グラフ理論 #2

第2回講義 4月22日

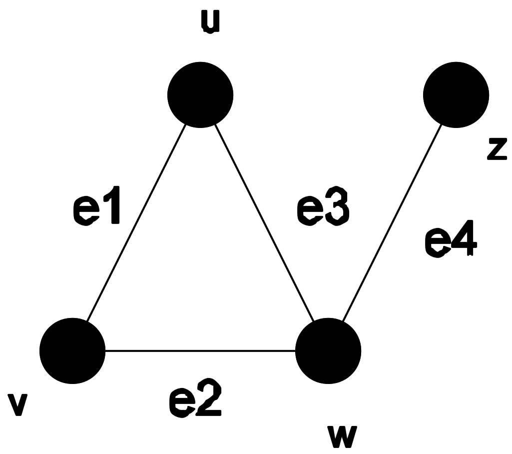
情報科学研究科　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

単純グラフ

単純グラフ : グラフにループが含まれず、頂点のどの対も高々1つのリンクで結ばれているグラフ

例)



V(G)={u,v,w,z} → グラフGの**点集合** (vertex set)

E(G)={uv,vw,vw,wz} → グラフGの**辺集合** (edge set)

y_G : グラフGの**接続関数** ⇒ Gの各辺にGの頂点の対を対応させる関数

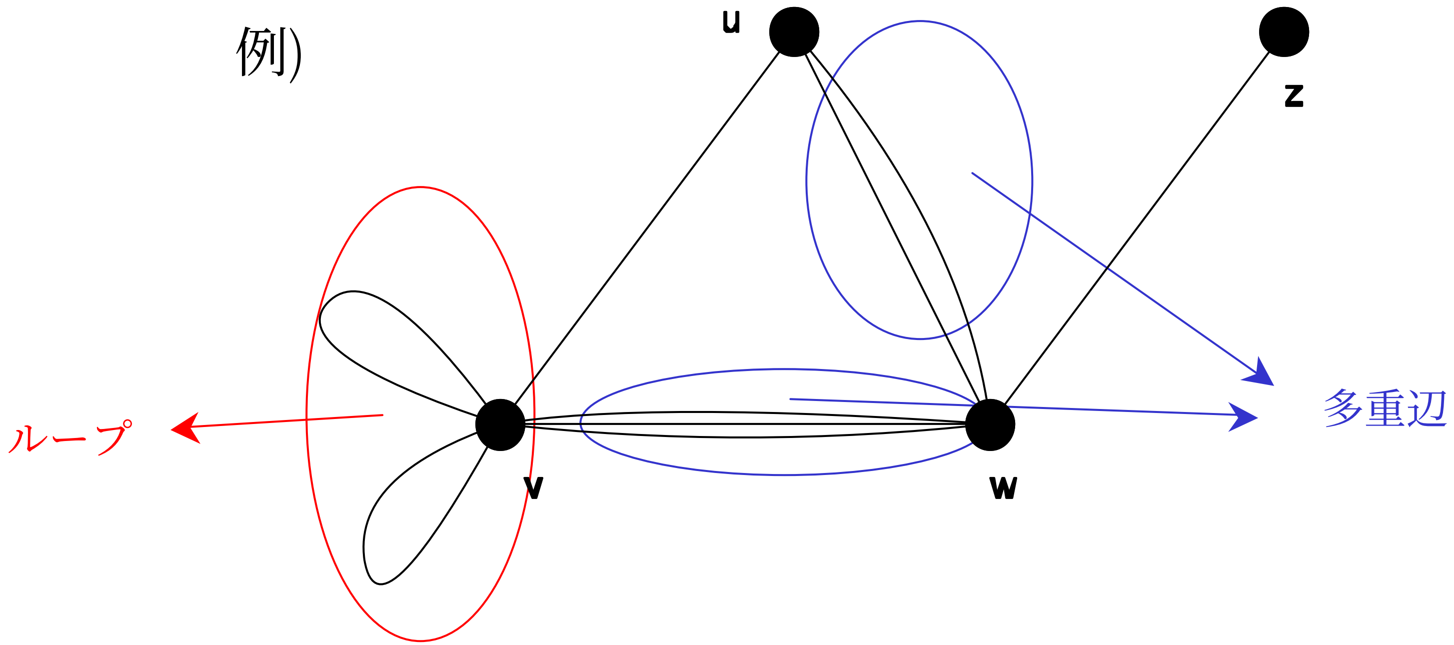
$$\boxed{\begin{aligned} y_G(e_1) &= uv,\ y_G(e_2) = vw \\ y_G(e_3) &= wu,\ y_G(e_4) = wz \end{aligned}}$$

