



Title	2005年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2005-11-18T08:53:31Z
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/771">http://hdl.handle.net/2115/771</a>
Rights(URL)	<a href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learningobject
Note(URL)	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> ; <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory05_slide7.pdf (第7回講義スライド)



[Instructions for use](#)



# グラフ理論 #7

第7回講義 6月6日

---

情報科学研究科 井上純一

[http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)



# Cayleyの定理とその証明 #1

$n$ 点の異なるラベル付き木の総数は $n^{n-2}$ 個である

Cayleyの定理

(証明)

準備:  $\deg(v) = k - 1$ の点 $v$ を含むラベル付き木:  $A$

$\deg(v) = k$ の点 $v$ を含むラベル付き木:  $B$

$n$ 個の点からなるラベル付き木のある点の次数が $k$   
であるものの総数を $T(n, k)$ とする

証明のポイント:

「ラベル付き木 $A$ からラベル付き木 $B$ を作る連鎖の総数」  
= 「ラベル付き木 $B$ からラベル付き木 $A$ を作る連鎖の総数」

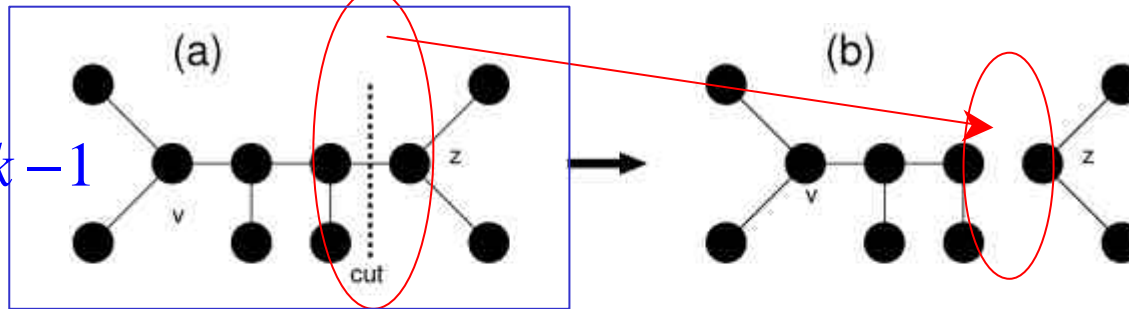
という条件式から  $T(n, k)$  を導く

# Cayleyの定理とその証明 #2

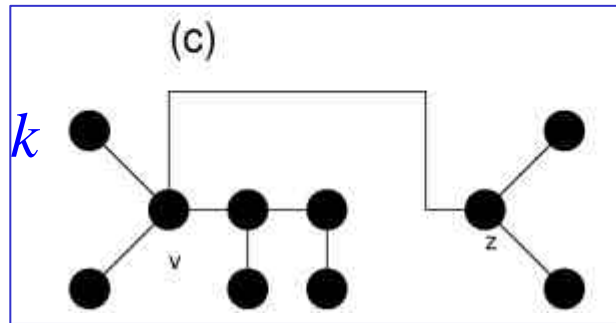
Aをvに接続していない辺で分離する

連鎖 : A B :

A :  $\deg(v) = k - 1$



B :  $\deg(v) = k$



分離した端点のうち、  
点vを含まない方の点z  
を点vとつなげる

切断する辺の選び方 : (点vに接続しない辺の選び方) = (木Aの辺数) - (点vの次数)  
=  $(n-1) - (k-1) = n-k$

(連鎖 :  $A \rightarrow B$  の総数) =  $\frac{T(n, k-1)(n-k)}{A \text{ の総数}}$

# Cayleyの定理とその証明 #3

連鎖 : B A :

