



Title	2005年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2005-11-18T08:53:31Z
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/771
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learningobject
Note(URL)	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html ; http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory05_slide5.pdf (第5回講義スライド)



[Instructions for use](#)



グラフ理論 #5

第5回講義 5月16日

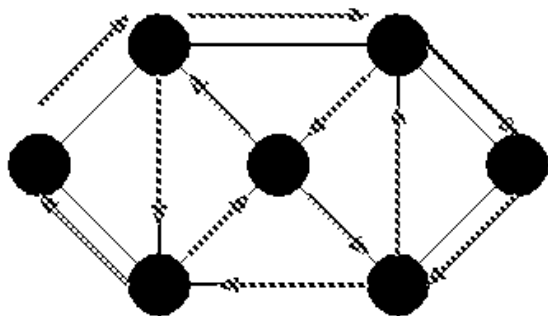
情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

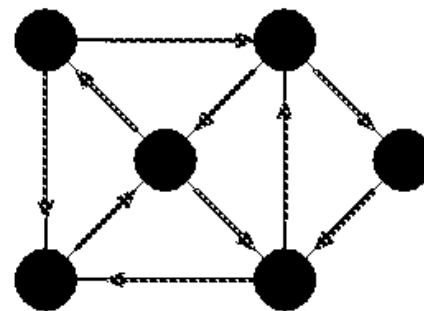
オイラー・グラフ

オイラー・グラフ (Eulerian graph) : 全ての辺を含む閉じた小道がある連結グラフ

半オイラー・グラフ (semi-Eulerian graph) : 全ての辺を含む小道がある連結グラフ
(閉じてなくてもよい)



Eulerian graph



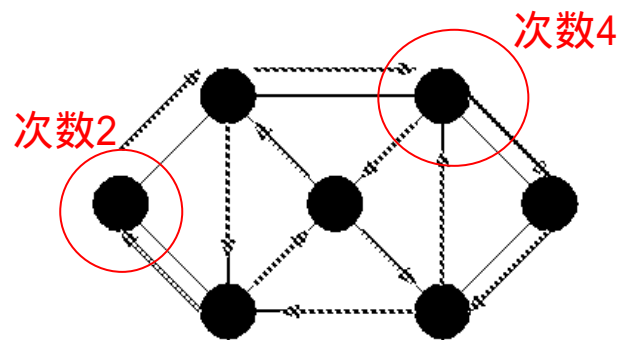
Semi-Eulerian graph

閉じない

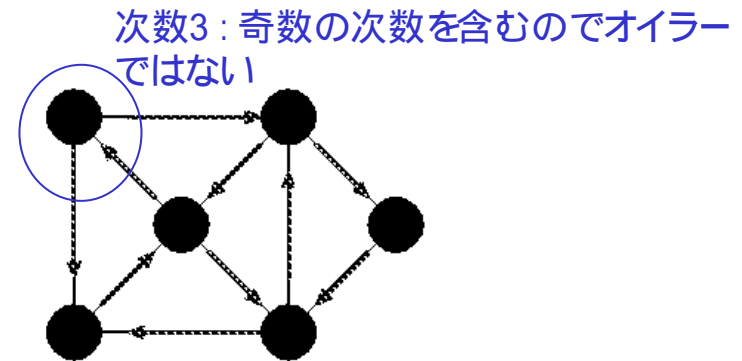
オイラー・グラフである条件は何か？

定理6・2とその証明 #1

連結グラフGがオイラー・グラフであるための必要十分条件はGの各点の次数が全て偶数であることである。



Eulerian graph



Semi-Eulerian graph

(証明)
必要性

Gのオイラー小道がある点を通過する毎に2を加えていくと、全ての辺はちょうど1回ずつ含まれるので、各点でこの和はその点での次数に等しく、それは偶数。

定理6・2とその証明 #2

(証明)
十分性 (アウトライン)