例)の場合の接続関数

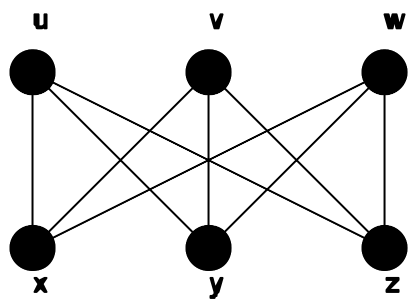
一般グラフ(⇔単純グラフ)

一般グラフ (general graph) : ループや多重辺も許されたグラフ

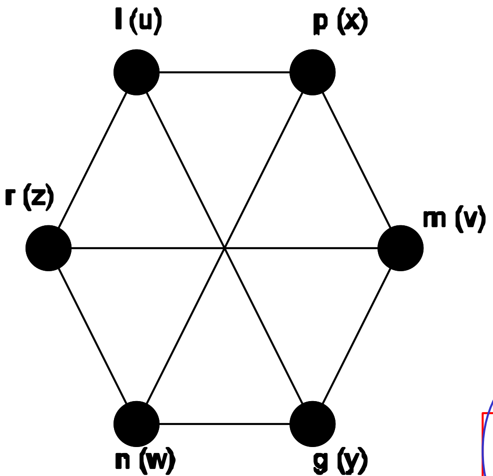
例)



同形



G1



G2

2つのグラフ G_1, G_2 が同形であるとき

1対 1写像 :

$$q: V(G_1) \to V(G_2)$$

$$f: E(G_1) \to E(G_2)$$

が次を満たす

$$\boxed{y_{G_1}(e) = uv \Leftrightarrow y_{G_2}(f(e)) = q(u)q(v)}$$

接続関数

上の例では

$$q(u)=l, q(v)=m, q(w)=n, q(x)=p, q(y)=q, q(z)=r$$

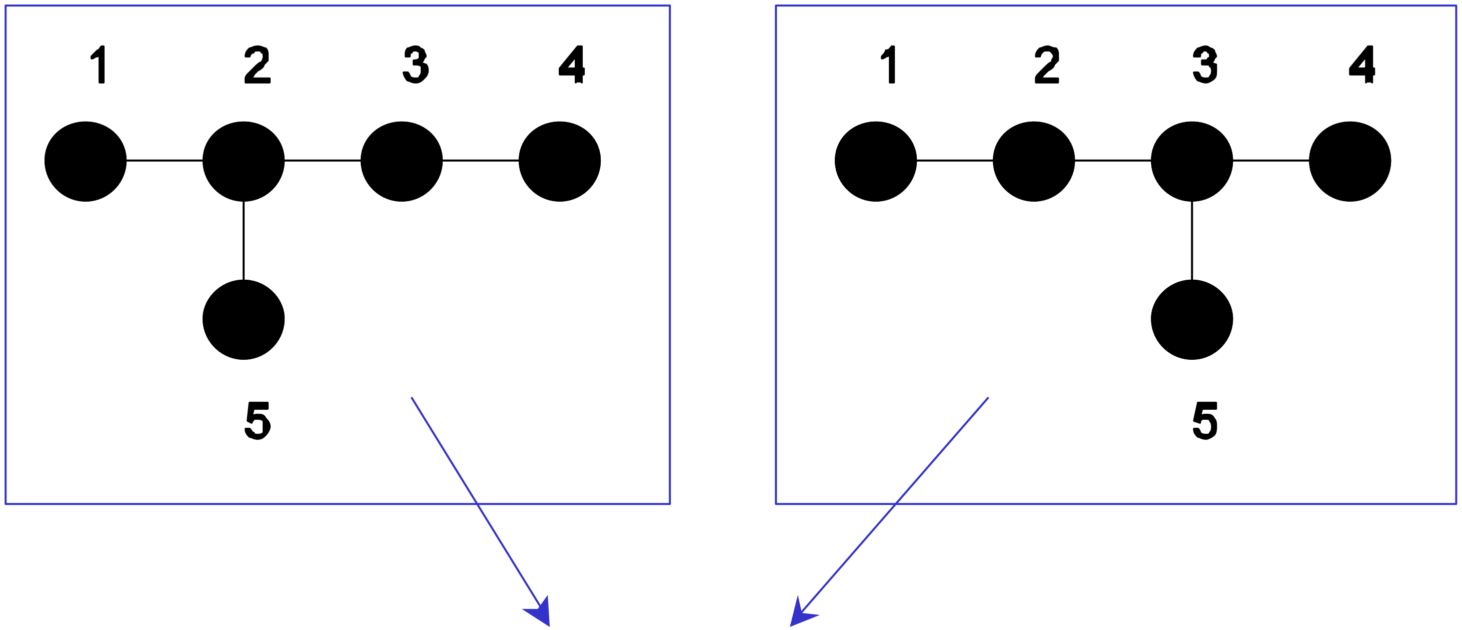
$$f(\overline{ux}) = \overline{lp} = \overline{q(u)q(x)}, f(\overline{uz}) = \overline{lr} = \overline{q(u)q(x)}, \ldots\ldots$$

