# 学　位　論　文　内　容　の　要　旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　吉田　啓佑

## 学　位　論　文　題　名

KMS States on Operator Algebras Associated with Self-Similar Groups
（自己相似群に付随する作用素環上の KMS 状態）

作用素環とは Hilbert 空間上の有界作用素たちから成る位相付代数のことである．考える位相によって，$\mathrm{C}^*$環と von Neumann 環に大別される．可換な$\mathrm{C}^*$環は何らかの位相空間上の連続関数環と同型であり，可換な von Neumann 環は何らかの測度空間上の$L^\infty$関数環と同型であることが知られている．この事実から，作用素環は関数環の非可換化と捉えることができる．この非可換性が作用素環論において重要である．非可換な作用素環の例として，（非可換な）群や力学系から構成された作用素環が挙げられる．そのような作用素環を，非可換な関係式から生成されていると見なすこともできる．Cuntz 環と呼ばれる$\mathrm{C}^*$環はそのような作用素環の典型例である．Cuntz 環は Cantor 空間上のシフト写像と，以下に述べるような関わりを持つ．2 個以上の元を持つ有限集合 $X$ に対して，$X$ の元たちからなる片側無限列全体の集合 $X^\omega$ を考える．$X^\omega$ は Cantor 空間と同相である．また，各 $x \in X^\omega$ に対して筒集合 $xX^\omega$（これは $x$ から始まる列を集めた集合である）は $X^\omega$ と同相である．この現象に Cantor 空間の自己相似性が現れている．筒集合への同相写像を $S_x$ と書きシフト写像と呼ぶ．シフト写像 $S_x$ たちをある Hilbert 空間上の等長作用素と見なす．それらが生成する$\mathrm{C}^*$環は Cuntz 環と同型である．この意味で Cuntz 環はカントール空間上のシフト写像たちから構成される$\mathrm{C}^*$環と見なすことができる．

本研究では Cantor 空間上の同相写像たちがなす群の部分群を考える．部分群 $G$ の各元と各シフト写像の間にある関係式が成り立つ時，$G$ を自己相似群と呼ぶ．自己相似群の各元をユニタリ作用素と見なす．これらのユニタリ作用素たちとシフト写像（等長作用素と見なしている）たちが生成する$\mathrm{C}^*$環が本研究の主な対象である．考える Hilbert 空間の違いによって，共通の生成元を持つ複数の$\mathrm{C}^*$環が考えられる．その中で最大のノルムを持つものを，ここでは普遍的 Nekrashevych 環と呼ぶ．普遍的 Nekrashevych 環の単純な商環のうちの１つが，本研究ではよく議論される．この単純な商環をここでは被約 Nekrashevych 環と呼ぶことにする．両者をまとめて呼ぶ際には単に Nekrashevych 環と呼ぶことにする．群や力学系から作用素環を構成する場合，群や力学系の性質がどのように作用素環に遺伝するのかがよく議論される．著者もこの視点から Nekrashevych 環を研究し，以下に述べる性質を明らかにした．

作用素環論において，状態と呼ばれる線形汎関数がよく研究される．行列環における正規化されたトレースが状態の一例である．トレースを $\tau$ とし，$A,B$ を同じサイズの正方行列とするとき，$\tau(AB)=\tau(BA)$ が成り立つ．このような可換性を持つ状態を，トレース的状態と呼ぶ．トレース的状態を持つような作用素環の研究において，トレース的状態が重要な役割を果たすことは多い．しかしながら，Cuntz 環や Nekrashevych 環はトレース的状態を持たない．そこで，代わりに KMS 状態と呼ばれる状態を考える．KMS 状態とは，トレース的状態の可換性を弱めた状態である．可換性の弱め方は，実数群の作用素環への作用と，適当な１つの実数を用いて定める．Cuntz 環や Nekrashevych 環にはゲージ作用と呼ばれる実数群の作用が自然に定まる．このゲージ作用と実数 $\log|X|$ から定まる KMS 状態が本研究の主な

対象である（以下では KMS 状態とはゲージ作用と $\log|X|$ から定まるもののみを指す）.

