HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2005年度　混沌系工学特論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2005-11-30T05:17:27Z
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/828
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learningobject
Note	とりあげた各トピックスに関する最新情報は著者のホームページを参照ください。
Note(URL)	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html; http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	konton2005_6.pdf (第6回講義ノート)

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

混沌系工学特論 配布資料 #6 (最終回)

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)
URL：http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j _inoue/
Mirror：http://www005.upp.so-net.ne.jp/j _inoue/

平成 17 年 11 月 28 日

目 次

5 ゲーム理論 **61**
5.1 マイノリティ・ゲーム 62
5.2 市場履歴をともなうマイノリティ・ゲーム 62
5.2.1 数理モデルによる定式化 62
5.2.2 各トレーダーの行動決定式 64
5.3 ボラティリティとその時間変化 65
5.3.1 総入札価格の時間変化 65
5.3.2 ボラティリティ — 総入札価格の揺らぎ — 66
5.4 ボラティリティの履歴数依存性 67

5 ゲーム理論

日常行われている株や貨幣などの商取引きに代表される「エージェント (トレーダー) のミクロな意思決定」における合理的判断とは何かを系統的に調べ, その判断がマクロに見てどのような結果を引き起こすのかを調べる学問分野は, 今日では**ゲーム理論**と呼ばれ, 従来の経済学 (ミクロ経済学) にとどまらず, 数学や社会学, 心理学や生物学など多くの学問間を横断する研究分野となっている. 本講義では時間の都合上, ゲーム理論のいくつかの典型的な問題とその性質, 基本的概念を細かく説明していく余裕がないので, ゲーム理論が対象とする様々なゲーム (システム) の中でも**マイノリティ・ゲーム**と呼ばれる**繰り返しゲーム**の一種に注目し, これをここでの中心的題材に据え, それを統計力学の観点から計算機実験により調べてみることにする. この繰り返しゲームという題材は今までみてきた確率的情報処理とは少し毛色が異なるように思えるが, 徐々に見て行くように, システムにおけるトレーダーの動きに [ノイズ] やある種の [ランダムネス] が介在し, そのような確率的要素がシステム全体の振る舞いに影響を与えるという意味において, 統計力学的な考え方が役立つ一例となっている.

5.1 マイノリティ・ゲーム

マイノリティ・ゲームとは **El-Farol bar の問題**を起源とするゲームの一種である．El-Farol bar とは米国サンタフェにあるバー (酒場) の名前で, 毎週週末に楽団による演奏会が行われる．そのとき, 店内が満員では客はなかなか演奏を楽しむことができないので, バーには出かけずに自宅で楽しむ方が良いと考える．一方, 店内が空いていればバーで演奏会を楽しむのが, ここでの好ましい選択となる．これは自分のとるべき行動の決定が他の人々の行動によって左右され (つまり「今晩は人気の楽団のコンサートが行われるので人出が多そうだから自宅でゆっくり過ごそう」だとか), 逆に自分の取った行動が他の人々にも影響されるという状況の典型例となっている．我々がここで考えるマイノリティ・ゲームではこれを単純化し

マイノリティ・ゲーム：
N(奇数) 人が「売り」「買い」のどちらかの判断を行って少数派のグループに属した者が勝つ．

と簡単に書くことができる．ここで人数が奇数なのは, 少数派の決定に対して都合が良いためにである (偶数だと少数派が決まらない場合もありうる)．もちろん, 我々がこれから具体的に「ゲーム」としてその数理を楽しんで行くためには, いくつかの取り決め, つまり, ここに書いた「判断」とはどのように行われるのか, 「勝ち」「負け」とはどのように定義されるのか等, 実際に数理モデル化する際に決めなくてはならない部分も多々あるが, ゲームの基本的内容はおおかたこの 1 行で表すことができる．統計物理からのモデルの提案としては Challet and Zhang (1997) が最初のものであるが, 彼らの導入した数理モデルには各トレーダーが意思決定に用いるであろう履歴の情報が含まれていない．

