n = 1, \ldots, \frac{N}{2}$$

かつ

$$E_0(\lambda) = E_0 + \sum_{n=1}^{N/2} b_{2n}\lambda^{2n} + o(\lambda^N) \quad (\lambda \to 0) \tag{14}$$

が成り立つ.

注意 11 条件 (13) は, 一般論における条件 (8) が GSB モデルにおいて成立することを保証するためのものである. $\omega_0 = 0$ の場合, これが, 赤外正則条件 (関数 g_j/ω^ℓ ($\ell \in \boldsymbol{N}$) の $k = 0$ の近傍での振る舞いに関する条件) となっており, しかも漸近展開 (14) の次数 $N/2$ と単純な対応をもつことは興味深い.

4 結語

新しい漸近的摂動論についてさらに研究すべき課題を列挙して本稿を終える：

(1) 無摂動固有値 E_0 が単純でない場合へと拡張すること.

(2) 定理 5 の $E(\lambda)$ が λ について解析的となる条件を定式化すること.

(3) 定理 1 の連立方程式 (2)–(3) の解の存在を示す方法を見出すこと.

(4) GSB モデル以外の量子場のモデルへの応用. 条件 (8) の成立を確かめるのに困難が伴う場合がある. この困難を克服する手法を見出すこと.

謝辞 有益なコメントを寄せられた査読者に感謝したい. 本研究は, 2015 年度日本学術振興会科学研究費助成事業 (研究課題番号 15K04888) の支援を受けている.

注 釈

1) これまでに数多くの素粒子 (ほぼ 200 種類) が発見されている. しかし, 安定的に存在するものは少なく, 素粒子の標準模型によれば, 基本的なものは, クォーク, レプトン, ゲージ・ボソン, ヒッグス・ボソンと呼ばれる四つの型に分類され, 種類は 17 であるとされる (核子は 3 個のクォークからなり, 電子, 光子はそれぞれ, レプトン, ゲージ・ボソンに属する). 詳しくは, 素粒子物理学の本, たとえば, [60], [105] を参照.

2) たとえば, N 体のシュレーディンガー作用素によって記述される量子力学は, **量子 de Broglie 場**と呼ばれる量子場の理論の N 粒子部分空間への制限として捉えられる (詳細については, [10, 第 8 章] を参照).

3) 量子力学や量子場の理論の形成に関わる歴史的な事柄の詳細については, たとえば, [41] の第 I 部や [99] を参照. 古典場に対する正準量子化の方法は, 有限自由度の量子力学に対する Born–Heisenberg–Jordan (1925, 1926) の代数的方法の無限自由度版である. 4 次元時空上の古典的実スカラー場 $\phi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x})$ ($t \in \boldsymbol{R}$ は時間変数, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ は空間変数) の場合を例にとるならば, この理論の正準量子化とは, $\phi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x})$ とその正準共役運動量 $\pi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x})$ に対して, 次の交換関係—**正準交換関係**—にしたがう代数的な対象 $\phi(t,\boldsymbol{x}), \pi(t,\boldsymbol{x})$ を対応させることである (そういう対象が存在すると仮定する)：

$$[\phi(t,\boldsymbol{x}), \pi(t,\boldsymbol{y})] = i\hbar\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$
$$[\phi(t,\boldsymbol{x}), \phi(t,\boldsymbol{y})] = 0,$$
$$[\pi(t,\boldsymbol{x}), \pi(t,\boldsymbol{y})] = 0, \quad t \in \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3.$$

ここで, $[A,B] := AB - BA$ (交換子), i は虚数単位, $\hbar := h/2\pi$ (h はプランク定数), $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ は 3 次元のデルタ超関数である. この処方では, $\phi(t,\boldsymbol{x})$ が古典場 $\phi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x})$ に対応する量子場である. 古典場の理論における物理量 F は ϕ_{cl} と π_{cl} を用いて, $F = F(\phi_{\mathrm{cl}}, \pi_{\mathrm{cl}})$ と書かれるので, これに対応する量子論的な物理量は, 発見法的・形式的には, '$F(\phi,\pi)$' で与えられる (しかし, この処方は, 数学的に厳密な観点からは, 疑わしいものであり, 以下に素描する, 量子場の理論の数学的困難をもたらす).