以下では測度とは $X^{\omega}$ 上の Bernoulli 測度を指す．KMS 状態を議論するための準備として，自己相似群の測度的な性質を考察した．自己相似群 $G$ を考える際に，$G$-正則と呼ばれる性質が重要視される．これは $X^{\omega}$ の各点に定まる位相的な性質である．本研究は「全ての可算自己相似群 $G$ に対して $G$-正則な元全体の集合の測度は 0 か 1 である」ことを明らかにした．先行研究に現れる自己相似群はすべて，後者のほとんどいたるところ $G$-正則な自己相似群である．本研究でも以降はほとんどいたるところ $G$-正則であることを仮定する．さらに自己相似群は可算とする．この仮定の下で，「被約 Nekrashevych 環上の KMS 状態の存在と一意性」を示した．同じ仮定の下で，普遍的 Nekrashevych 環上の KMS 状態がただ１つ存在することが，先行研究により明らかにされている．本研究の一意性は，この事実の系である．被約 Nekrashevych 環にも KMS 状態が存在することが非自明な点である．それを説明するために，一意な KMS 状態の与え方を述べる．各 $g \in G$ に対して $\psi(g)$ は $g$ の不動点集合の測度とする（よって $\psi(g)$ は 1 以下の非負実数である）．この $\psi$ の拡張によって KMS 状態が得られる．拡張の際に $\psi$ の被約 Nekrashevych 環のノルムに対する連続性を，調べなければならない．被約 Nekrashevych 環のノルムは普遍的 Nekrashevych 環のノルムより小さい．つまり前者に対する連続性を調べる方が困難であり，後者に対する連続性の議論からは従わない．

次に，ただ１つ存在する KMS 状態が定める位相で，Nekrashevych 環を完備化する．この完備化から得られる von Neumann 環を考える（どちらの Nekrashevych 環を完備化しても同一の von Neumann 環が得られる）．KMS 状態の一意性から，この von Neumann 環は因子環（単純な von Neumann 環）であることがわかる．本研究は「この因子環の型を決定」した．ここで型とは von Neumann 環の不変量である．さらに有限次元近似的な因子環に対しては，とある場合を除き型が完全不変量になる．本研究では，Nekrashevych 環と KMS 状態から得られる von Neumann 環が，いつ有限次元近似的か考察した．自己相似群が従順である場合には，作用素環論の一般論を組み合わせることにより，有限次元近似的であることが示される．さらに，本研究は「自己相似群の従順性を仮定しない場合についても有限次元近似的であるための十分条件」を与えた．

本研究では，普遍的 Nekrashevych 環の単純性についても議論した．普遍的 Nekrashevych 環が単純であることは，普遍的 Nekrashevych 環と被約 Nekrashevych 環が同型であることと，同値である．以降は multispinal 群と呼ばれる自己相似群たちについてのみ考えるものとする．本研究は，multispinal 群から得られる普遍的 Nekrashevych 環が単純であるための必要十分条件を与えた．Multispinal 群とは，いくつかの条件が課された２つの有限群から生成される，自己相似群である．一方の有限群の各 $g$ について $\psi(g)$ を考える．さらに，$\psi(g)$ たちを成分に持つ適当な半正定値行列を定める．本研究によって，「この行列の正則性と普遍的 Nekrashevych 環の単純の単純性は同値である」ことが明らかにされた．この結果の証明には，被約 Nekrashevych 環のノルムに対する $\psi$ の連続性が，本質的に関わっている．この意味で，先ほどまでの KMS 状態の議論と関連している．普遍的 Nekrashevych 環が単純になる multispinal 群の例，及び単純にならない例はともに先行研究により知られている．本研究により，単純になる例が新たに見つかった．また，単純になる場合は（普遍的かつ被約な）Nekrashevych 環は K 群を用いて分類できることが先行研究により明かされている．本研究により，multispinal 群から得られる Nekrashevych 環の K 群による分類に，一つの足掛かりが与えられたと，著者は考えている．