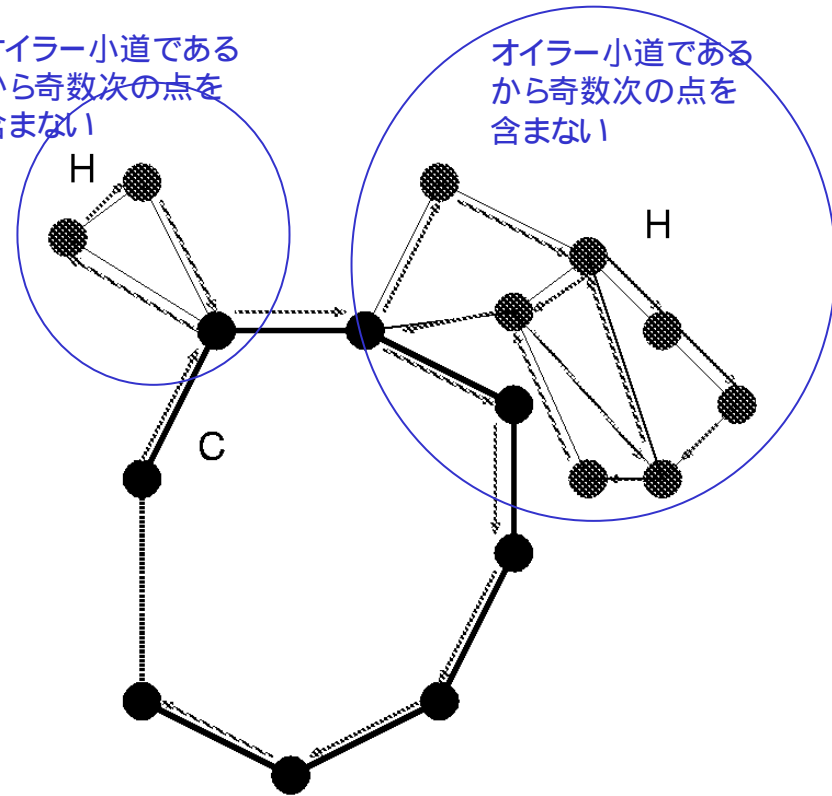
各点の次数が偶数であり、連結ならば
必ず閉路を含む (補題 6・1)。これをCとする

$G \subset C$ なら証明が終わってしまうので
これは考えない。

C上の任意の点からスタートし、Cの辺を
たどり、Hの孤立点でない点に出くわす
たびに、その点を含むHのオイラー小道
をたどり、その点に戻る・・・という操作を
行い、スタート点に戻れば、オイラー・グラフ
が得られる。

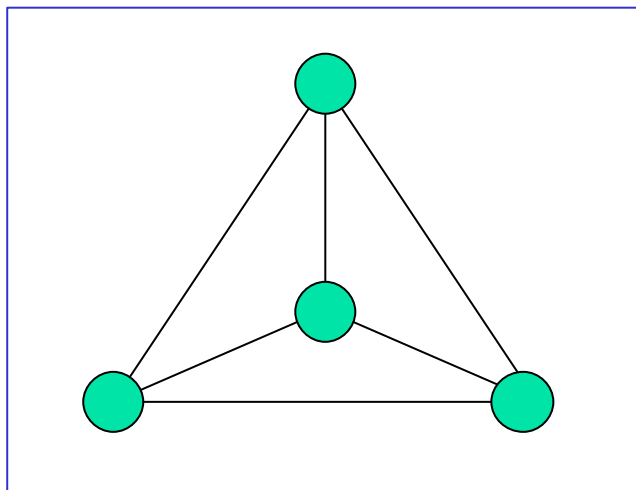
オイラー小道である
から奇数次の点を
含まない

オイラー小道である
から奇数次の点を
含まない

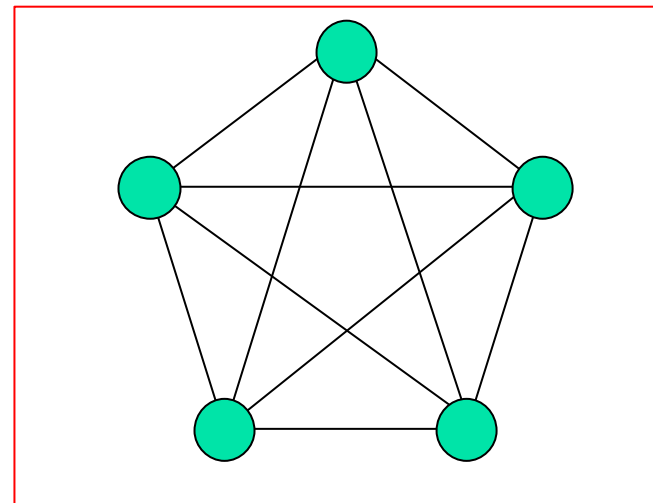


例題11 #1

(1)



