学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　　博士（情報科学）　　氏名　栗田 和宏

学 位 論 文 題 名

Efficient Enumeration of Substructures in Sparse Graphs
（疎なグラフにおける部分構造の効率良い列挙）

理論計算機科学の基礎的な問題として, 決定問題と, 計数問題, 最適化問題, そして列挙問題がある. 列挙問題とは, 与えられた入力に対して, ある性質を満たすものをもれなく重複なく出力する問題である. 本研究では列挙問題の中でも入力がグラフ $G = (V, E)$, 出力が G の頂点集合 V もしくは辺集合 E の部分集合の集合である問題について扱う. このような問題を部分グラフ列挙問題と呼ぶ.
我々はいくつかの部分グラフ列挙問題に対して最適な列挙アルゴリズムを与えた. これらの結果はアルゴリズム理論の興味の一つである「その問題に対する最適なアルゴリズムとは何か」という疑問を明らかにする結果であり, 列挙アルゴリズム理論分野で価値のある結果と考える.

本研究でのアルゴリズムの最適性を議論するため, アルゴリズムの効率を測る指標を定義する. 列挙アルゴリズム分野では効率の指標として, 入力依存型と出力依存型の 2 つの指標が存在する. 本研究ではアルゴリズムの効率を出力依存型で測る. この指標は入力のサイズと出力のサイズの和を用いてアルゴリズムの効率を測る. 具体的には, 頂点数と辺数の和が N の入力グラフに対して, M 個の解を $O(M \cdot poly(N))$ 時間で列挙した場合, このアルゴリズムをならし多項式時間アルゴリズムという. 特に, 列挙問題では M 個の解を出力するため, 解の出力に少なくとも M ステップは必要になる. したがって, $O(M)$ 時間を達成するアルゴリズムが最適であり, このようなアルゴリズムをならし定数時間アルゴリズムという.

本研究ではいくつかの列挙問題に対してならし多項式時間列挙アルゴリズムを構築する. これらの提案アルゴリズムは再帰型アルゴリズムであり, 再帰呼び出しが木構造を作る. この木構造を列挙木と呼ぶ. 特に, 列挙木の頂点を入力グラフの頂点と区別するため, ノードと呼ぶ. 提案アルゴリズムは列挙木のノードと 1 つの解が 1 対 1 対応するようにアルゴリズムを構築する. そのため, 単純な解析として, このアルゴリズムのならし計算量は, 1 ノードで必要な計算時間で抑えられる. しかし, 提案アルゴリズムは 1 ノードで定数回以上の計算を行うため, 単純にならし定数時間であることは示せない.

これらのアルゴリズムの計算量改善の基本的なアイディアはならし解析である. 本研究での解析では, 各ノードでかかった計算コストをその子孫に分配することで, そのノードが持つ計算時間を少なくする. この解析法では計算コストを子孫に分配するため, 全てのノードにおいて, コストを配るための子孫が十分に多く存在することを示す必要がある. 入力グラフが疎, つまり辺の数が少ない場合, 第 3 章と, 第 5 章, そして第 6 章の提案アルゴリズムでは各ノードの計算時間が子と孫の個数の定数倍で抑えられることを示し, 第 4 章では, この関係が $O(n)$ 倍で抑えられることを示した. ここで, n はグラフの頂点数である. 本研究ではこの関係を用いてならし定数時間列挙やならし多項式時間列挙を達成することを示した. 以降では本研究で扱った問題と概要について説明する.

第 3 章では誘導マッチング列挙問題を考察する. 誘導マッチング M とは辺集合で, 任意の 2 辺の距離が 2 以上離れている辺集合であり, 誘導マッチング列挙問題はグラフ G 中に含まれる全て

の誘導マッチングをもれなく重複なく出力せよという問題である. 本研究ではこの問題に対し, 分割法に基づく列挙アルゴリズムを与えた. 分割法とは列挙アルゴリズムの構成法の一つである. 分割法では解からなる集合を非空な 2 つの集合に再帰的に分割することで解を列挙する. このアルゴリズムでのボトルネックは解の分割方法である. 誘導マッチング列挙問題は単純な分割法の適用で, $O(\Delta^2)$ 時間で解を分割できるが, 我々の提案アルゴリズムは入力グラフに長さ 4 の閉路を含まない場合にならし定数時間列挙を達成することを示した.

第 4 章では, 内周制約部分グラフ列挙問題を考察する. 内周とはグラフに含まれる最小閉路の長さである. 本章では, 出力が部分グラフと誘導部分グラフの 2 通りと入力が無向グラフと有向グラフの場合の 4 つの場合について効率良い列挙アルゴリズムを構築した. 第 3 章では入力グラフが小さな閉路を持たないときに効率良い列挙が可能にであることがわかった. 本章では逆に, 出力されるグラフが小さな閉路を持たない場合の列挙問題の難しさについて考察した. この問題に対し, 単純な分割法に基づくアルゴリズムを構築すると, グラフ中の最小閉路を求める問題がボトルネックになる. しかし, 任意の 2 点間の距離を持つ行列を持つことで, この問題を解決した. この行列を持つことで, 最小閉路長が高速に計算でき, ならし $O(n)$ 時間で解を列挙できる. ここで, n はグラフの頂点数である.

第 5 章では支配集合列挙問題に取り組む. グラフ $G = (V, E)$ に対して, 頂点集合 U と U の隣接頂点の集合の和集合が V と等しいとき, U を支配集合という. 本章ではこの問題に対して, 内周と縮退数が制約されたグラフに対するならし定数時間列挙アルゴリズムの構築した. グラフ G が k 縮退であるとは, G の任意の部分グラフに対して, 次数が k 以下の頂点が存在することをいい, k の最小値を G の縮退数という. 本章では, 縮退数が k のグラフに対して, ならし $O(k)$ 時間の列挙アルゴリズムを与えた. これは定数縮退グラフに対して, このアルゴリズムが最適であることを意味する. さらに, 内周が 9 以上の場合も支配集合列挙問題はならし定数時間解けることを示した.

第 6 章では弦二部誘導部分グラフの列挙問題を考察する. 弦二部グラフとは二部グラフかつ長さ 6 以上の誘導サイクルを持たないグラフである. 我々はこの問題に対し, ならし $O(kt\Delta^2)$ 時間アルゴリズムを構築した. ここで, k は縮退数, Δ はグラフの次数, そして t はグラフ中の二つの頂点集合のサイズが等しい二部クリークの最大サイズである. パラメータ k と t は Δ 以下であるため, このアルゴリズムは定数次数グラフに対して最適なアルゴリズムである. 興味深いことに, t を厳密に求める問題は NP 困難なので, t の厳密な値は計算できないが, このアルゴリズムは t の値を知らずとも正しく動作する.

上記のように本研究では, グラフの疎性を用いて部分グラフを最適な時間で列挙するアルゴリズムを開発した. これらのアルゴリズムを構築する上で開発した主な技術は, 兄弟の子供に計算コストを分配する解析法と, そのアルゴリズムの計算時間の改善法である. しかしながら, これらの手法では定数段の深さの子孫, つまり孫と子供の数しか解析に用いていない. より多くの子孫に計算コストを分配するためには, より深い子孫にも計算コストを配るという拡張がある. このように, より多くのノードに対してコストの分配ルールを考えることで, 誘導木列挙や誘導に部グラフ列挙問題と言ったならし定数時間アルゴリズムが知られていない問題に対する最適なアルゴリズムの構築を行う.