HOKKAIDO UNIVERSITY

| | |
|---|---|
| Title | 2005年度　混沌系工学特論講義ノート |
| Author(s) | 井上, 純一 |
| Issue Date | 2005-11-30T05:17:27Z |
| Doc URL | http://hdl.handle.net/2115/828 |
| Rights(URL) | http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/ |
| Type | learningobject |
| Note | とりあげた各トピックスに関する最新情報は著者のホームページを参照ください。 |
| Note(URL) | http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html; http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/ |
| Additional Information | There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL. |
| File Information | konton05_slide2.pdf (第2回講義スライド) |

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

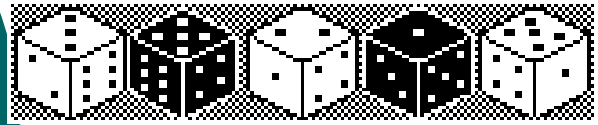
# 混沌系工学特論 #2

情報科学研究科　井上純一

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

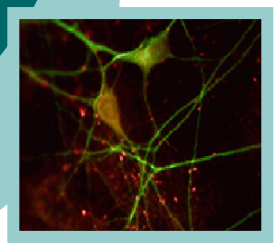
平成17年10月24日　第2回講義

# 確率を用いた柔らかな情報処理

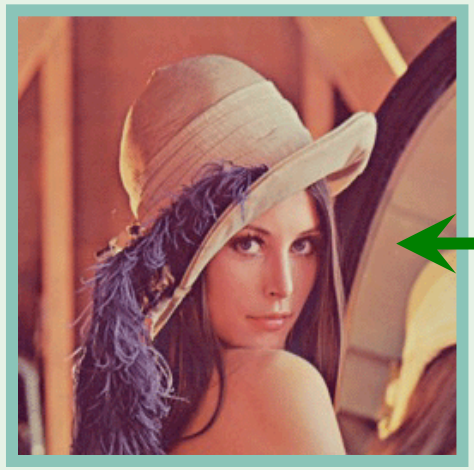


http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

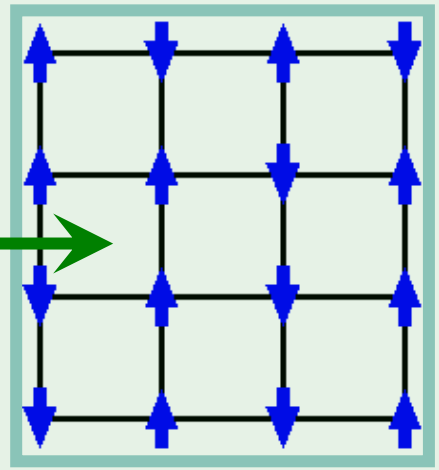
統計力学の方法に基づくアルゴリズムの構築と性能評価



単位：神経細胞
ネットワーク：脳



単位：画素
ネットワーク：デジタル画像



単位：スピン
ネットワーク：磁石