となり、次が成立 ⇒

$$y_{G_1}(\overline{ux}) = ux \Leftrightarrow y_{G_2}(f(\overline{ux})) = lp = q(u)q(x), \ldots.$$

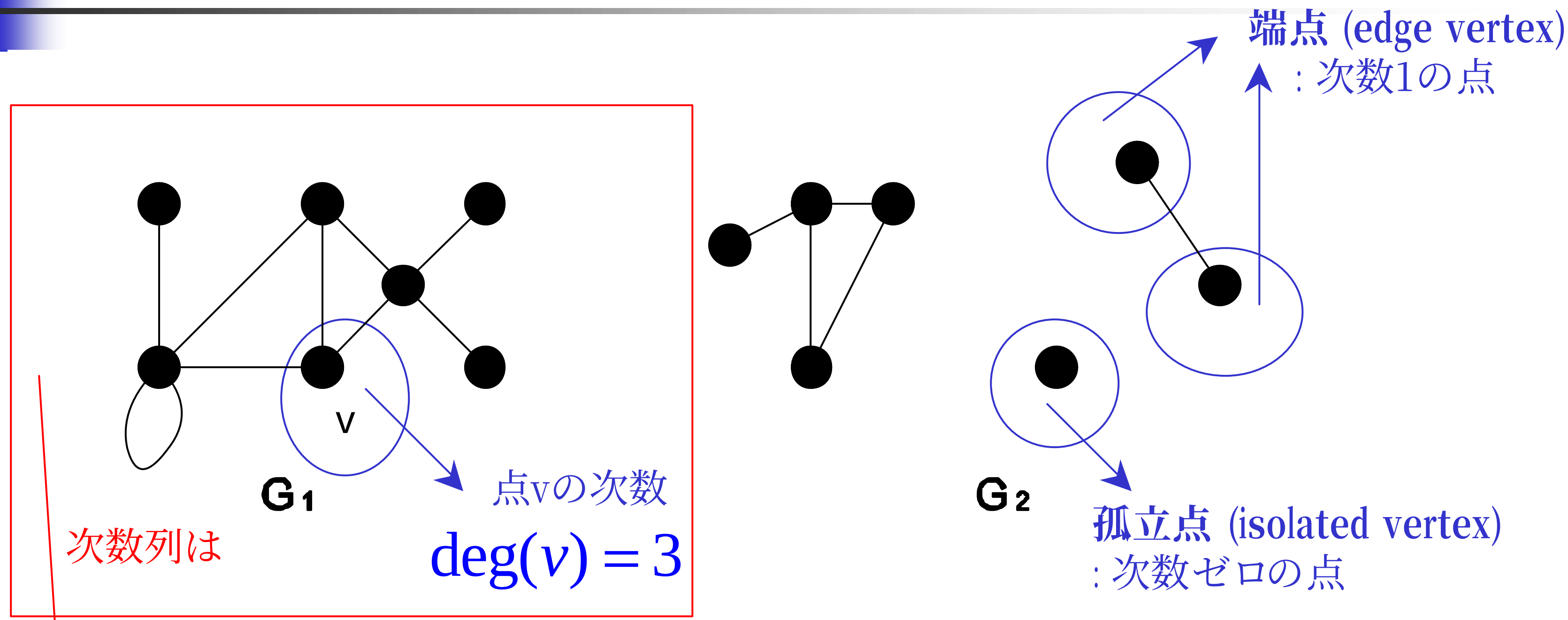
ラベル付きグラフ・ラベルなしグラフ

ラベル付きグラフ : 各点に名前のついたグラフ



ラベル付きグラフとして扱う場合には、これら2つの木は別個の木となる

次数および次数列



グラフの次数列：次数を増加順に記したもの

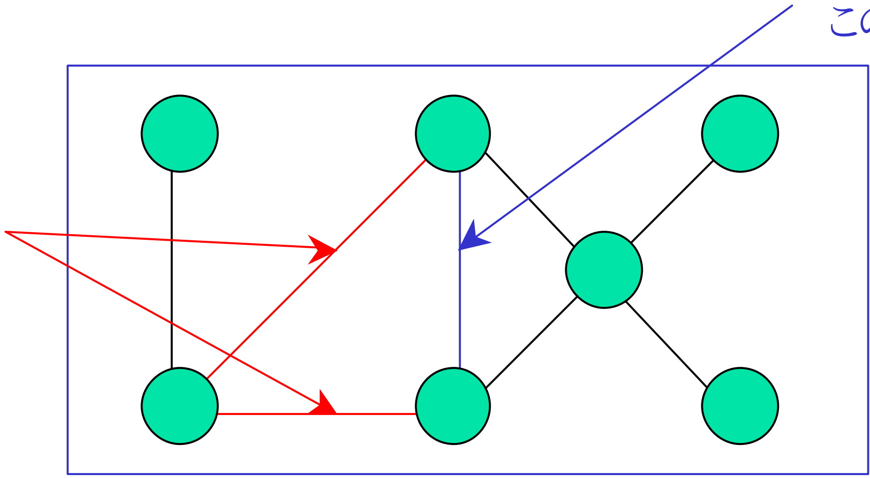
$$\boxed{(1, 1, 1, 3, 3, 4, 5)}$$

⇒ 逆にグラフが描けるような数列のことを、
その数列は「**グラフ的**」であると言う

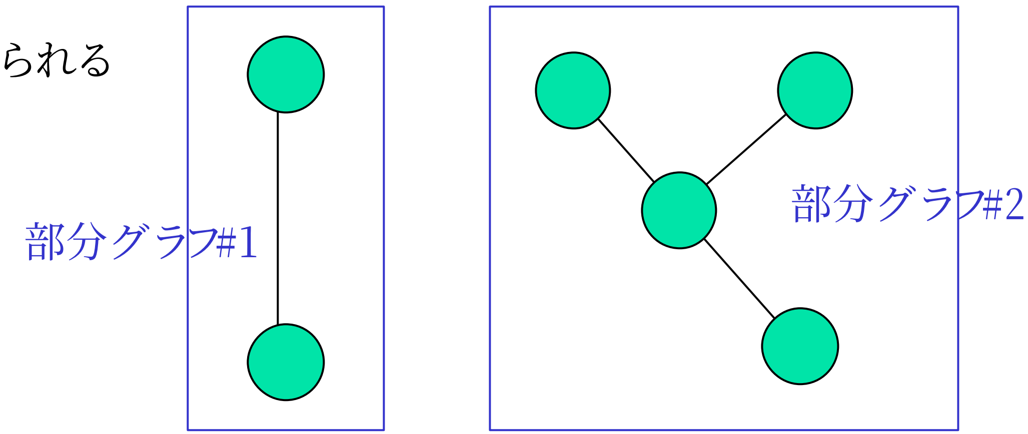
部分グラフ

この辺を縮約する

