経済学研究 *70−1*
北海道大学 2020.6

不可分財の純粋交換経済

田 中 嘉 浩

1. はじめに

交換経済は，19 世紀末に Walras によって一般均衡分析の 2 財で生産のない例として最初に考えられた。Edgeworth［2］や Pareto によって 2 人 2 財の場合に，エッジワース・ボックス内のオファー曲線や無差別曲線の接点を用いて均衡の状況が明快に説明されている。

本稿では生産のない純粋交換経済に限定して，可分財と不可分財それぞれの場合の Walras 均衡について考察する。可分財の純粋交換経済では Walras 均衡がコアに含まれることや幾つかの仮定の下での存在証明，存在を保証する効用関数のクラスについて考察する。不可分財の純粋交換経済では室田［5],［6］の結果に基づき，不可分財の場合は均衡がない例が生じることや均衡が存在する為の必要十分条件を示し，連続化した体系に解が存在する時にその条件を満たす効用関数のクラスを述べる。

Hurwicz［4］は Walras 均衡で個人の効用関数を虚偽表明する時の耐戦略性に関する考察をしている。本稿では不可分財の場合に関する考察を加えた。

2. 可分財の純粋交換経済

可分財は連続変数で表現できるので通常の解析が可能になる。この節の結果はよく知られているが，後の節の便宜の為に纏めておく。

2 人 2 財の可分財の純粋交換経済を考える。初期保有量 W は個人（消費者）$h=1,2$（ここでは A,B）の第 1 財，第 2 財の初期配分を使って

$$W=(w_1,\ w_2)=(w_1^A+w_1^B, w_2^A+w_2^B)$$

と書けるので，個人 A,B の任意の配分 x^A, x^B は $x_1^A+x_1^B=w_1$，$x_2^A+x_2^B=w_2$ なので，エッジワース・ボックス内の $O^A=(0,0)$ からの点 $(x_1^A,\ x_2^A)$, それと一致する $O^B=(w_1,w_2)$ からの点 $(x_1^B,\ x_2^B)$ として表すことができる。

選好が一定の条件を満たしていて効用関数が存在するとする。

Walras 均衡は契約曲線上の点で接する個人 A,B の効用関数の等量曲線の接線が初期配分 $((w_1^A,w_2^A),\ (w_1^B,w_2^B))$ を通る点として定義される。即ち，各個人 $h=A,B$ の効用関数を $u^h(x_1,x_2)$ とすると，

$$\begin{aligned}\underset{x}{\text{maximize}}\quad & u^h(x)\\ \text{subject to}\quad & \langle p,x\rangle = \langle p,w^h\rangle\\ & x^A+x^B=W\end{aligned}$$

という制約付き最大化問題の解として定式化される。

価格 $p\in\mathbb{R}_+^2$ に対して上の問題は，

$$D^h(p)=\arg\max_{x\in\mathbb{R}_+^2}(u^h(x)-\ \langle p,x\rangle),$$

$$x^h\in D^h(p),$$

$$x^A+x^B=W$$

と書けることに注意する。

一般に個人が n 人（$h=1,\dots,n$），可分財が k 種類の場合を考える。各個人 h の初期配分 $w^h\in\mathbb{R}_+^k$ を用いて予算集合を

$$B^h(p,\ w^h)=\{x\in\mathbb{R}_+^k \mid \ \langle p,x\rangle\le\langle p,w^h\rangle\},$$

価格 $p\in\mathbb{R}_+^k$ に対して，（Marshall の）需要関数 $D_h:\mathbb{R}_+^k\to\mathbb{R}_+^k$ を

$$D^h(p) = \arg\max_{x \in \mathbb{R}_+^k} (u^h(x) - \langle p, x \rangle),$$

但し，$u^h : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$ は h の効用関数と定義できる。これを用いて，一般の Walras 均衡を，

$$x^h \in D^h(p),$$
$$\sum_{h=1}^n x^h = W$$

を満たす $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^k$，$\bar{x}^h \in \mathbb{R}_+^k$，$h = 1, \ldots, n$ として定義する。

Walras 均衡は個人合理性と Pareto 効率性を満たすので，単なる厚生経済学の第一定理ではなく，次の結果が成立する。

定理 1　Walras 均衡を実現する配分はコアに含まれる。 □

Walras 均衡の存在を保証するためには，効用関数に更なる仮定を課す。
Hauenschild and Stahlecker［3］は次の仮定の下に Walras 均衡の存在を証明している。