4) たとえば, ν 次元時空 $\{(t,\boldsymbol{x}) | t \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{\nu-1}\}$ ($\nu \geq 2$) における, 質量 $m \geq 0$ の自由な Klein–Gordon 方程式

$$\frac{\partial^2 \phi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t^2} - \Delta\phi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x}) + m^2\phi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x}) = 0$$

(Δ は変数 $\boldsymbol{x}$ に関する $(\nu-1)$ 次元ラプラシアン) にしたがう古典場 $\phi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x})$ に対応する量子場は, 自由な量子場の基本的な例の一つである. この量子場の数学的に厳密な構成については, たとえば, [10, 第 9 章]

を参照されたい．

5) 素粒子のスピンの値は，$\hbar$ を単位として，整数 $(0, 1, 2, \ldots)$ または半整数 $(1/2, 3/2, \ldots)$ である．整数スピンの素粒子は**Bose 統計**—任意の自然数 N に対して，N 個の同種の素粒子からなる系の量子力学的状態は素粒子の任意の交換に関して対称であるという性質—にしたがい，半整数スピンの素粒子は**Fermi 統計**—任意の自然数 N に対して，N 個の同種の素粒子からなる系の量子力学的状態は素粒子の任意の交換に関して反対称であるという性質—にしたがう．これを**スピンと統計の関係**という．Bose 統計にしたがう素粒子は**ボソン**または**Bose 粒子**と呼ばれ，Fermi 統計にしたがう素粒子は**フェルミオン**または**Fermi 粒子**と呼ばれる．ボソンの量子場を**Bose 場**，フェルミオンの量子場を**フェルミ場**という．

6) ただし，摂動の最低次数で計算を止めた場合には，実験値に近い有限値が得られる場合がある．

7) プランク–アインシュタイン–ド・ブロイの関係式により，粒子的描像における素粒子の運動量の大きさは波動的描像における素粒子の波長の長さに反比例する．したがって，運動量の大きさが‘非常に’大きい（小さい）領域は，波長の短い（長い）領域—電磁波では紫外（赤外）線の領域—に対応する．‘紫外発散’と‘赤外発散’の名称はこのことにちなむ．

8) Tomonaga, Schwinger, Feynman は，これらの業績により，1965 年度のノーベル物理学賞を受賞した．

9) ここでいう‘相対論’はアインシュタインの特殊相対性理論を指す．相対論の基礎となる時空は，ニュートン力学の基礎となるガリレイ時空 [18, 1.16 節] ではなく，時空の次元を $\nu \geq 2$ とすれば（$\nu = 4$ の場合が通常の物理的な場合），ν 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^\nu = \{x = (x^0, x^1, \ldots, x^{\nu-1}) | x^\mu \in \boldsymbol{R}, \mu = 0, 1, \ldots, \nu - 1\}$ に**ローレンツ–ミンコフスキー計量**

$$g_{\mathrm{M}}(x, y) := x^0 y^0 - \sum_{j=1}^{\nu-1} x^j y^j$$

$(x, y \in \boldsymbol{R}^\nu)$ を入れて得られる不定計量ベクトル空間である（真空中の光速 c が 1 となる単位系を用いる）．この不定計量ベクトル空間を ν 次元**ミンコフスキー空間**または ν 次元**ミンコフスキー時空**と呼び，$\boldsymbol{M}^\nu$ と記す．点 $x = (x^0, x^1, \ldots, x^{\nu-1}) \in \boldsymbol{M}^\nu$ における x^0 を時間成分，x^j $(j = 1, \ldots, \nu - 1)$ を空間成分という．特殊相対論の数理物理学的構造に関する詳細な記述が [18, 第 4 章] に与えられている．

10) ボソンフォック空間，フェルミオンフォック空間はそれぞれ，ボソン，フェルミオンからなる系でその個数がいくらでも多くなり得る系の状態空間を記述するヒルベルト空間の一つである．詳しくは [9], [10] を参照されたい．ボソンフォック空間については，本稿の 3 節で定義を述べる．

