# 学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　松　坂　公　暉

## 学 位 論 文 題 名

The Theory of Pseudo-Fan and Toric Construction of Moduli Space of Quasi Maps from $\mathbb{P}^1$ with Two Marked Points to $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
（擬扇の理論および２点付き$\mathbb{P}^1$から$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$への擬写像のモジュライ空間のトーリック構成）

ミラー対称性は，超弦理論に由来する．ミラー対称性予想は，「ある２つのカラビ-ヤウ多様体が存在して，一方のカラビ-ヤウ多様体がもつケーラー構造（A モデル）が，ミラー写像を通してもう一方のカラビ-ヤウ多様体がもつ複素構造（B モデル）と等価である」と述べることができる．特に古典的な場合は，「A モデルの湯川結合が、ミラー写像を通して B モデルの湯川結合と『等しく』なる」となる．B モデルの湯川結合の計算は厳密にできるが，一方で A モデルの湯川結合はインスタントン補正とよばれる項が出てきてしまい，計算が困難である．ところが，A モデルのカラビ-ヤウ多様体が$\mathbb{P}^4$内の５次超曲面（クィンティック-スリーフォールド）の場合には，１９９１年にキャンデラス達[1]によって，B モデルの湯川結合からミラー写像を通して A モデルの湯川結合が計算された．その結果，驚くべきことに５次超曲面上の有理曲線の数が出てきたのである．これにより，ミラー対称性が数学者達にも興味を持たれる対象となったのである．

A モデルの湯川結合は数学的にはグロモフ-ウィッテン不変量（以下、GW 不変量）とよばれる量の母関数として計算される．GW 不変量は，A モデルのカラビ-ヤウ多様体の背景となる空間への安定写像のモジュライ空間の交点数として定義できる．しかし，実は別のモジュライ空間も考えられる．それが本論文で扱う「擬写像（quasi maps）のモジュライ空間」である．これは秦泉寺雅夫先生[2]によって導入された．安定写像のモジュライ空間は正則写像のモジュライ空間をコンパクト化して得られるものであるが，別の方法でコンパクト化して得られたものが擬写像のモジュライ空間である．擬写像のモジュライ空間は，B モデルの情報をより多く持っていると期待される．実際，例えば背景となる空間として射影空間をとると，この場合の擬写像のモジュライ空間上の交点数の母関数が，ミラー対称性の計算に出てくるミラー写像を与える（[2]）．また，背景となる空間がトーリック多様体のとき，その上の擬写像のモジュライ空間もトーリック多様体として構成されることが期待できる．実際，秦泉寺雅夫先生[2]によって$\mathbb{P}^{N-1}$や$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$等の場合に商空間として構成され，齋藤氏[5]によって$\mathbb{P}^{N-1}$の場合に実際にトーリック多様体として構成できることが示された．また，秦泉寺雅夫先生と齋藤氏（[3]）により，$\mathbb{P}(1,1,1,3)$の場合も構成されている．本研究では主に齋藤氏[5]の技法を他の場合にも応用できるように整備および一般化し，その応用として$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$の場合の擬写像のモジュライ空間をトーリック多様体として構成できることを示した（[4]）．

本論文は２つの部に分けることができる．第１部（第２節および第３節）では，[4]で導入された擬扇（pseudo-fan）の概念について議論をした．第２節は本論文で用いられるトーリック幾何についての基本事項をまとめたものである．第３節は第１部の主要な部分をなし，そこでは擬扇の一般理論を展開した．一般に扇が与えられると，これに対応してトーリック多様体が構成されるが，それが単体的かつ完備な場合，商空間として記述されることが知られている．逆に商空間が与えられたとき，それをトーリック多様体として構成するような扇を構成する方法を議論するのがこの部の主な目的である．

擬扇は扇と同様に，いくつかの錐の集まりである．まずは準備として，擬扇が実際の扇となるためには，それが(MVC)とよばれる条件を満たせばよいことを示した．次にいくつかの条件を満たす商空間が与えられると，それから擬扇が構成され，さらにこの場合には(MVC)を改良した，より簡単な(AMVC)とよばれる条件を確かめればよいことを証明した．また，こうして構成した扇から作られるトーリック多様体が，もとの商空間に一致することを確かめ，最後にそのチャウ環を計算した．上でも述べたことから推測されるが，トーリック多様体の場合の擬写像のモジュライ空間は商空間として構成されることが期待される．よって実際にそうなった場合にこの部で述べた方法を用いれば，容易に擬写像のモジュライ空間がトーリック多様体であることを示すことができる．

第２部（第４節および第５節）では，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$の場合の擬写像のモジュライ空間（以下，単にモジュライ空間という）について議論した．第４節では，第３節で議論した方法に基づき，実際にその扇を構成し，最終的にモジュライ空間が単体的かつ完備なトーリック多様体であることを証明した．これがこの部の主な結果である．第５節では，第３節におけるチャウ環の計算に従ってモジュライ空間のチャウ環を計算した．最後に，このトーリック構成の応用として，モジュライ空間のポアンカレ多項式（ベッチ数の母関数）について，いくつかの次数の場合に計算し，そこから２つの予想を与えた．

参考文献


[1] P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green and L. Parkes, “A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal field theory,” Nuclear Physics, B359 (1991).

[2] M. Jinzenji, “Mirror Map as Generating Function of Intersection Numbers: Toric Manifolds with Two Kähler Forms,” Comm. Math. Phys. 323 (2013), no. 2, 747-811

[3] M. Jinzenji, H. Saito, “Moduli Space of Quasi-Maps from $\mathbb{P}^1$ with Two Marked Points to $\mathbb{P}(1,1,1,3)$ and j-invariant,” arXiv:1712.07409.

[4] K. Matsuzaka, “Toric construction and Chow ring of moduli space of quasi maps from $\mathbb{P}^1$ with two marked points to $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$,” Internat. J. Math. 31 (2020), no. 12, 2050094, 29 pp.

[5] H. Saito, “Chow rings of $\widetilde{Mp_{0,2}}(N,d)$ and $\bar{M}_{0,2}(\mathbb{P}^{N-1},d)$ and Gromov-Witten invariants of projective hypersurfaces of degree 1 and 2,” Internat. J. Math. 28 (2017), no. 12, 1750090, 35 pp.