オイラー・グラフでない



オイラー・グラフである

完全グラフの場合には

$$n - 1 = \text{偶数}$$

の場合に限り、オイラー・グラフとなる。

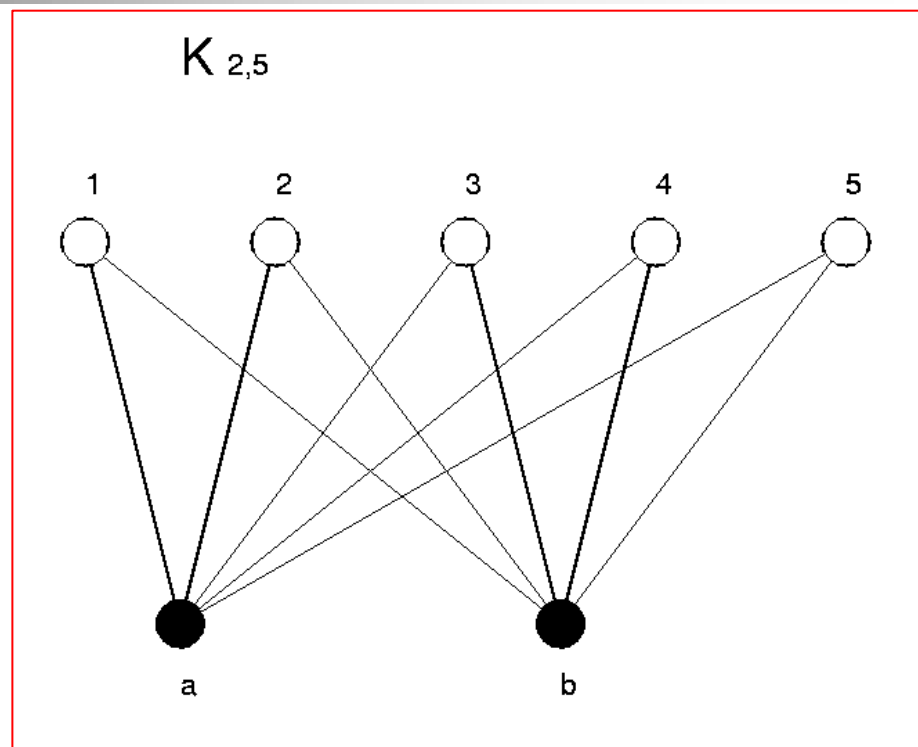
例題11 #2

(2) $K_{s,t}$ に関しては

$s \geq 2$, かつ, t が偶数ならば

a 1 b 2 a 3 b 4 a
5 b

のような経路でオイラー小道を作
ることは可能。



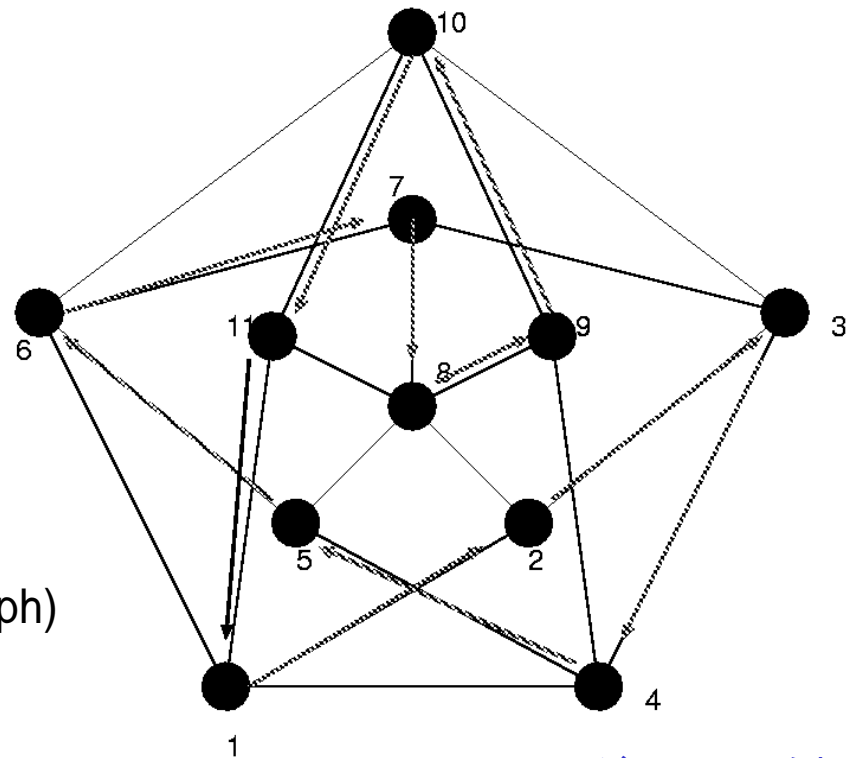
オイラー・グラフ

ハミルトン・グラフ

ハミルトン閉路 (Hamiltonian cycle)
: グラフGの各点をちょうど一度だけ通る
閉じた小道

ハミルトン・グラフ (Hamiltonian graph)
: ハミルトン閉路によりなるグラフ

半ハミルトン・グラフ (semi-Hamiltonian graph)
: 全ての点を通る道があるグラフ
(閉じなくてよい)



ハミルトン・グラフの一例

ハミルトン・グラフである条件は何か？

Ore (オーレ)の定理

Oreの定理