部分木  $T_i$  の点数を  $n_i$  とすると

$$n-1 = \sum_{i=1}^k n_i$$

点  $v$  以外の点数

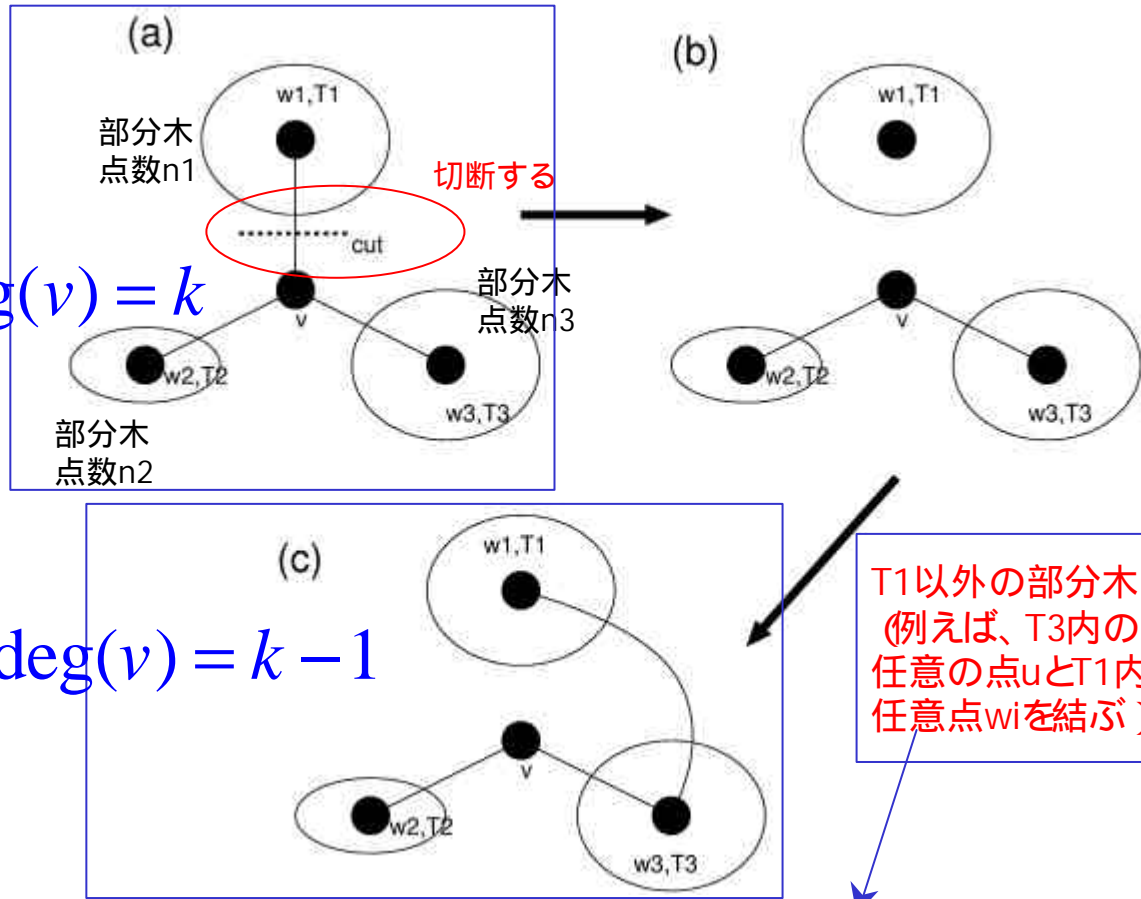
$$B : \deg(v) = k$$

連鎖 B A の総数  
B の総数

$$T(n, k) \sum_{i=1}^k (n-1-n_i)$$

$$= T(n, k)(n-1)(k-1)$$

$$A : \deg(v) = k-1$$



T1以外の部分木  
(例えば、T3内の  
任意の点  $u$  と T1内の  
任意点  $w_i$  を結ぶ)

$$\begin{aligned} & (\text{点 } v \text{ を除く点数}) - (\text{部分木 } T_i \text{ に属する点数}) \\ & = (n-1) - n_i \quad (\text{通り}) \end{aligned}$$