仮定

1. $\sum_{h=1}^n w^h > 0$, i.e., $\sum_{h=1}^n w_i^h > 0$, $\forall i = 1, \ldots, k$。
2. 個人 h の選好は連続な効用関数 $u^h : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$，$h = 1, \ldots, n$ で表せる。
3. どの $p \in \mathbb{R}_{++}^k$，どの $w^h \in \mathbb{R}_+^k$ に対しても，正確に 1 つの効用最大解
   $x^h(p,\ w^h) \in B^h(p,\ w^h)$，　$h = 1, \ldots, n$
   が存在する。
4. 全ての個人の選好は狭義単調，即ち，
   $x^h \geq y^h$，　$x^h \neq y^h \implies u^h\ (x^h) > u^h(y^h)$
   for　x^h，$y^h \in \mathbb{R}_+^k$，$h = 1, \ldots, n$。

定理 2［3, Proposition 1］　仮定 1～4 の下で価格 $\bar{p} \in \mathbb{R}_{++}^k$ が存在して $z(\bar{p}) \in \mathbb{R}_{++}^k$，$z(\bar{p}) \leq 0$ を満たす。 □

各個人 h の $z^h(p) = x^h - w^h$ を用いて超過需要関数 $z(p) = \sum_{h=1}^n z^h(p)$ で定義すると，Walras 法則 $p \cdot z(p) = 0$ から $p > 0$ ならば，Walras 均衡の条件は $z(p) = 0$ となることに注意する。

定義 1．関数 $f : C \to \mathbb{R}$，$C \subset \mathbb{R}^n$ が

$$f\big((1-\lambda)x^1 + x^2\big) > \min\{f(x^1), f(x^2)\},$$
$$\forall x^1, x^2 \in C, \quad 0 < \forall\lambda < 1$$

を満たすならば，**狭義の準凹関数（strictly quasiconcave function）**［1］という。

f が（上半）連続ならば凸集合上で
　単峰性（unimodal）　⇔　狭義の準凹関数
となることに注意する［1］。

定理 3　可分財の純粋交換経済において，各個人の効用関数 u^h，$h = 1, \ldots, n$ を単調非減少かつ連続な狭義の準凹関数とする。その時，任意の $W > 0$ に対して Walras 均衡解 $\bar{p} \in \mathbb{R}_{++}^k$，$\bar{x} \in \mathbb{R}_+^k$ が存在する。

［証　明］　題意から仮定 1，2 は満たす。

$$\begin{aligned} &-\langle p, (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \rangle \\ &\quad = (1-\lambda) \cdot -\langle p, x^1 \rangle + \lambda \cdot -\langle p, x^2 \rangle \\ &\quad \geq \min\{-\langle p, x^1 \rangle, -\langle p, x^2 \rangle\} \end{aligned}$$

なので，u^h が狭義の準凹関数ならば $u^h(x) - \langle p, x \rangle$ も狭義の準凹関数になる。よって狭義の準凹関数の性質から仮定 3 を満たす。
$x^h \geq y^h$，$x^h \neq y^h$ に対して $u^h(x^h) = u^h(y^h)$ とすると，狭義の準凹関数の定義から
$u^h(x^h) < u^h((1-\lambda)x^h + \lambda y^h)$ となり，単調性に矛盾するので仮定 4 を満たす。
よって定理 2 が適用でき，価格 $\bar{p} \in \mathbb{R}_{++}^k$ が存在して $z(\bar{p}) \leq 0$ となる。$\bar{p} \in \mathbb{R}_{++}^k$ であるから，Walras 法則より $z(\bar{p}) = 0$ を満たす。 □

3. 不可分財の純粋交換経済

不可分財は変数の量を実数ではなく整数で考える必要の有る財であり，整数点では 2 人 2 財の場合に無差別曲線が接する保証さえない。
ここでは室田［6］に基いて離散変数の純粋交換経済（注：［6］では生産の有る場合を扱っている）での需要集合の定義と生ずる問題点を紹介する。