そこで, 以下で我々は各トレーダーの意思決定が過去の履歴に反映され, 決定されるような, より現実に近い数理モデルを導入する (Inoue and Coolen)．この数理モデルは母関数の経路積分表示による方法で解析的に議論することができるが, あまりにも煩雑な数式を用いることになるので, ここではそれを避け, その数理モデルで定義されるゲームのマクロな挙動を計算機を用いた簡単な数値シミュレーションで確かめてみた幾つかの結果を紹介したい．

5.2 市場履歴をともなうマイノリティ・ゲーム

ここからはいよいよ, 市場の履歴が各トレーダーの意思決定に反映するような繰り返しゲームとしてのマイノリティ・ゲームを導入する．問題設定とその定式化がやや複雑なので, いつも以上に各変数が何を意味しているのかに注意しながら読み進めて行くと良いであろう．

5.2.1 数理モデルによる定式化

先に 1 行の文章で定義した問題を式を用いて定義しておく．まず, 各トレーダー i：$(i = 1, \cdots, N)$ は各ゲーム・ラウンド l で自分の**入札価格**：$b_i(l) \in \Re$ を決める．ここでは入札価格 $b_i(l)$ は ± 1 の 2 値 ($+1$：「売り」, -1：「買い」) をとるものとして考えるが, この値を実数一般に拡張して考えても構わない．つまり, 「$b_i(l)$ が正のある値を取るならば, 繰り返しゲームのラウンド l でトレーダー i は商品を価格 b_i で売りたいと考えている」とするわけである．もちろん, 逆に入札価格 $b_i(l)$

が負であるならば,「繰り返しゲームのラウンド l でトレーダー i は商品を価格 b_i で買いたいと考えている」ということになる. どちらを採用するかは, もちろん, どのような取引きを問題にするのかにも依存するし, このシステムの何に着目し, どのような物理量を観測したいのかにもよる. このとき, 各トレーダーからなるシステム全体の入札価格の総和を

$$A(l) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} b_i(l) \tag{198}$$

と定義しよう. この $1/\sqrt{N}$ のファクターは $A(l)$ が $\mathcal{O}(1)$ の量となるために付けた.

さて, 各トレーダーはステップ l での自分の意思決定に際し, 過去の M ステップまで遡った次の情報ベクトル：

$$\boldsymbol{\lambda}(l, A, Z) \quad = \quad \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}[(1-\zeta)A(l-1) + \zeta Z(l,1)] \\ \mathrm{sgn}[(1-\zeta)A(l-2) + \zeta Z(l,2)] \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathrm{sgn}[(1-\zeta)A(l-M) + \zeta Z(l,M)] \end{pmatrix} \tag{199}$$

を用いる. ここで, $Z(l,x)$：$x = 1, \cdots, M$ はホワイト・ノイズであり

$$\langle Z(l,\lambda) Z(l^{'}, \lambda^{'}) \rangle \quad = \quad \delta_{l,l'} \delta_{\lambda,\lambda'} \tag{200}$$

が成り立つ. ここで, $\langle \cdots \rangle$ は Z の従う分布での平均を意味する. $\zeta = 1$ の場合には市場の履歴は実質的にノイズからの寄与だけしかなくなり, トレーダー達のとった行動をマクロに表す $A(l)$ の履歴情報： $A(l-1), A(l-2), \cdots, A(l-M)$ はトレーダー達には見えなくなっている. 一方, $\zeta = 0$ の場合にはノイズはゼロであるから, この情報ベクトルはトレーダー達のとった行動が $A(l-1), A(l-2), \cdots, A(l-M)$ を介して反映されることになる. ζ は $0 \leq \zeta \leq 1$ の値をとるのだが, この値が 1 に近ければ, トレーダー達にとって利用可能な市場の情報はノイズに埋まってしまうことになる.

