経済学研究 *71−1*
北海道大学 2021.6

統計学の基礎及び幾つかの用心

園　信太郎

1. 実務上の確率

英語では practical である。例えば，56 回コインを投げ上げて裏（T）か表（H）かを観察し，次の 57 回目が H となる「たしからしさ」を問題とする場合，その確率を 56 回中の H の相対度数とするやり方である。このような確率は次の著しい特徴（1）（2）をもつ。

（1）その値は既知である。
（2）データが追加されると，通常は値が変動する。

（1）（2）は，実務上の確率が「既知可変」であることを示している。即ち，未知固定，unknown but fixed，などではない。通常の客観論的見解（所謂頻度論）における確率とは異なるのである。Bruno de Finetti の exchangeability（交換可能性）を採用すれば，合理的な「個」は，問題の相対度数に「近い」値を付加することとなる。

2. Ω≠Ø について

授業で Kolmogorov system に言及する際，公理系の完全加法性をつかってこれを出すこととしている。その際，複素数体において，零元 0 と単位元 1 とが異なることをわざわざ注意している。重要なことはこの式が前提ではなく帰結であることで，「あたりまえ」のことが容易に従わなければ，その体系には問題があるということである。「試行」を持ち出すのならば，「試行」は「空」ではないということである。

3. 根元事象

Elementary event である。A. N. Kolmogorov は各見本点 ω を根元事象と呼び，その集まりを，事象と呼んだ。標本空間である全事象 Ω と空事象 Ø とは，この意味で事象になる。なお，単元集合，singleton，{ω} は事象だが根元事象ではない。「試行」がもたらし得る各 outcome を根元事象と呼ぶのである。

4. 現象と事象と

Bruno de Finetti が執拗に指摘しているように，現象は繰り返すが，事象は一回性のものであり unique であり，「雨が降る」は繰り返すが，「その雨」は一回限りである。このような基本的なことは，ぜひとも統計学の授業で注意すべきである。

5. Lebesgue 積分の定義

読みはやはり「ルベーグ」だろう。問題は基礎となる測度の完全加法性を本質的に使うか否かである。加法法則（所謂有限加法性）のみを確率に要請する立場からの議論も展開しうるので，今日では，「一般的な」定義の方を採用すべきかもしれない。加法法則のみを要請する議論としては Dubins and L. J. Savage（1976）がある。加法法則しかみたさない確率の例は，Royden（1988）を参照すれば容易に作れる。な

おこの Royden での Lebesgue 積分の定義は「一般的」である。

6. 馬の前に馬車をつなぐ

これは Bruno de Finetti が Kolmogorov system を評した言葉である。彼は天才で，自身の確率を持って生まれてきた。従ってフォーマリズム（The Formalism）を一貫して受けつけなかった。例えば，i. i. d.（independently and identically distributed）である実確率変数列を想定すると，共有される分布の平均が存在するとしておいて，自然な算術平均の列を考えることができるであろう。A. N. Kolmogorov が示したように，この算術平均の列は確率 1 で分布の平均に収束する。この大数の強法則だが冷静に（つきはなして）視ると，「強法則が成立するような周辺分布を仮定すれば，強法則が従う」と読めないこともない。つまり，論点がある程度まで先取りされており，悪循環の気配がするのである。

コインの投げ上げ（Coin-tossing）とのかかわりで，BdF は i. i. d. と「未知固定」確率との結びつきの異様さを指摘し，今日の交換可能性の概念を導入して，有名な「de Finetti の表現定理」に到達している。

7. 統計量及び順序統計量

統計量の最も一般的な定義は「標本の関数」であろう。しかし，しばしばこの「関数」は Borel 可測とされる。Lebesgue 可測にしない理由を授業中に述べるべきであろう。

次に，順序統計量だが，略式に導入するだけではなく，統計量の定義どおりに「標本の関数」であることを明晰に示すべきである。なお筆者は，これをレポートの課題としたことがある。