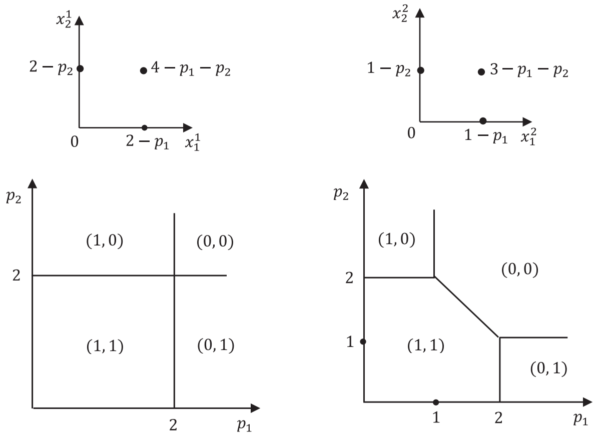

図 1　例 1 の需要対応 $D^1(p), D^2(p)$

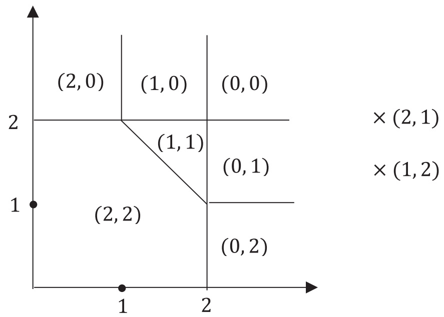

図 2　例 1 の需要対応 $D^1(p)+D^2(p)$

個人が n 人（$h=1,\dots,n$），不可分財が k 種類の場合を考える。

各個人 h の初期配分 $w^h \in \mathbb{Z}_+^k$ を用いて予算集合は

$$B^h(p,\ w^h) \ = \ \{x \in \mathbb{Z}_+^k \mid \langle p, x\rangle \le \ \langle p, w^h\rangle\}$$

となり，$p \in \mathbb{R}_+^k$ に対する需要関数（対応）D_h：$\mathbb{R}_+^k \to 2^{\mathbb{Z}_+^k}$ を純粋

$$D^h(p) = \arg\max_{x\in\mathbb{Z}_+^k}(u^h(x) - \ \langle p, x\rangle),$$

と定義できる。これを用いて，整数変数の Walras 均衡を，

$$x^h \in D^h(p),$$
$$\textstyle\sum_{h=1}^n x^h = W$$

を満たす $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^k$，$\bar{x}^h \in \mathbb{Z}_+^k$，$h=1,\dots,n$ として定義する。

変数が離散の場合には，次の例の様に均衡が存在しない場合が生じる。

例 1.　$n=2,\ k=2$

$$S = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$
$$u^1(x) = \ 2x_1 + 2x_2,\quad x \in S$$
$$u^2(x) = \min(x_1 + 2x_2,\ 2x_1 + x_2),\quad x \in S$$

例 1 の $D^1(p)$，$D^2(p)$ を図 1 に示す。これを用いて $D^1(p)$ と $D^2(p)$ の Minkowski 和 $D^1(p) + D^2(p)$ は図 2 の様に表せる。

図 2 から，例えば $W = (2{,}1)$ や $(1,2)$ の場合にはそれを配分する均衡が存在しないことが分る。連続変数ならば $u^1(x)$ も $u^2(x)$ も凹関数（よって準凹関数）であるが，離散変数が定義域の場合には Walras 均衡が存在しなくなりえることに注意されたい。

全員の効用を集約した関数 $\mathcal{U}$：$\mathbb{Z}^k \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を

$\mathcal{U}(z)=\max\{\sum_{h=1}^{n}u^h(x^h)\mid\sum_{h=1}^{n}x^h=z\}$，$z\in\mathbb{Z}^k$
更に

$$\mathcal{U}[-p](z)=\sum_{h=1}^{n}(u^h(x^h)-\langle p,x^h\rangle)$$

と定義する。

定義 2. 関数 $f:\mathbb{Z}^k\to\overline{\mathbb{R}}$ $(\equiv\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\})$ と $x\in\mathrm{dom}\ \ f$ に対して

$$\partial f(x)=\{p\in\mathbb{R}^k\mid f(y)-f(x)\geq\langle p,y-x\rangle,\ \forall y\in\mathbb{Z}^k\}$$

を f の点 x における**劣微分**といい，$p\in\partial f(x)$ を劣勾配という。

f が $\bar{f}$ に凸拡張可能ならば

$$\partial f(x)=\partial\bar{f}(x),\quad x\in\mathrm{dom}\ \ f,$$

但し $\bar{f}$ は f の凸拡張（連続）関数，となることに注意する。

初期総保有量 W に対して Walras 均衡が存在する条件は［6，命題 9.11］から次の様になる。

定理 4　不可分財の純粋交換経済で初期総保有量 W に対して Walras 均衡が存在するための必要十分条件は，$W\in\mathrm{dom}_{\mathbb{Z}}\mathcal{U}$ かつ $\partial(-\mathcal{U})(W)\cap\mathbb{R}_+^k\neq\phi$ となる。また均衡 $\bar{p}$，$\bar{x}^h$，$h=1,\ldots,n$ に対して

$$\partial(-\mathcal{U})(W)=\cap_{h=1}^{n}\partial(-u^h)(\bar{x}^h)$$

が成立する。

［証　明］　定義から

$$\mathcal{U}(z)=\max\{\sum_{h=1}^{n}(u^h(x^h)-\langle p,x^h\rangle)\mid\sum_{h=1}^{n}x^h=z\}+\langle p,z\rangle$$