さて, 例えば $\zeta = 0$ の場合, 過去の $1, \cdots, M$ 全てのラウンドにおいてシステムの総入札価格が正の値をとるのであれば, トレーダーの多数派はその商品を「売りたい」と思っているわけであり, 現在のラウンド l においてトレーダー達が共通に用いる情報ベクトルは全ての成分が 1 であるベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l, A, Z) = (1, 1, \cdots, 1)$ となる. 可能な $\boldsymbol{\lambda}(l, A, Z)$ の組み合わせは各成分が ± 1 の 2 値であるから $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^M$ 個あり, 各トレーダーは各ラウンドでこの中から一つ選択される情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l, A, Z)$ を参照し, 自分の決定に役立てる. ところで, 各トレーダーはどのように自分の行動を決定するのであろうか？

そのために, ここでは各ゲーム・ラウンド l においてトレーダー i 毎に定義される S 次元の戦略ベクトル $\boldsymbol{R}^i_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} = (R^1_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)}, \cdots, R^S_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)})$ を考える. これは各トレーダー毎に可能な情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l, A, Z)$ の数 $P = 2^M$ 個だけ持っており, ベクトルの各成分は ± 1 をとり[1]

, ゲームの開始前に与えられ, ゲームを通して固定された一定値をとるものとする. 従って, このベクトルを可能な情報ベクトルの個数だけ縦に並べたものは $S \times 2^M$ のサイズの行列となり, **ルックアップ・テーブル**と呼ぶことにする.

以下では簡単のため, $S = 2$, すなわち, 各トレーダーは $a = 1$ あるいは $a = 2$ の 2 つの戦略のうちの一つを各ラウンド l で選択し, 自分の行動を決定するような状況を考えよう.

[1] ここで考えている 2 値入札価格モデル $b_i(l) = \pm 1$ では, この成分の値 $R^a_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} = \pm 1$ はそれぞれトレーダーが「売る」か「買う」かに対応する. 従って, ルックアップ・テーブルは「どのラウンド l で, どの情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l, A, Z)$ が選ばれたときに, どちらの選択をするべきか」という「戦略表」を意味することになる.

5.2.2　各トレーダーの行動決定式

各トレーダーは各ゲームのラウンド (ステップ) l で次の方程式に従って, 戦略 $a(=1,2)$ を選択した場合の**利得**：$p_{ia}(l)$ を更新する.

$$p_{ia}(l+1) \quad = \quad p_{ia}(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} b_i(l) A(l), \quad b_i(l) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i\tilde{a}_i(l)} \tag{201}$$

ここで, $\delta(x,y)$ はクロネッカ・デルタであり, $\tilde{\eta}$ は更新のウエートで, ここでは $\tilde{\eta}=1$ として話を進めることにする. $\tilde{a}$ は次で与えられる**最適戦略**である.

$$\tilde{a}_i(l) \quad = \quad \underset{a}{\mathrm{argmax}}[p_{ia}(l)] \tag{202}$$

$b_i(l)$ の値は各ラウンド l で選ばれた情報ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)$ に対し, 自分の所有するルックアップ・テーブルの中の該当戦略 $R_{\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)}^{i\tilde{a}_i(l)} \in \pm 1$ の値に相当する. 従って, この更新式は各ラウンドで自分の入札価格の符号 (つまり, 「売る」か「買う」か) と総入札価格 $A(l)$ が逆符号になるとき (つまり, 自分が少数派の選択を行った場合), その戦略に対して得られる利得 p_{ia} を増加させるという意味を持っている[2]. これは各トレーダーにとって合理的な行動と言えるであろう.