11) n 次元空間 $\boldsymbol{R}^n$ からヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の線形作用素の空間 $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$（定義域が $\mathscr{H}$ 全体とは限らない線形作用素も含む）への写像 $T : \boldsymbol{R}^n \to \mathfrak{L}(\mathscr{H}); \boldsymbol{R}^n \ni x \mapsto T(x) \in \mathfrak{L}(\mathscr{H})$ を $\boldsymbol{R}^n$ 上の**作用素値関数**という．$\boldsymbol{R}^n$ が時空を表す場合（通常の物理的場合は $n = 4$，すなわち，4 次元時空），T を時空上の作用素値関数と呼ぶ．他方，$\boldsymbol{R}^n$ 上の急減少 C^∞ 級関数の空間 $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ から $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ への写像 $\phi : \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n) \to \mathfrak{L}(\mathscr{H}); \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n) \ni f \mapsto \phi(f) \in \mathfrak{L}(\mathscr{H})$ で次の (i), (ii) の性質を満たすものを $\boldsymbol{R}^n$ 上の**作用素値超関数**という：(i)（試験関数に関する線形性）ある稠密な部分空間 $\mathscr{D} \subset \bigcap_{f \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)} D(\phi(f))$—$D(\phi(f))$ は作用素 $\phi(f)$ の定義域—があって，任意のベクトル $\Psi \in \mathscr{D}$ に対して，$\phi(\alpha f + \beta g)\Psi = \alpha\phi(f)\Psi + \beta\phi(g)\Psi, \forall f, g \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n), \forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$；(ii) 各 $\Psi, \Phi \in \mathscr{D}$ に対して，対応 $f \mapsto \langle \Psi, \phi(f)\Phi \rangle$（$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathscr{H}$ の内積）は，$\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ の位相で連続，すなわち，$\boldsymbol{R}^n$ 上の緩増加超関数である．$\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ のかわりに，別の試験関数の空間を考えた場合も同様である．

12) ν 次元ミンコフスキー空間 $\boldsymbol{M}^\nu$ 上の線形写像 Λ で $\boldsymbol{M}^\nu$ の計量 g_{M} を保存するもの，すなわち，$g_{\mathrm{M}}(\Lambda x, \Lambda y) = g_{\mathrm{M}}(x, y), x, y \in \boldsymbol{M}^\nu$ を満たすものを ν 次元**ローレンツ変換**という．ν 次元ローレンツ変換の全体 $\mathscr{L}_\nu$ は群をなし，ν 次元**ローレンツ群**と呼ばれる．直積集合 $\mathscr{P}_\nu := \{(a, \Lambda) | a \in \boldsymbol{R}^\nu, \Lambda \in \mathscr{L}_\nu\}$ は積演算 $(a_2, \Lambda_2)(a_1, \Lambda_1) := (\Lambda_2 a_1 + a_2, \Lambda_2\Lambda_1)$, $(a_2, \Lambda_2), (a_1, \Lambda_1) \in \mathscr{P}_\nu$ に関して群をなす．この群を ν 次元**ポアンカレ群**という．$\boldsymbol{M}^\nu$ 上の中性量子スカラー場と呼ばれる量子場の場合—これは，対応する古典場が実スカラー場の場合—，各 $(a, \Lambda) \in \mathscr{P}_\nu$ に対して，$(\rho(a, \Lambda)f)(x) := f(\Lambda^{-1}(x - a))$, $f \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^\nu), x \in \boldsymbol{M}^\nu$ によって定義される表現 $\rho : (a, \Lambda) \mapsto \rho(a, \Lambda)$ を $\mathscr{P}_\nu$ の $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^\nu)$ 上での自然な表現という．N 成分の量子場の場合 $(N \geq 2)$，その量子場の種類（スピノル場，ベクトル場，テンソル場など）に応じて，ρ は，$\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^\nu)$ の N 個の直和 $\oplus^N \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^\nu)$ 上での‘自然な表現’に拡張される（詳しくは，[30, 3 章] や [97, Chapter 3] を参照）．

13) 元々の Osterwalder–Schrader の公理系から Wightman の理論を再構成するには付加的な条件が必要であったが，[107] において，二つの理論が同等になる条件が定式化された．

14) 確率空間 (Ω, Σ, μ)—Ω は空でない集合，Σ は Ω の部分集合から生成される一つのボレル集合体，μ は可測空間 (Ω, Σ) 上の測度で $\mu(\Omega) = 1$ を満たすもの（確率測度）—の各点 $\omega \in \Omega$ と各 $f \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して，$\varphi(f)(\omega) \in \boldsymbol{C} \cup \{\pm\infty\}$ が定まり，次の (i), (ii) を満たすとき，$\{\varphi(f) | f \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)\}$ を n 次元の**確率超過程**または**一般化された確率場**という（$\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ が他の無限次元位相線形空間に置き換わった場合も同様）：(i) μ-a.e.（ほとんどいたるところ）の点 ω に対して，対応 $f \mapsto \varphi(f)(\omega)$ は連続かつ線形，すなわち，$\boldsymbol{R}^n$ 上の緩増加超関数である；(ii) f ごとに定まる Ω 上の関数 $\varphi(f)$ が Σ-可測かつ μ-a.e. で有限である．