単純グラフGには $n \geq 3$ 個の点があるとする。隣接していない任意の2点 v, w に対し

$$\deg(v) + \deg(w) \geq n$$

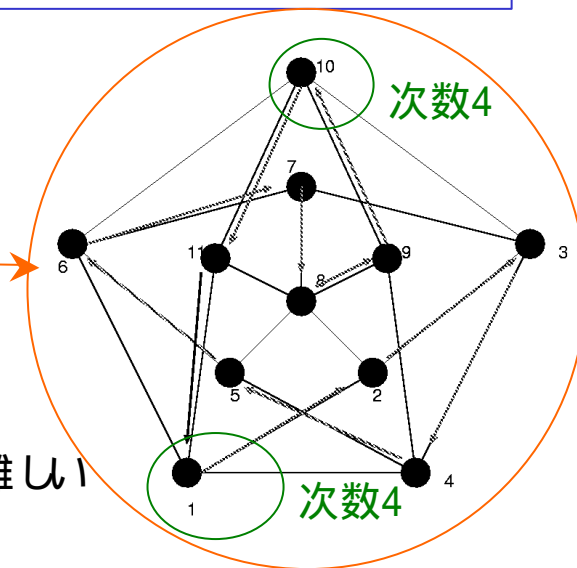
が成立するとき、Gはハミルトン・グラフである。

直観的には各点への接続辺が
十分多ければ、ハミルトン閉路があるであろう
ということを言っている。
これは**十分条件**であることに注意。

このグラフはOreの定理を
満たさないが、ハミルトン・グラフである

「ハミルトン・グラフであることを示せ」という問いは易しいが、
「ハミルトン・グラフでないことを示せ」という問いは多くの場合難しい

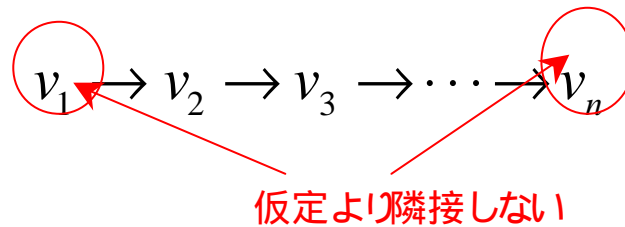
今週の演習問題参照



Oreの定理の証明(アウトライン)

(証明) グラフGはハミルトンではないが、条件式を満たす」として矛盾を引き出す。

Gがぎりぎりハミルトンでない、とすると、全ての点を含む道：



がある。

$$\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$$

とすると

このような
閉路ができてしまう
(矛盾)