8. 条件つき期待値

Joseph Leo Doob が導入した σ 集合体による条件づけが，martingale に関する議論などとともに広く行われている。Leo Breiman（1968）による明晰な議論がこの広がりに貢献したのであろう。なるほど確率論的な成功はおさめた。しかし，統計学的には問題がある。データ x に対して，P(X=x)=0 として，「X=x」という条件の下で，しばしば統計家は「この」世界に対峙しなければならない。だが，given「X=x」での一個の期待値ということは，Doob の流儀では意味をなさない。

似た問題が既に信頼区間で生じている。実際，信頼係数は，問題の変量を「実現値」で置き換えた後は，一個の「その」区間とは関わりようがない。その係数は無意味なのである。Lebesgue 積分の素養があった Jerzy Neyman も，このことは承知していて無意味を認めている。

筆者は数学科の学生であった頃，この「条件づけ」の問題を真剣に議論している書物の存在に気づいた。たしか筆者の頭文字は T であった。だが今となっては失念してしまった。読者の御教示を請いたい。なお non-Bayesian や anti-Bayesian であっても，統計家である限り，この「条件づけ」からは逃れられない。ただし，x が得られる「まえ」の自身の判断はどうであったかと思考することは，重要である。しかし，きわめて困難な作業となる。

9. 角谷静夫の拡張定理

角谷静夫（かくたに・しずお）による拡張定理はもっと言及されるべきである。略式に述べれば，任意無限個の確率空間（無限集合を添字集合とする確率空間の系）の直積測度が一意的に存在するという命題であり，ここで各確率空間は topological な仮定を前提とはしない純然たる測度空間である。実は John von Neumann が 1933 年頃に既に講義中に示しているのだが，

印刷されたのは，角谷が1943年でvon Neumannが1950年であった。周辺分布が直積である場合には，A. N. Kolmogorovの拡張定理を持ち出すのはおおげさな感じがする。なお，精確な議論は角谷静夫の論文集の測度論の所にある。但し，論文の表題に打たれている番号が32となっているが多分38が正しい。筆者はこの角谷の拡張定理を伊藤清三先生の授業で知った。先生は，Lebesgue積分及び確率論の基礎概念を，懇切丁寧に教えて下さった。筆者は実に幸運である。

10. 非正規性

測定誤差の場合でも非正規（つまりnon-Gaussian）となることは100年以上前から知られている。t分布が出てくる。t分布の密度曲線が自由度（但し正の実数）が無限大に近づくと正規密度が現れることは統計学の授業でおなじみだが，この収束が実数直線上で一様（あるいは広義一様）となることの証明を見たことがない。なお所謂自由度だが，他の分布の場合も含めて，正の整数に限定する必要はなく，正の実数とすべきである。

11. George Pólyaの指摘

読みはやはりポーヤであろう。Georgeは本来はGeorgか。但し，検索する際はポリヤやポリアも試す必要がある。「分布関数の収束先が連続な分布関数ならば，その収束は一様である」が，その指摘である。統計学の授業の際に，中心極限定理に触れたついでに，この「指摘」に言及すべきである。関数列の収束を論じる際に，収束がどの範囲で一様なのかはぜひとも言及しなければならない。

12. J. W. Lindebergの条件

英語読みすればリンドバーグであり，フィンランド（英Finland，独Finnland）の人である。1922年の独語の論文で著名なLindebergの条件を論じた。ただしこの「条件」は中心極限定理が成立するための十分条件である。必要性の方は，ある「明白な」仮定を追加したのちに，W. Fellerの独語論文で，13年後の1935年に示されている。この「明白な」仮定は，Lindebergの条件の「明白な」帰結である。より細かい説明はLoève（2017）を参照されたし。独立確率変数に関する中心極限定理に「とどめ」がさされた訳である。