15) 連続体極限 $a \to 0$ を初めにとり，次に無限体積極限 $L \to \infty$ をとることも考えられるが，この累次極限の取り方は，$\nu \geq 3$ の場合には，うまくいかない．というのは，連続体極限をとる段階で，紫外発散に関わる本質的な困難に出会うからである（時空の次元が高くなるにつれて，紫外発散の度合はより大きくなる）．

16) しかし，いま言及した結果は，$\nu \geq 4$ に対して，非自明な $\lambda(\phi^4)_\nu$ モデルの非存在を意味するものではない．あくまでも上述の構成法ではうまくいかなかったということなのである．この問題の困難さは，実は，

そもそも，モデルの非摂動的定義が不明であるという点にある．すでに注意したように，量子場は，一般には，作用素値関数ではない作用素値超関数であるために，古典場のように偏微分方程式──たとえば，(1)──を用いて，単純明解な形で，完全な相対論的対称性をもつ量子場の相互作用モデルを定義することができないのである（これは完全な非相対論的対称性──ガリレイ対称性──をもつ非相対論的量子場の相互作用モデルについても同様である）．

17) 古典場の理論との対応で発見法的・形式的に与えられたモデルの相互作用項を定義する際にすでに紫外発散に出会う（したがって，モデルの定義そのものが問題となる）．前出の $\lambda(\phi^4)_\nu$ モデルの場合，相互作用項は，古典場の理論との形式的対応では，'$\lambda\int_{\boldsymbol{R}^{\nu-1}}\phi(0,\boldsymbol{x})^4 d\boldsymbol{x}$' となるが，すでに注意したように，$\phi$ は作用素値関数ではない，作用素値超関数であるので，この表式は，このままででは，意味をもたないのである（強引に計算すると発散する項が現れる）．

18) 典型的には，その大きさがある値より大きい運動量をもつ素粒子の相互作用への寄与は0とする．

19) 典型的には，その大きさがある正の値より小さい運動量をもつ素粒子の相互作用への寄与は0とする．

20) 通常，形式的・発見法的に与えられたハミルトニアンの形は数学的には意味をもたないので，何らかの正則化 (regularization) が必要であり，その一つがすでに言及した切断（紫外切断，赤外切断，空間切断）を導入する手法である．

21) 上述した，ユークリッド法による $\lambda(\phi^4)_\nu$ モデルの構成においては，格子空間近似が紫外切断に相当し，'くりこみ' は，Schwinger 関数をその汎関数積分として与える確率測度に含まれるパラメータ（質量や結合定数など）を格子間隔 a の関数に取り直すことによってなされる．

22) 非相対論的量子場の理論の場合にも，量子場の真空期待値から定まる超関数を Wightman 超関数と呼ぶ．

23) 存在については，主に，有限体積近似のハミルトニアンのレゾルヴェント収束を用いるもの ([48]–[51], [52]) と，汎関数積分の手法を用いて，ハミルトニアン H が生成する熱半群 $e^{-\beta H}$ $(\beta>0)$ の超縮小性を証明するものがある．一意性については，量子スカラー場の場合は，$e^{-\beta H}$ の正値改良性を証明する方法がある．詳しくは，たとえば，[40], [76], [95] を参照されたい．フェルミオン系の基底状態の一意性については，論文 [42] がある．最近，Faris [42] の研究を発展させることにより，基底状態の一意性について，フェルミオンとボソンの両方を含む量子場のモデルにも応用可能な判定条件が定式化された ([77], [78])．スペクトルの同定に関する方法の一つとして，漸近場の方法 ([66], [73], [74]) がある．

24) 量子場のモデルのハミルトニアンは，$H(\lambda)=H_0+\lambda H_1+\lambda^2H_2+\cdots+\lambda^nH_n$ $(n\in\boldsymbol{N})$ という形をもつ．ただし，$H_0,H_1,H_2,\ldots,H_n$ は線形作用素で，$\lambda\in\boldsymbol{R}$ は結合定数と呼ばれるパラメータである．この場合，$H(0)=H_0$ が無摂動ハミルトニアンである．H_0 が固有値 E_0 をもつ場合，十分小さい $|\lambda|>0$ に対して，$H(\lambda)$ が固有値 $E_0(\lambda)$ をもち，$\lim_{\lambda\to0}E_0(\lambda)=E_0$ が成り立つならば，固有値 E_0 は摂動 $\lambda H_1+\lambda^2H_2+\cdots+\lambda^nH_n$ のもと**安定**であるという．E_0 が安定でない場合も起こり得る．具体例については，たとえば，[7] を参照．**離散固有値**──多重度が有限の孤立固有値──の摂動のもとでの安定性については，**正則摂動論**または**解析的摂動論**と呼ばれる一般論が確立されている ([71], [89])．しかし，この理論は，埋蔵固有値の摂動問題には応用できない．