# Cayleyの定理とその証明 #4

[連鎖 : A Bの総数]=[連鎖 : B Aの総数]とおくと

$$(n-k)T(n, k-1) = (n-1)(k-1)T(n, k)$$

$k=n-1, n-2, n-3, \dots$ を書き出してみると

定義よりである

$$T(n, n-2) = T(n, n-1)(n-1)(n-2)$$

$$T(n, n-3) = \frac{1}{2}(n-1)^2(n-2)(n-3)$$

$$T(n, n-4) = \frac{1}{3!}(n-1)^3(n-2)(n-3)(n-4)$$

これを一般化し  $k=k+1$  のとき

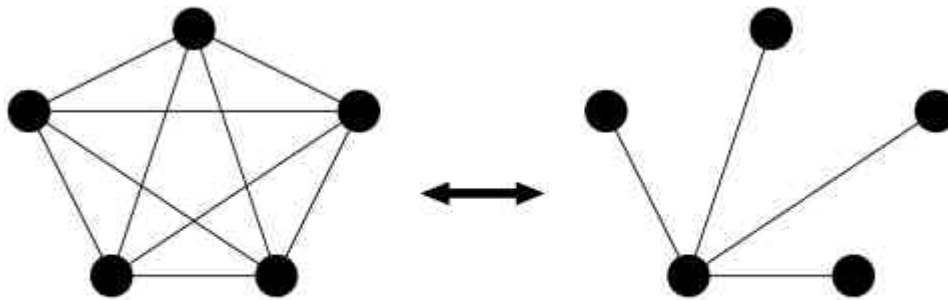
$$T(n, k) = \frac{(n-1)^{n-k+1}(n-2)}{(k-1)(k-2)\dots} = {}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1}$$

# Cayleyの定理とその証明 #5

求めるラベル付き木の総数は

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(n, k) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} 1^{k-1} (n-1)^{(n-2)-(k-1)} = \{(n-1) + 1\}^{n-2} = n^{n-2}$$

系: 完全グラフ  $K_n$  の全域木の総数は  $n^{n-2}$  である



$K_5$

点数  $n$  のラベル付き木は完全グラフ  $K_n$  に一対一に対応する



# 点行列と行列木定理

グラフGの点行列：**D**

$$D_{ij} = \begin{cases} \text{点 } v_i \text{ の次数} & (i = j \text{ のとき}) \\ -(\text{点 } v_i \text{ と点 } v_j \text{ を結ぶ辺数}) & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき、グラフGの全域木の本数は点行列の任意の余因子で与えられる

$$t(G) = (-1)^{i+j} |\mathbf{D}(\bar{i}, \bar{j})|$$



# 行列木定理の適用例

例題16

隣接行列Aが

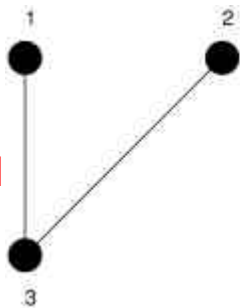
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 で与えられるグラフGの全域木の総数  $t(G)$  を求めよ

このグラフGの点行列は

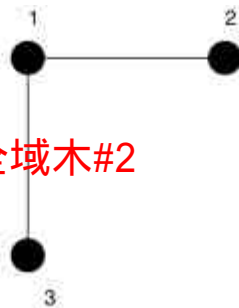
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
 なので

$$t(G) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

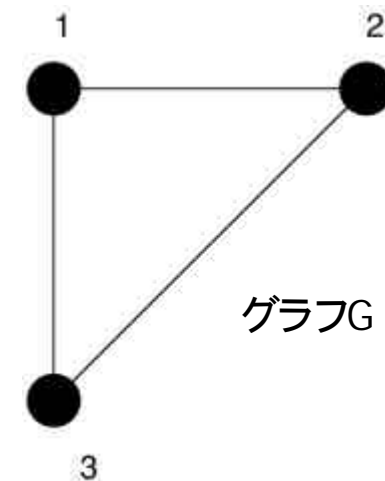
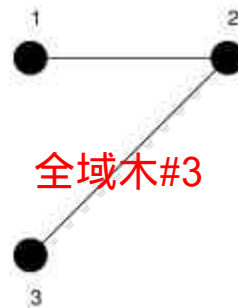
全域木#1



全域木#2



全域木#3



グラフG