13. 「証明」に「個」を導入すること

「個，Person」を「証明」に導入するとどうなるか。例えば，サヴェジ氏は「基礎論」の第2章第7節の末尾近くで，第1，第2，第3，公準から，統計的決定理論における許容可能性の原理が従うことを指摘している。逆に，許容可能性の原理から第3公準が（第1，第2も使うが）従う。所で，許容可能性の原理を導く際に数学的帰納法を用いる。もし「個」が，数学的帰納法の基礎づけに不信感を持った場合はどうなるか。少なくともこの「個」にとっては，この「同値」は，自明ではなくなる。なお筆者は，例えば園（2017）において，「個」がDedekind切断の原理を「知らなかった」場合はどうなるかについて議論しておいた。つまり，「知らずしてなす」こととなるのである。

14. von Neumann-Morgenstern

これはあまりにも有名な「ゲームの理論」の著作に関するある用心である。彼らは，第2版の付録において，期待効用に関する「公理論的な」議論を展開した。だが，肝心の「確率」を無定義とした。これでは様様な反論が起こって当然である。経済行動に期待効用を結びつけるには，どうしても「定義」をなさねばならない。しかしこれは難問である。それを解決した

のが Leonard Jimmie Savage の「基礎論」であった。サヴェジ氏は Bruno de Finetti の思索に刺激を受けて，個人的確率をフォーマリズム的に導入したのである。期待効用最大化の原理を基礎づけた人物がサヴェジ氏であることは決して失念してはなるまい。サヴェジ氏の業績を，P. A. Samuelson は landmark と評している。

15. 「基礎論」への用心

とにかく第 4 章を熟読することである。また，第 3 章第 7 節と第 5 章第 5 節とを読みこぼしてはならない。サヴェジ氏が自身に課した任務とは「確率の定義」である。また彼が対峙しているのは grand world（「この」世界）である。第 1 章は誤解を招きやすいので用心する必要がある。この序論のためにサヴェジ氏はいわば「損」をしている。

16. Γ 分布は重要である

筆者は授業中に必ず Γ 分布に言及している。指数分布，χ^2 分布，Erlang（アーラン）分布を特殊な場合として取り扱える。母数の取り方は，形状母数（shape parameter）及び尺度母数（scale parameter）を各 α 及び β としておき，Poisson の λ と $\beta=\lambda^{-1}$ で結びつけることとしている。時間が許せば，時間軸に沿って発生する Poisson 的事象と Γ 分布との関係に触れるべきである。

17. 便利な記法 E（・, ・）

これは例えば $E(|X|,|X|\geqq\varepsilon)$ などと使う。事象 A に対して $E(X,A)=\int_A XdP$ と定義するが，指示関数（indicator）I_A に対して $E(X,A)=E(I_AX)$ が示せる。筆者は，A 上の半期待値，partial expectation，とでも呼べばよいと思っている。とにかく便利である。

18. コインの投げ上げ

Coin-tossing である。未知固定確率 p が出てくるが，確率を定義せずに未知固定と断定するのは異様である。Bruno de Finetti は，今日交換可能性と呼ばれている性質に着目して，この p が現れる状況を分析した。但し彼は，自身の主観確率の立場から交換可能性を論じている。簡潔な説明が Loève（2017）にあるが，BdF の思索は無視されていて，結局定理の「なかみ」が抜け落ちている。むしろ，サヴェジ氏の「基礎論」の第 3 章第 7 節を読むほうが良いかもしれない。但し，サヴェジ氏は symmetric sequences という言葉を用いている。とにかく正体不明の p を突然持ち出すことは，学問上も教育上も良くない。なんのことかわからない学生がいても少しも不思議ではない。統計学的には，この場合の母数空間が何者の集まりなのか，「未知固定 p」では少しも明らかでない。やはり BdF の表現定理に言及すべきであろう。

19. 補遺 1ー学徒の本務ー

学徒の本務とは真理の探究である。この真理とは端的な事実である。例えば，円周率 π は超越数である，は真理である。有用性は真理探究の副産物である。筆者の関心事は確率だが，確率とは何か，それはどうあるべきか，は難問であり，いまだに議論が続いている。しかし，少なくとも経済行動に関する限りでは，Leonard Jimmie Savage が優れている。サヴェジ氏は，統計的決定理論の公理化を通じて，期待効用最大化の原理の基礎づけに成功した。まさに画期的な業績である。筆者は，このサヴェジ氏の作業を掘り下げ，思索を深めた。