25) ハミルトニアン H と線形作用素 A に対して，作用素 $A(t):=e^{itH/\hbar}Ae^{-itH/\hbar}$ $(t\in\boldsymbol{R})$ を **H に関する A のハイゼンベルク作用素**という．これは，物理的には，A の H による時間発展を表す．

26) 後者の論文において非相対論的量子電磁気学における本来のモデルの基底状態の存在が赤外切断なしで証明された（紫外切断は入れる）．この意義はすこぶる大きい．

27) 最近，この定理は，Fermi 場を含むモデルの場合へと拡張された ([98])．

28) たとえば，$\mathscr{V}=\mathscr{S}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^3)$ ($\boldsymbol{R}^3$ 上の実数値急減少 C^∞ 級関数の全体) の場合，各 $f\in\mathscr{S}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^3)$ に対して，脚注3) の対象 $\phi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t,\boldsymbol{x})$ からつくられる形式対象 $\phi(t,f)=\int_{\boldsymbol{R}^3}\phi(t,\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$, $\pi(t,f)=\int_{\boldsymbol{R}^3}\pi(t,\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ の集合 $\{\phi(t,f),\pi(t,f)|f\in\mathscr{S}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^3)\}$ は各 t ごとに形式的に CCR を満たすので，CCR の表現の候補になり得る．

29) $\mathscr{D},\mathscr{D}'$ は一意的には定まらないので，これらについてのユニタリ対応 $U\mathscr{D}=\mathscr{D}'$ は要求しない．作用素のユニタリ同値性が本質的である．

30) このことは，通常，あまり明晰には意識されていないように見受けられる．だが，この認識は，量子場のモデルとはそもそも何であるのかという根源的な問いに答える上で極めて重要である．

31) 以上の考え方は，Fermi 場のモデルあるいは Bose 場と Fermi 場の相互作用モデルに対しても当てはまる．

32) ボソンフォック空間の理論の詳細については，[9] を参照されたい．

33) 以下，$\hbar=1$，光速 $c=1$ の単位系を採用する．

文　献

[1] A. Abdesselam, The ground state energy of the massless spin-boson model, Ann. Henri Poincaré, **12** (2011), 1321–1347.

[2] A. Abdesselam and D. Hasler, Analyticity of the ground state energy for massless Nelson models, Comm. Math. Phys., **310** (2012), 511–536.

[3] M. Aizenman, Geometric analysis of ϕ^4 fields and Ising models. Part I and II, Comm. Math. Phys., **86** (1982), 1–48.

[4] J.-P. Antoine, A. Inoue and C. Trapani, Partial $*$-Algebras and Their Operator Realizations, Math. Appl., **553**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[5] A. Arai, Rigorous theory of spectra and radiation for a model in quantum electrodynamics, J. Math. Phys., **24** (1983), 1896–1910.