と書き直せるので，
$\mathcal{U}[p](z)=\max\{\sum_{h=1}^{n}u^h[-p](x^h)\mid\sum_{h=1}^{n}x^h=z\}$.
従って

$$\max_{z}\mathcal{U}[p](z)=\ \sum_{h=1}^{n}\max_{x^h}u^h[-p](x^h)$$

が成立する。均衡 $(\bar{p},\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^n)$ が成立するならば，$\bar{x}^h\in\arg\max_{x\in\mathbb{Z}_+^k}u^h[-\bar{p}]$，$h=1,\ldots,n$ かつ $\sum_{h=1}^{n}x^h=W$ が成立するので

$$\mathcal{U}[\bar{p}](W)=\sum_{h=1}^{n}u^h[-\bar{p}](x^h)=\max\mathcal{U}[\bar{p}]$$

となり，しかも $\bar{p}\in\mathbb{R}_+^k$ だから，$\bar{p}\in\partial(-\mathcal{U})(W)\cap\mathbb{R}_+^k$ である。

逆に，$\bar{p}\in\partial(-\mathcal{U})(W)\cap\mathbb{R}_+^k$ の時，$\mathcal{U}[\bar{p}](W)=\max\mathcal{U}[\bar{p}]$ であり，上の論理を逆に辿って $(\bar{p},\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^n)$ は均衡になる。　□

更なる議論のために，室田［5］，［6］が提案する離散凸解析の重要な概念を幾つか紹介する。
整数格子点上で定義された実数値関数 $f:\mathbb{Z}^k\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ に対して実効定義域 $\mathrm{dom}\ \ f\neq\phi$ を仮定する。$x\in\ \mathbb{Z}^k$ に対して
$\mathrm{supp}^+(x)=\{i\mid x_i>0\}$, $\mathrm{supp}^-(x)=\{i\mid x_i<0\}$
と定義し，第 i 単位ベクトルを $e_i\in\{0,1\}^n$ と記す。$e_0=0$ とする。
次の離散凹関数を定義する。

定義 3. 関数 $f:\mathbb{Z}^k\to\overline{\mathbb{R}}$ は，$\forall x,y\in\mathrm{dom}\ \ f$ と $\forall u\in\mathrm{supp}^+(x-y)$ に対して $v\in\{0\}\cup\mathrm{supp}^-(x-y)$ が存在して

$$f(x)+f(y)\leq f(x-e_u+e_v)+f(y+e_u-e_v)$$

を満たす時，**M♮ 凹関数**という。

M♮ 凹関数は凹拡張可能であり，劣モジュラである。例 1 の $u^2(x)$ は

$$u(1,1)+u(0,0)>u(0,1)+u(1,0)$$

となるから M♮ 凹関数ではない。

定義 4. 集合 $S\subseteq\mathbb{Z}^k$ は，$\forall x,y\in S$ と $\forall u\in\mathrm{supp}^+(x-y)$ に対して $v\in\{0\}\cup\mathrm{supp}^-(x-y)$ が存在して

$$x-e_u+e_v\in S\quad\text{かつ}\quad y+e_u-e_v\in S$$

を満たす時，**M♮ 凸集合**という。
M♮ 凸集合は次の性質を持つ。

性質
1. M♮ 凸集合は穴なし集合（$S=\bar{S}\cap\mathbb{Z}^k$）である。
2. M♮ 凹関数 $f:\mathbb{Z}^k\to\overline{\mathbb{R}}$ の最大化集合 $\arg\max f$ は M♮ 凸集合である。

定義 5.　関数 $g : \mathbb{Z}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ が**離散中点凹性**

$$g(p) + g(q) \leq g\left(\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil\right) + g\left(\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor\right),\quad \forall p,\ q \in \mathbb{Z}^k$$