Bruno de Finetti に刺激を受けたサヴェジ氏は，ついに Bayesian Statistics を強く支持するに至る。しかし筆者は別の道に至った。つまり，主観確率を深く掘り下げて行くと，その極限として，空間的には透視，時間的には予知が

浮上するとの予見を持つに至った。つまり，ふたしかの壁が崩れ去るのである。だが筆者は，この予見を追求する気がしない。時期尚早の感じがするからである。時空にはまだまだ謎が多い。

サヴェジ氏以外で強い影響を受けた数学者は Richard Dedekind である。彼の「数（すう）については」必読である。彼の深い思索は筆者の心をとらえた。尊敬と畏敬の念とを持たざるを得ない。彼の思索こそが，G. Peano による公理系の根底なのである。

「数学は道具である」という見解は昔からある。概念の海に溺れるよりは，クールに「道具である」と言い切ったほうが「安全」であろう。しかし用心が必要である。例えば，確率論は Lebesgue 積分論を道具として使う。だが，確率論自体を突き放して視れば，確率論は Lebesgue 積分論以外の何物でもないという雰囲気が出てくる。「道具」を使っているつもりが，実は「道具」に「使われている」かもしれない。例えば微分積分学などは，これを使いこなすには尋常でない努力が必要である。気楽に「道具」などと言えたものではない。

なお数学者の名前の表記だが，例えば Gauss の場合，記録上は Johann Carl Friedrich Gauss だが，冒頭の Johann は使われることがなかった。やはり C. F. Gauss であろう。また，Carl Louis Ferdinand von Lindemann だが通常は，Ferdinand von Lindemann のようである。筆者は，C. Lindemann とやってしまった苦い経験がある。なお von Neumann だが，彼は必ず von をつけており，例えば C. Neumann と区別するためにも von Neumann で良いのではないのか。Bruno de Finetti は自身の略称を BdF としており，やはり de Finetti（デ・フィネッティ）であろう。集合論において出会う Cantor-Bernstein の定理の Bernstein は Felix Bernstein である。

筆者は一貫してこの『経済学研究』に拙論を発表してきた。後学から豪傑の士が現れて，どうか筆者の骨を拾ってくれることを望む。

20. 補遺 2ー幾つかの私的話ー

儒仏の是非という言葉がある。小生はこの「仏」がどうも好きになれない。この島国の大乗である。伝統的な仏教を小乗と見下し「仏」以外を外道と差別する。唯我独尊は停滞と堕落への捷径ではないのか。大陸の「儒」は，朱子学の唯我独尊に陥り，守旧と停滞との内に堕落していった。本来の生命力を失ったのである。やはりライバルはいたほうが良い。

欧米の God に対応するのはやはり天であろう。天は全知無為である。この無為の二字は重い。仁の必須なる所以である。仁，重し。だが，徳を知るものはすくなし。「儒」の帰結が学歴主義だとすれば，あまりに悲惨である。

天才という言葉がある。文字通りに視れば，「生まれながらにして特定の領域に突出した能力を有する者」である。従って，Pierre-Simon Laplace も John von Neumann も当然天才である。「特定の領域」は落とせない。「異常な学習能力を持って生まれてくる者」は秀才である。もちろん，天才の方が秀才よりも優れているなどとは言えない。そんな区別はない。むしろ未解決の難問に挑むには，秀才（努力の鬼）の方が分があるような気がする。

「得」という言葉がある。「とく」は「徳」に通じる。渋沢栄一は絶えず「とく」を問題としたが，岩崎弥太郎は常に「利」を追求した。利と得とは厳しく異なる。両人が袂を分かつのも当然か。

「すじを通す」という言葉がある。実は，実家は逗子なのだが墓は葉山にある。新善光寺という御当地ではよく知られている寺である。法然さんの浄土宗である。母の実家は時宗で父の方は真宗であるが，小生の代で法然さんに復帰した。その際，南無阿弥陀仏という「すじ」はとおさせてもらった。小生に信仰心はないが，礼は守ることとした。なお，恩義ということがわからないタイプを，小生は好きになれない。