[6] A. Arai, A note on scattering theory in non-

relativistic quantum electrodynamics, J. Phys. A, **16** (1983), 49–69.
[7] A. Arai, Spectral analysis of a quantum harmonic oscillator coupled to infinitely many scalar bosons, J. Math. Anal. Appl., **140** (1989), 270–288.
[8] A. Arai, An asymptotic analysis and its applications to the nonrelativistic limit of the Pauli–Fierz and a spin-boson model, J. Math. Phys., **31** (1990), 2653–2663.
[9] 新井朝雄, フォック空間と量子場 (上), 日本評論社, 2000.
[10] 新井朝雄, フォック空間と量子場 (下), 日本評論社, 2000.
[11] A. Arai, Essential spectrum of a self-adjoint operator on an abstract Hilbert space of Fock type and applications to quantum field Hamiltonians, J. Math. Anal. Appl., **246** (2000), 189–216.
[12] A. Arai, Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation, Rev. Math. Phys., **13** (2001), 1075–1094.
[13] A. Arai, Mathematical theory of quantum particles interacting with a quantum field, In: Non-Commutativity, Infinite-Dimensionality and Probability at the Crossroads, (eds. N. Obata, T. Matsui and A. Hora), QP-PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., **16**, World Scientific, Singapore, 2002, pp. 1–50.
[14] 新井朝雄, 量子場と相互作用を行う量子系の数理, 文献 [81] の 4 章, pp. 108–182.
[15] 新井朝雄, 量子現象の数理, 朝倉物理学大系, **12**, 朝倉書店, 2006.
[16] 新井朝雄, 量子統計力学の数理, 共立出版, 2008.
[17] A. Arai, Spectral analysis of an effective Hamiltonian in nonrelativistic quantum electrodynamics, Ann. Henri Poincaré, **12** (2011), 119–152.
[18] 新井朝雄, 物理学の数理——ニュートン力学から量子力学まで, 量子数理シリーズ, **3**, 丸善出版, 2012.
[19] A. Arai, A new asymptotic perturbation theory with applications to models of massless quantum fields, Ann. Henri Poincaré, **15** (2014), 1145–1170.
[20] 新井朝雄・江沢洋, 量子力学の数学的構造 II, 朝倉物理学大系, **8**, 朝倉書店, 1999.
[21] A. Arai and M. Hirokawa, On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model, J. Funct. Anal., **151** (1997), 455–503.
[22] H. Araki, Von Neumann algebras of local observables for free scalar field, J. Mathematical Phys., **5** (1964), 1–13.
[23] 荒木不二洋, 量子場の数理, 岩波講座現代の物理学, **21**, 岩波書店, 1993.
[24] V. Bach, J. Fröhlich and A. Pizzo, Infrared-finite algorithms in QED: the groundstate of an atom interacting with the quantized radiation field, Comm. Math. Phys., **264** (2006), 145–165.
[25] V. Bach, J. Fröhlich and A. Pizzo, Infrared-finite algorithms in QED II. The expansion of the groundstate of an atom interacting with the quantized radiation field, Adv. Math., **220** (2009), 1023–1074.
[26] V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, Renormalization group analysis of spectral problems in quantum field theory, Adv. Math., **137** (1998), 205–298.
[27] V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles, Adv. Math., **137** (1998), 299–395.
[28] K. Baumann, On canonical irreducible quantum field theories describing bosons and fermions, J. Math. Phys., **29** (1988), 1225–1230.
[29] F. Bloch and A. Nordsieck, Note on the radiation field of the electron, Phys. Rev., **52** (1937), 54–59.
[30] エヌ ボゴリューボフ・イ トドロフ・ア ログノフ (江沢洋・関根克彦・亀井理 訳), 場の量子論の数学的方法, 東京図書, 1972; 新版, 1980.
[31] L. Brillouin, Champs self-consistents et électrons métalliques-III, J. Phys. Radium, **4** (1933), 1–9.
[32] R. Brunetti, C. Dappiaggi, K. Fredenhagen and J. Yngvason (eds.), Advances in Algebraic Quantum Field Theory, Math. Phys. Stud., Springer, 2015.
[33] D. C. Brydges, J. Fröhlich and A. D. Sokal, A new proof of the existence and nontriviality of the continuum ϕ_2^4 and ϕ_3^4 quantum field theories, Comm. Math. Phys., **91** (1983), 141–186.
[34] J. M. Cook, The mathematics of second quantization, Trans. Amer. Math. Soc., **74** (1953), 222–245.
[35] J. M. Cook, Asymptotic properties of a boson field with given source, J. Mathematical Phys., **2** (1961), 33–45.
[36] J. Dereziński and C. Gérard, Asymptotic completeness in quantum field theory: massive Pauli–Fierz Hamiltonians, Rev. Math. Phys., **11** (1999), 383–450.
[37] J. Dereziński and C. Gérard, Mathematics of Quantization and Quantum Fields, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.
[38] P. A. M. Dirac, The quantum theory of the emission and absorption of radiation, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **114** (1927), 243–265.
[39] 江沢洋, 場の数理科学の来た道, 文献 [81] の 6 章, pp. 228–252.
[40] 江沢洋・新井朝雄, 場の量子論と統計力学, 日本評論社, 1988.
[41] 江沢洋・恒藤敏彦 編, 量子物理学の展望——50 年の歴史に立って—— (上), 岩波書店, 1977.

[42] W. G. Faris, Invariant cones and uniqueness of the ground state for fermion systems, J. Mathematical Phys., **13** (1972), 1285–1290.

[43] J. Faupin, J. S. Møller and E. Skibsted, Second order perturbation theory for embedded eigenvalues, Comm. Math. Phys., **306** (2011), 193–228.