このときの最適戦略とは, (201) で各ラウンドで自分の各戦略 (ここでは $a=1,2$) に対する利得が決まった際, その利得を最大とするような (今の 2 戦略系の場合には「最大とする方の」) 戦略が選ばれるということである. 従って, 各トレーダー i は各ステップ l で**更新式 (201) に従って, 自分の入札価格 $b_i(l)$ と多数派の判定 $A(l)$ が逆になるように, 自らの持つ各戦略 a に対する利得 p_{ia} を定め, これらを最大にするような最適戦略を (202) 式に従って決める, という一連の行動をとって行く**ことになる.

さて, いま我々は 2 つの戦略が選択できる場合を考えているわけであるから, 具体的には次の 2 本の方程式で $a=1,2$ それぞれの戦略の利得を決めて行くことになる.

$$p_{i1}(l+1) \quad = \quad p_{i1}(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} \left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i1} \right) A(l) \tag{203}$$

$$p_{i2}(l+1) \quad = \quad p_{i2}(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} \left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i2} \right) A(l) \tag{204}$$

そこで

$$q_i(l) \quad = \quad \frac{1}{2}(p_{i1}(l) - p_{i2}(l)) \tag{205}$$

で 2 つの戦略間の利得の差 $q_i(l)$ を定義し,

$$\xi_{\boldsymbol{\lambda}}^i \quad = \quad \frac{1}{2}(R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i1} - R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i2}) \tag{206}$$

とおくと, (203)(204) 式を辺々引くことにより

$$q_i(l+1) \quad = \quad q_i(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} \xi_{\boldsymbol{\lambda}}^i A(l) \tag{207}$$

[2] 先に「入札価格」という言葉を用いて各トレーダーの提示する判断 (価格)：$b_i(l)$ を導入したが, 通常の「オークション」では各トレーダーからの入札価格を参照し, 最も高い値で「買い」を出したトレーダーがその商品を「落札」する. 従って, そこでの勝者は最終的に落札したトレーダーであって, ここで考えている勝者であるところの「少数派」とは異なる. しかし, 我々がここで調べようとしている「総入札価格：$A(l)$」あるいはそれの「揺らぎ (ボラティリティ)」に注目する限りは勝者を一人選び出す必要はなく, その意味でこのマイノリティ・ゲームはオークションの一面をも合わせ持った数理モデルであると言うこともできる.

と $q_i(l)$ に関する更新式に書き直すことができる．この方程式 (207) をこのシステムを記述するための基本方程式の一つとしよう．

さて, 式 (207) は入札価格の総和 $A(l)$ を含むので, 我々は次にこれに関する更新式を求めることにする．まず, その定義より

$$A(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} b_i(l) = \sum_i \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i\tilde{a}_i(l)} \tag{208}$$

であるから, 次で定義される新しい変数 $w_{\boldsymbol{\lambda}}^i$：

$$w_{\boldsymbol{\lambda}}^i = \frac{1}{2}(R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i1} + R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i2}) \tag{209}$$

を導入すると

$$R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i\tilde{a}(l)} = w_{\boldsymbol{\lambda}}^i + \mathrm{sgn}[q_i(l)]\xi_{\boldsymbol{\lambda}}^i \tag{210}$$

が成り立つことに注意しょう．実際, $q_i(l) > 0$, つまり, $p_{i1}(l) > p_{i2}(l)$ で戦略 1 が選ばれるならば, 式 (210) より, $R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i\tilde{a}(l)} = R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i1}$ となるし, 逆に, $q_i(l) < 0$, つまり, $p_{i2}(l) > p_{i1}(l)$ で戦略 2 が選ばれるならば, 式 (210) より, $R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i\tilde{a}(l)} = R_{\boldsymbol{\lambda}}^{i2}$ でつじつまが合っている．従って, 入札価格の総和 $A(l)$ に関する方程式は

$$A(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}(l,A,Z)} \left\{ w_{\boldsymbol{\lambda}}^i + \mathrm{sgn}[q_i(l)]\xi_{\boldsymbol{\lambda}}^i \right\} \tag{211}$$