この 2辺を
除去する



⇒ 右の 2つの部分グラフが得られる

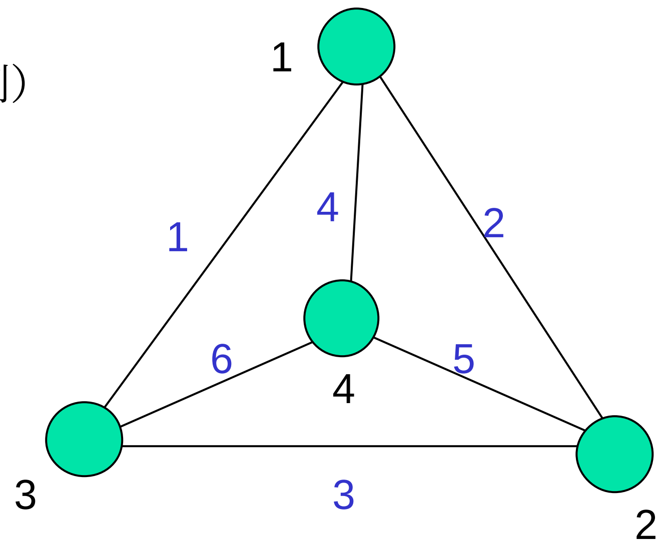


グラフの行列表現

点数 n 変数 m のグラフに対して

隣接行列 : 点 i と点 j を結ぶ辺の本数を第 ij 要素とする nxn の行列
接続行列 : 点 i が辺 jに接続している場合、第 ij 要素が1であり、接続していなければ0 である nxm の行列

例)



隣接行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{0\ 1\ 1\ 1} \\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 0 \end{pmatrix}$$

和3は点1の次数

接続行列

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

握手補題から
この和は必ず2