[44] V. Fock, Konfigurationsraum und zweite Quantelung, Z. Phys. A, **75** (1932), 622–647.

[45] K. O. Friedrichs, Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields, Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers Ltd., London, 1953.

[46] J. Fröhlich, On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless, scalar bosons, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.), **19** (1973), 1–103.

[47] J. Fröhlich, On the triviality of $\lambda\varphi_d^4$ theories and the approach to the critical point in $d \geq 4$ dimensions, Nuclear Phys. B, **200** (1982), 281–296.

[48] J. Glimm and A. Jaffe, A $\lambda(\phi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs. I, Phys. Rev., **176** (1968), 1945–1951.

[49] J. Glimm and A. Jaffe, The $\lambda(\phi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs. II. The field operators and the approximate vaccum, Ann. of Math. (2), **91** (1970), 362–401.

[50] J. Glimm and A. Jaffe, The $\lambda(\phi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs. III. The physical vacuum, Acta Math., **125** (1970), 203–267.

[51] J. Glimm and A. Jaffe, The $\lambda\phi_2^4$ quantum field theory without cutoffs. IV. Perturbations of the Hamiltonian, J. Mathematical Phys., **13** (1972), 1568–1584.

[52] J. Glimm and A. Jaffe, Collected Papers Vol. 1; 2, 1: Quantum Field Theory and Statistical Mechanics Expositions; 2: Constructive Quantum Field Theory, Selected Papers, Birkhäuser, 1985.

[53] J. Glimm and A. Jaffe, Quantum Physics. A Functional Integral Point of View. 2nd ed., Springer, 1987.

[54] M. Griesemer and D. G. Hasler, Analytic perturbation theory and renormalization analysis of matter coupled to quantized radiation, Ann. Henri Poincaré, **10** (2009), 577–621.

[55] M. Griesemer, E. H. Lieb and M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, Invent. Math., **145** (2001), 557–595.

[56] R. Haag, On quantum field theories, Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd., **29**, no. 12 (1955).

[57] R. Haag, Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras, Texts Monogr. Phys., Springer, 1992.

[58] R. Haag and D. Kastler, An algebraic approach to quantum field theory, J. Mathematical Phys., **5** (1964), 848–861.

[59] C. Hainzl and R. Seiringer, Mass renormalization and energy level shift in non-relativistic QED, Adv. Theor. Math. Phys., **6** (2002), 847–871.

[60] 原康夫・稲見武夫・青木健一郎, 素粒子物理学, 朝倉書店, 2000.

[61] D. Hasler and I. Herbst, Ground states in the spin boson model, Ann. Henri Poincaré, **12** (2011), 621–677.

[62] W. Heisenberg and W. Pauli, Zur Quantendynamik der Wellenfelder, Z. Phys. A, **56** (1929), 1–61.

[63] F. Hiroshima, Analysis of ground states of atoms interacting with a quantized radiation field, In: Topics in the Theory of Schrödinger Operators, (eds. H. Araki and H. Ezawa), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004, pp. 145–272.

[64] 廣島文生, 場の理論における埋蔵固有値の摂動問題, 数学, **57** (2005), 70–92.

[65] 一松信・鹿野健・金光滋, 数学七つの未解決問題, 森北出版, 2002.

[66] R. Høegh-Krohn, On the spectrum of the space cut-off : $P(\varphi)$: Hamiltonian in two space-time dimensions, Comm. Math. Phys., **21** (1971), 256–260.

[67] A. Jaffe and E. Witten, Quantum Yang–Mills Theory, http://www.claymath.org/sites/default/files/yangmills.pdf; http://www.claymath.org/millenium-problems/yang-mills-and-mass-gap.

[68] Von P. Jordan, Über Wellen und Korpuskeln in der Quantenmechanik, Z. Phys. A, **45** (1927), 766–775.

[69] Von P. Jordan and O. Klein, Zum Mehrkörperproblem der Quantentheorie, Z. Phys. A, **45** (1927), 751–765.

[70] Von P. Jordan and E. P. Wigner, Über das Paulische Äquivalenzverbot, Z. Phys. A, **47** (1928), 631–651.

[71] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Grundlehren Math. Wiss., **132**, Springer, 1966; 2nd ed., 1976.

[72] Y. Kato, Some converging examples of the perturbation series in the quantum field theory, Progr. Theoret. Phys., **26** (1961), 99–122.

[73] Y. Kato and N. Mugibayashi, Regular perturbation and asymptotic limits of operators in quantum field theory, Progr. Theoret. Phys., **30** (1963), 103–133.