となる．従って, 我々がここで調べている市場履歴をともなったマイノリティ・ゲームのシステムは式 (207)(211) でミクロに記述されることになる．

5.3 ボラティリティとその時間変化

我々はシステムの時間変化を式 (207)(211) から知ることになるが, どのような物理量に着目したら良いのであろうか？

$q_i(l)$, あるいはその符号を取った $\mathrm{sgn}[q_i(l)]$ はトレーダー i が時刻 l に $a = 1, 2$ どちらの戦略をとったかという情報であるから, この値そのもので言えば, $(1, -1, 1, -1, -1, \cdots, -1, \cdots)$, あるいは, この時間変化を各トレーダーの採用した戦略の時系列パターンに直した $(1, 2, 1, 2, 2, \cdots, 2, \cdots)$ 等を表している．しかし, これはミクロな量であって, ある特定のトレーダーの挙動にのみ着目しても, システム全体のマクロな振る舞いは当然わからない．そこで, この講義で度々見てきた統計力学的な考え方 — ミクロな構成要素の挙動にはふれないで, マクロに定義される量の変化を追う — に立ち返って, まずは各エージェントからの入札価格の総和 $A(l)$ に着目し, これを有限のサイズの系 (ここでは $N = 1001$ とする) に対し, (207)(211) を計算機上でシミュレートすることにより調べてみよう．

5.3.1 総入札価格の時間変化

まずはそのダイナミックスが (211) 及び (207) で記述される総入札価格の時間変化を調べよう．このとき, この $A(l)$ の値が連続する 2 つの時刻間 $A(l)$,$A(l+1)$ でどのような分布をするのかをそれぞれ縦軸横軸に重ね打ちして調べてみよう．結果を図 38 に示す．この図より, 遡った市場の履歴

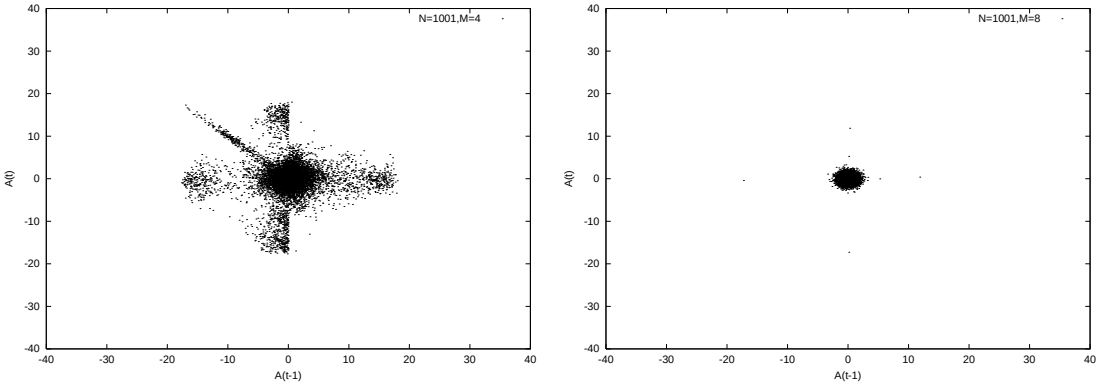

図 38: 総入札価格の連続する 2 ラウンド間隔の値 $A(l)$ と $A(l+1)$ のプロット．左は $M=4(P=2^4=16)$, 右が $M=8(P=2^8=256)$. $\zeta=0$ の real memory の場合．システムサイズは $N=1001$.

数 M が比較的小さい場合 ($M=4$) には, この図 38 の左図より, $A(l)$-$A(l+1)$ のプロットはかなり広範囲に分散したものになる．一方, 用いることのできる履歴数 M が多くなり, $M=8$ となるとこの広がりは小さくなっている (右図参照). 従って, 明らかに入札価格 $A(l)$ のばらつきはトレーダーの用いることのできる履歴数 M に依存する.