を満たす時，**L♮ 凹関数**という。
L♮ 凹関数は凹拡張可能であり，優モジュラである。

定義 6.　集合 $S \subseteq \mathbb{Z}^k$ は

$$p,\ q \in S \quad \Rightarrow \quad \left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil,\quad \left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor \ \in \ S$$

を満たす時，**L♮ 凸集合**という。

L♮ 凸集合は次の性質を持つ。

性質
1. L♮ 凸集合は穴なし集合（$S = \bar{S} \cap \mathbb{Z}^k$）である。
2. L♮ 凹関数 $g : \mathbb{Z}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ の最大化集合 $\arg\max g$ は L♮ 凸集合である。

［6，定理 9.15, 9.17］から次の結果を得る。

定理 5　不可分財の純粋交換経済で各個人の効用関数 u^h，$h = 1, \ldots, n$ を M♮ 凹関数とする。初期総保有量 $W \in \mathbb{Z}_+^k$ に対して，連続化した経済体系に均衡が存在するならば，不可分財の均衡 $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^k$，$\bar{x}^h \in \mathbb{Z}_+^k$，$h = 1, \ldots, n$ が存在する。特に均衡価格の全体 $P^*(W)$ は L♮ 凸多面体をなす。□

$n = 2$ の時には次の結果も成立する。

命題 6［6，9.19(1)］　不可分財の純粋交換経済で個人が 2 人，効用関数 u^1，u^2 が単調非減少な L♮ 凹関数ならば，任意の初期総保有量 W に対して均衡が存在する。□

4.　耐戦略性に関する考察

Hurwicz［4］は Walras 配分で個人の選好（よって効用関数）を虚偽申告することによって戦略的操作が起こることを示した。この節では定義域が整数（よって不可分財）の場合にも戦略的操作が起こることを示す。

例 1　$n = 2,\ k = 2$
$S = \{x \in \mathbb{Z}_+^2 \mid x \in [0, 4] \times [0,4]\}$
$u^1(x) = u^2(x) = \sqrt{x_1 x_2},\quad x \in S$
$\{x^1, x^2\} = \{(2, 2), (2, 2)\},\quad u^1(x) = 2$
個人 1 が次の虚偽選好

$$u^{1'}(x) = 2x_1 + x_2$$

を申告すると，

$$\{x^1, x^2\} = \{(3, 2), (1, 2)\},\quad u^1(x) = \sqrt{6}$$

となり，虚偽申告することで戦略的操作が起きる。

前節で述べた様に，不可分財の場合には，効用関数によっては，或る初期総保有量 W に対して Walras 均衡が存在しないことがあることに注意する必要がある。しかしながら，上の例の様に離散（不可分財）の場合にも真の選好でも虚偽選好でも Walras 均衡を持ち，戦略的操作が起きることがある。

5.　おわりに

本稿では，生産を含まない純粋交換経済において，可分財に関しては Walras 均衡が存在するための条件とそれを満たす関数のクラス，不可分財に関しては Walras 均衡が存在するための必要十分条件と緩い仮定の下でそれを満たす関数のクラスについて紹介した。
どちらの場合も仮定の置き方や必要十分性の議論に関して更なる発展が望まれる。
不可分財の純粋交換に関する耐戦略性に関してても Walras 均衡が存在するように仮定や関数クラスを限定した上での議論もなされるべきであろう。

参考文献

［1］Avriel, M., Diewert, W.E., Schaible, S. and Zang, I., *Generalized Concavity*, SIAM, Philadelphia, 2010.

［2］Edgeworth, F.Y., *Mathematical Psychics*, C. Kegan Paul & Co., London, 1881.

［3］Hauenschild, N. and Stahlecker, P., “A simple proof for the existence of Walrasian equilibrium under monotone preferences,” *Economics Bulletin* 4(4), (2002) 1-8.

［4］Hurwicz, L. “On informationally decentralized systems (Chapter 14),” in *Decision and Organization: a volume in honor of J. Marschak*, R. Radner *et al*. Eds., Amsterdam, North-Holland, 1972., 297-336.

［5］Kazuo Murota, *Discrete Convex Analysis*, SIAM, Philadelphia, 2003.

［6］室田 一雄，『離散凸解析』，共立出版，2001。

［7］坂井 豊貴，藤中 裕二，若山 琢磨，『メカニズムデザイン』，ミネルヴァ書房，2008。

［8］Walras, L., *Elements d’Economie Politique Pure, ou théorie de la richesse sociale, 1874*.（『純粋経済学要論（上巻）』，手塚訳，青空文庫。）