[74] Y. Kato and N. Mugibayashi, Asymptotic fields in model field theories. I—$\lambda(\phi^4)_2$ with a space cutoff—, Progr. Theor. Phys., **45** (1971), 628–639.

[75] 木下東一郎, 量子電磁力学の現状, 文献 [41] の 12 章, pp. 319–337.

[76] J. Lőrinczi, F. Hiroshima and V. Betz, Feynman–Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space, De Gruyter Stud. Math., **34**, Walter de Gruyter & Co., 2011.

[77] T. Miyao, Nondegeneracy of ground states in

nonrelativistic quantum field theory, J. Operator Theory, **64** (2010), 207–241.

[78] T. Miyao, Self-dual cone analysis in condensed matter physics, Rev. Math. Phys., **23** (2011), 749–822.

[79] O. Miyatake, On the non-existence of solution of field equations in quantum mechanics, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A. Math., **2** (1952), 89–99.

[80] O. Miyatake, On the singularity of the perturbation-term in the field quantum mechanics, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A. Math., **3** (1952), 145–155.

[81] 中村孔一・中村徹・渡辺敬二 編, だれが量子場をみたか, 日本評論社, 2004.

[82] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, J. Mathematical Phys., **5** (1964), 1190–1197.

[83] E. Nelson, Construction of quantum fields from Markoff fields, J. Functional Analysis, **12** (1973), 97–112.

[84] K. Osterwalder and R. Schrader, Axioms for Euclidean Green's functions, Comm. Math. Phys., **31** (1973), 83–112.

[85] K. Osterwalder and R. Schrader, Axioms for Euclidean Green's functions II, Comm. Math. Phys., **42** (1975), 281–305.

[86] W. Pauli and M. Fierz, Zur Theorie der Emission langwelliger Lichtquanten, Nuovo Cimento, **15** (1938), 167–188.

[87] J. W. S. Rayleigh, Theory of Sound I. 2nd ed., Macmillan, London, 1894.

[88] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-adjointness, Academic Press, New York, 1975.

[89] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators, Academic Press, New York, 1978.

[90] I. Sasaki, Ground state of the massless Nelson model in a non-Fock representation, J. Math. Phys., **46** (2005), 102107.

[91] E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem, Ann. Phys., **385** (1926), 437–490.

[92] J. Schwinger (ed.), Selected Papers on Quantum Electrodynamics, Dover Publications, New York, 1958.

[93] I. E. Segal, Tensor algebras over Hilbert spaces. I, Trans. Amer. Math. Soc., **81** (1956), 106–134.

[94] I. E. Segal, Tensor algebras over Hilbert spaces. II, Ann. of Math. (2), **63** (1956), 160–175.

[95] B. Simon, The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Princeton Ser. Phys., Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1974.

[96] H. Spohn, Dynamics of Charged Particles and Their Radiation Field, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[97] R. F. Streater and A. S. Wightman, PCT, Spin and Statistics, and All That, W. A. Benjamin, 1964.

[98] T. Takaesu, Essential spectrum of a fermionic quantum field model, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **17** (2014), 1450024.

[99] 高林武彦, 量子論の発展史, 中央公論社, 1977.

[100] 朝永振一郎, 無限大の困難をめぐって, 文献 [41] の 11 章, pp. 289–318.

[101] L. van Hove, Les difficultés de divergences pour un modèle particulier de champ quantifié, Physica, **18** (1952), 145–159.

[102] A. S. Wightman, Quantum field theory in terms of vacuum expectation values, Phys. Rev. (2), **101** (1956), 860–866.

[103] A. S. Wightman and L. Gårding, Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum theory, Ark. Phys., **28** (1964), 129–184.

[104] E. P. Wigner, On a modification of the Rayleigh-Schrödinger perturbation theory, In: The Collected Works of Eugene Paul Wigner Part A Volume IV, (ed. A. S. Wightman), Springer, 1997, pp. 131–136; Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesitöje, **53** (1935), 477–482.

[105] 山田作衛・相原博昭・岡田安弘・坂井典佑・西川公一郎 編, 素粒子物理学ハンドブック, 朝倉書店, 2010.

[106] J. M. Ziman, Elements of Advanced Quantum Theory, Cambridge Univ. Press, 1969.

[107] Y. M. Zinoviev, Equivalence of Euclidean and Wightman field theories, Comm. Math. Phys., **174** (1995), 1–27.

(2015 年 7 月 3 日提出)

(あらい　あさお・北海道大学大学院理学研究院)