5.3.2　ボラティリティ — 総入札価格の揺らぎ —

図 38 の結果から, 我々が着目すべきなのは総入札価格それ自体の時間変化ではなく, その「揺らぎ」であることがわかった．つまり, 我々は次の量：

$$\sigma^2(L) \quad = \quad \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{l} A(l)^2 - \left\{\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} A(l)\right\}^2 \tag{212}$$

で総入札価格の「揺らぎ」を定義し, これをラウンド L まで累積した量とし, L の関数として調べてみようというわけである．この量 σ^2 を経済学 (金融工学) では**ボラティリティ**と呼んでいる[3]．このボラティリティはここで示したような, ある金融商品の不安定性を示す量であり, ボラティリティが大きい商品に対して各トレーダーは大きく勝つ場合もあるけれども, 何しろ価格の揺らぎが大きいので, ひどく負けるケースもかなりの頻度で現れ, 商品の取引き自体がギャンブル的要素を持つようになる．図 39 にボラティリティの時間変化を示した．左は real memory ($\zeta=0$) の場合で右が fake memory ($\zeta=1$) の場合に対応する．それぞれ $M=4(P=2^4=16)$, 及び, $M=8(P=2^8=256)$ に対してプロットしてあるのだが, 明らかに遡る履歴数が大きい場合の方がボラティリティは小さい．この傾向は不思議なことに, real memory でも fake memory でも変わらない．ちなみに, 同じ M の値で異なる線は異なる情報ベクトル, 初期値などの「データ」に対応している．従って, 遡る履歴数が少ない場合にはデータによるばらつきも大きい．ところで, 履歴を過去まで遡って利用すればするほどボラティリティを小さく押さえることができるであろうか？

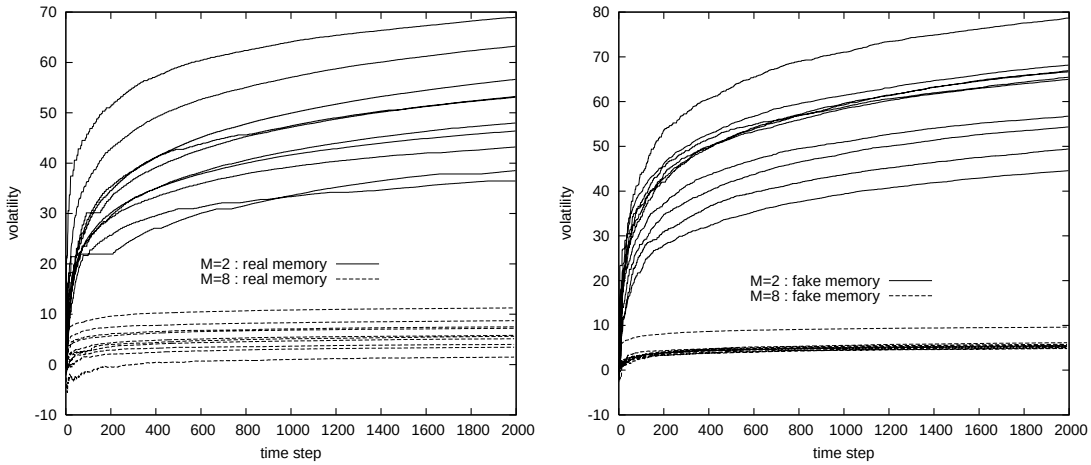

図 39: ボラティリティの時間変化. 左は real memory ($\zeta = 0$) の場合で右が fake memory ($\zeta = 1$) の場合. $M = 4(P = 2^4 = 16)$, 及び, $M = 8(P = 2^8 = 256)$ に対してプロットしてある. 異なる線は異なる情報ベクトル, 初期値に対応している. システムサイズは $N = 1001$.