理学部数学科の出身なので当然「数学」を至

学だと信じている。物理や哲学や諸諸の立場から「数学」への文句が出されていることは充分承知している。しかし，数学は数学であり，数学以外のものではない。統計学は，政治，経済，法律といった領域に属するのだが，この数学でないものへの数学的接近に強い関心がある。数学は至学である。だが『論語』は別儀。

社会的な重要性からすれば，第一は民度，第二は統計，第三は経済であろう。特に民度は致命的に重要である。落とした財布がそのまま戻ってくる度数はどの程度かで民度が知れるかもしれない。この島国の民度はどのくらいか。基礎的諸統計がなければ正気の政治ができない。統計必須。経済が重要であることは言うまでもない。しかし，利と得とのけじめは覚悟すべきである。

2020 年 12 月 16 日（水）

謝辞

学術専門職の塚田久美子氏が今年度（2020 年度）までで定年退職となる。塚田氏には，実にいろいろと御助力を頂いた。特に『経済学研究』では小生の悪文と格闘して頂いた。ここに深く感謝の言葉を記させていただく。今後ともなにとぞ御助言を。

参考文献

Breiman, Leo. *Probability*, Addison-Wesley, 1968. SIAM より paper 版が出ている。

Dedekind, Julius Wilhelm Richard, デデキントあるいはデーデキント．『数（すう）について－連続性と数の本質－』，河野伊三郎 訳，岩波文庫，岩波，東京，1961 年。

de Finetti, Bruno. “Foresight: Its logical laws, its subjective sources”, 1937.

de Finetti, Bruno. “Probability: Beware of falsifications!”, 1977. BdF のこの二編は，*Studies in Subjective Probability*, Krieger, New York, 1980, に収められている。

Doob, Joseph Leo. *Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1953.

Dubins, Lester E., and Leonard Jimmie Savage. *Inequalities for Stochastic Processes*, Dover, New York, 1976. 初版は 1965 年に McGraw-Hill から出た *How to Gamble If You Must* である。Dover 版の前書きはサヴェジ氏への事実上の追悼文である。

Loève, Michel. *Probability Theory, 3rd Edition*, Dover, New York, 2017. これは 1963 年に Van Nostrand, Princeton, から出たものの再販である。初版は，Van Nostrand より 1955 年に出ている。一方，第 4 版が，1977 年から 1978 年にかけて，Springer, New York, より二巻本で出ている。この二巻本は GTM として出されているが，Dover は第 3 版を採ったのである。

Royden, Halsey Lawrence. *Real Analysis, 3rd Edition*, Prentice Hall, New Jersey, 1988. 初版は 1963 年。この第 10 章第 3 節の 224 頁から 225 頁にかけての主要命題と 228 頁問 20 とは必見である。

Savage, Leonard Jimmie. *The Foundations of Statistics, Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972. 初版は Wiley より 1954 年に出ている。必読の「基礎論」である。まだ学生であった筆者に，この冊子の存在を御教示下さった鈴木雪夫先生への謝意を記す。だが筆者は恩師とは別の地点に立つに至った。

Savage, Leonard Jimmie. *The Writings of Leonard Jimmie Savage*, The American Statistical Association, Washington, D. C., 1981. 必読の「論文集」である。

伊藤 清『確率論』，岩波基礎数学選書，岩波，東京，1991 年。

伊藤 清三『ルベーグ積分入門』，数学選書 4，裳華房，東京，1963 年。

園 信太郎『確率概念の近傍―ベイズ統計学の基礎をなす確率概念―』，内田老鶴圃，東京，2014 年。この冊子の付録 C を一瞥願いたし。

園 信太郎『サヴェジ・システム試論―統計的決定理論の公理化と期待効用の最大化―』，内田老鶴圃，東京，2017 年。第七公準 P7 の導入によって，St. Petersburg paradox がいかにして消去されるかを視て頂きたい。どこにも値 ∞ は出てこない。