5.4 ボラティリティの履歴数依存性

図 40 に real memory の場合のボラティリティ：

$$\sigma^2 = \lim_{L\to\infty} \sigma^2(L) \tag{213}$$

の履歴数 M 依存性をプロットした. この図より, ボラティリティを最小化するような最適な履歴数 M が存在することがわかる. また, 意外なことに, この依存性は real memory でも fake memory でも変わらない.

以上で履歴をともなったマイノリティ・ゲームに関し, 計算機シミュレーションによりわかってきているごく一部を紹介した. 計算機シミュレーションは有限サイズのシステム (これらの実験ではいずれも $N = 1001$ 程度) を扱うため, 各種の統計誤差は考慮しなければならないが, ここに示した結果はこれらの方向で市場の履歴が入札価格の安定性に及ぼす影響を調べるための有益な指針を与えるものと考えられる.

[3] 通常, ボラティリティσ^2 とは $\sigma^2(L)$ でラウンド数 L を無限大にした極限で定義される. しかし, ここではこの量が定常状態へ向かうプロセスにも興味があるので, $\sigma^2(L)$ と σ^2 をともにボラティリティと呼ぶことにする.

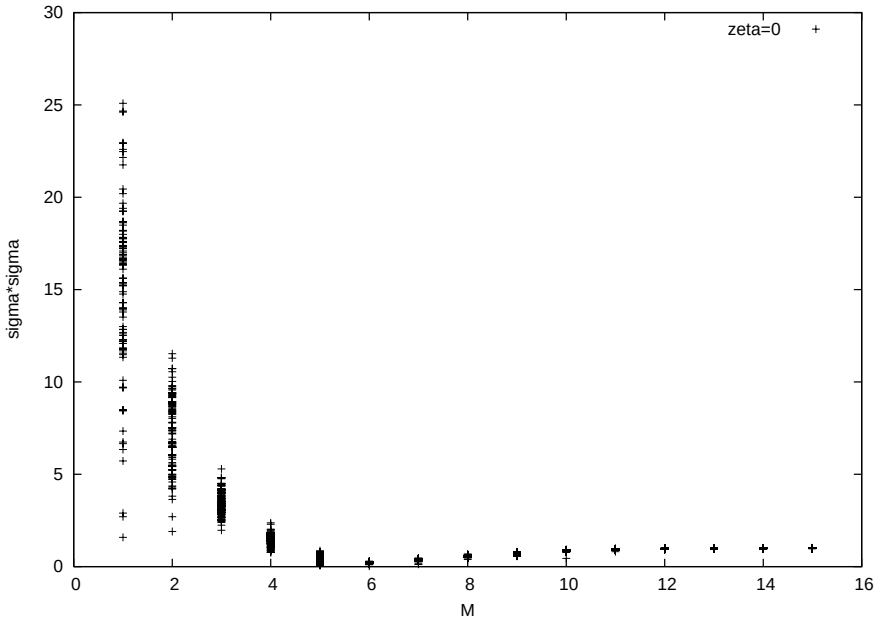

図 40: ボラティリティの履歴数 M 依存性. real memory ($\zeta = 0$) の場合.

最後に 3 番目の**問題**を出しておく. 当講義の単位を必要とするものは既に出題されている**問題 1**, **問題 2** と以下の**問題 3** を含めた 3 題の中から 1 題以上を選び, レポートにて提出すること.

問題 3 :
各自が現在取り組んでいる研究における「システム」(実験系の場合には広義に実験対象, あるいは機材も含めた系と考えてよい) にはどのような確率的要素が含まれているのかを考え, そうした確率的要素がネガティブに働く場合, それをうまく回避・制御するためにどのようなことを行っているか述べよ. また, ポジティブに確率を用いることことは可能か ? 可能であるならばどのようなことができるか (できそうか) を説明せよ.

※ レポート締め切りは 2006 年 1 月末日まで. 提出先は情報科学研究科棟 8-13 のポスト.