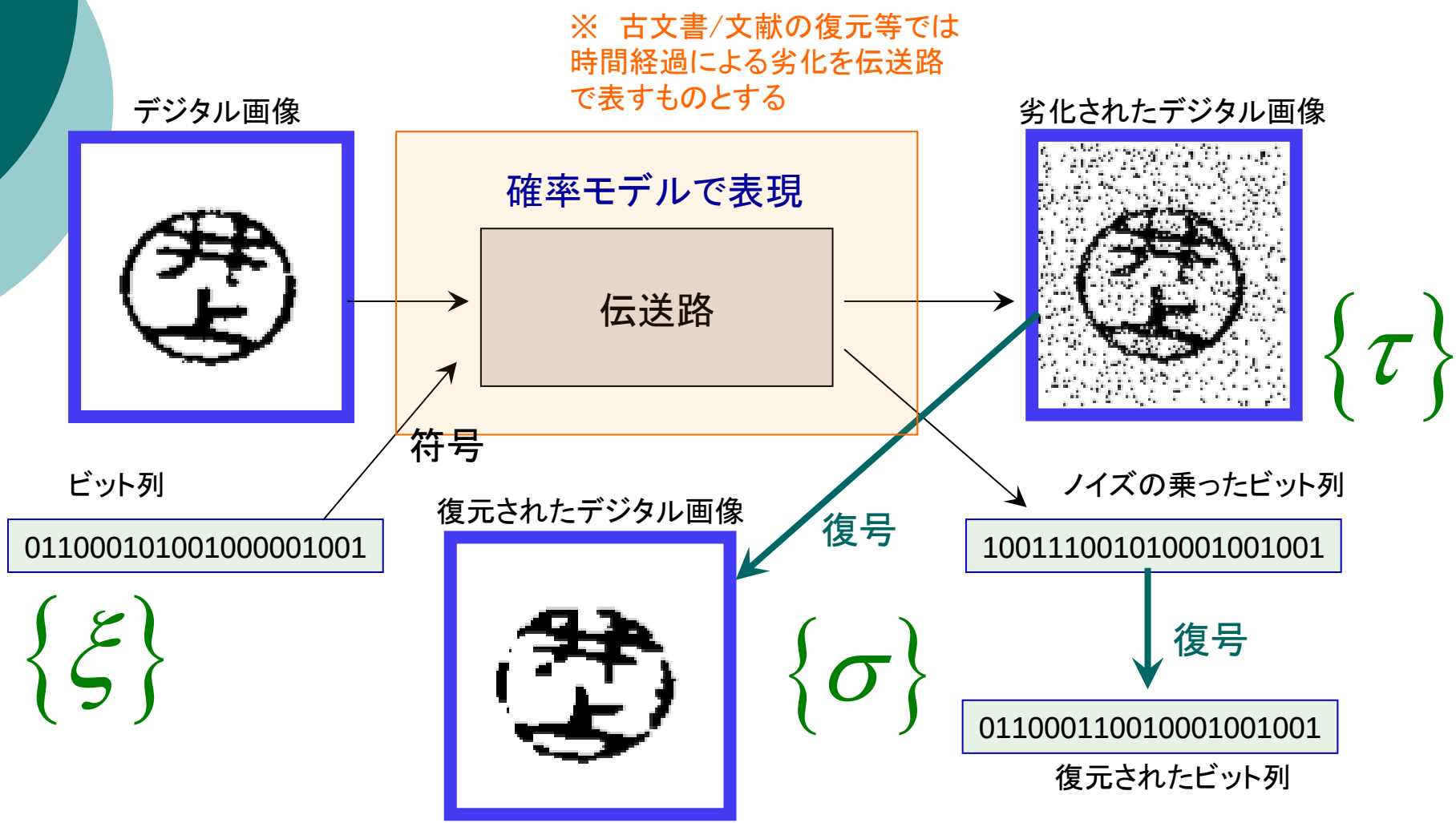
確率的にふるまう要素がネットワークをなして全体が情報処理系を形成している

今回、次回はこの関係に着目していく

そのような題材としては・・・

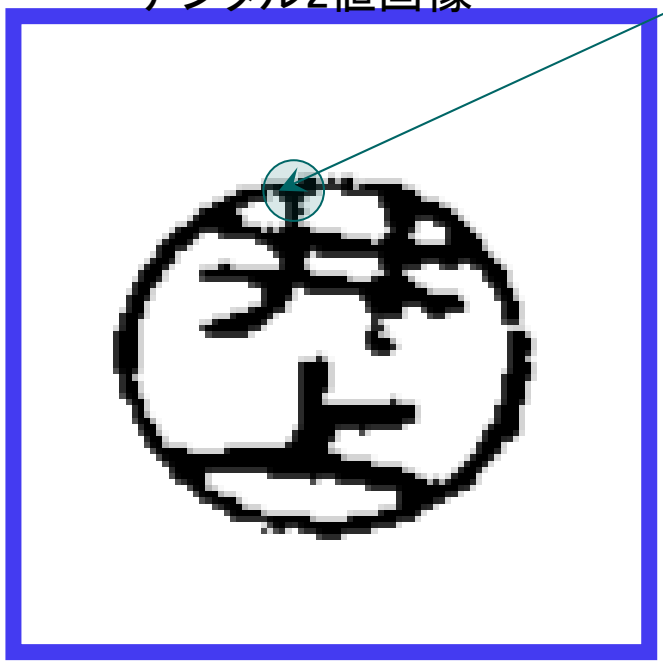
ニューラルネット（連想記憶、学習）、画像修復 / 誤り訂正符号、最適化問題、スペクトル拡散通信、ゲーム理論、植物ネットワーク、etc….

# デジタルデータの転送と復元



# デジタル画像の情報表現

デジタル2値画像



0001
0101
1110

白→0
黒→1
として各画像を符号

テキストファイル（inoue.pbm）の中身

P1 ← 2値画像のタグ

200 200 ← 画像のサイズ（200×200）

11111111010010101
11111111111111111
10101001111111111
・・・・・・・・・・・・・・・
・・・・・・・・・・・・

画像データ本体

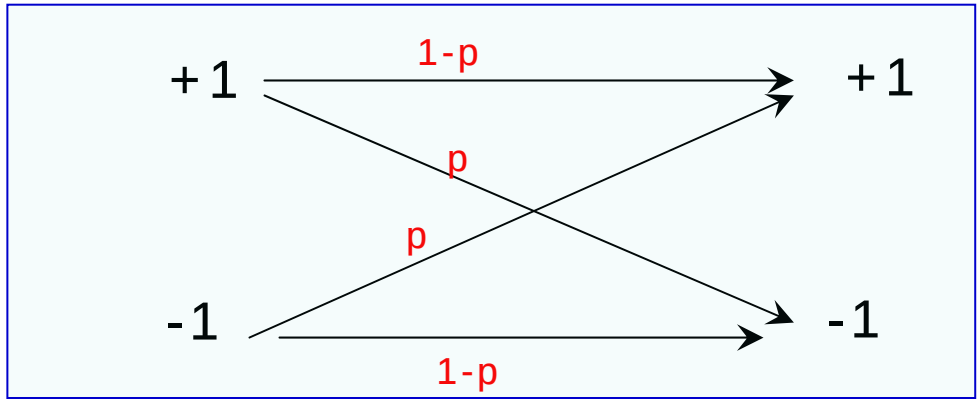
変換

$$\xi_i \rightarrow 2\xi_i - 1$$

により、白→－1、黒→＋1で表現する

**画像の「小磁石」による表現**

# 劣化過程の確率モデル化




2元対称通信路のグラフ表現

条件つき確率表現

$$P(\{\tau\}\,|\,\{\xi\}) = P(\underbrace{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_N}_{\text{劣化されたピクセル列}}\,|\,\underbrace{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N}_{\text{原画像のピクセル列}})$$

各ピクセルの劣化過程が独立ならば

$$P(\{\tau\}\,|\,\{\xi\}) = \prod_i \frac{\exp(\beta_\tau \tau_i \xi_i)}{2\cosh(\beta_\tau)}$$

劣化過程の確率モデル

2元対称通信路の
条件つき確率表現

$$P(\tau_i = \xi_i \,|\, \xi_i) = \mathrm{e}^{\beta_\tau} / 2\cosh(\beta_\tau) = 1 - p$$

$$P(\tau_i = -\xi_i \,|\, \xi_i) = \mathrm{e}^{-\beta_\tau} / 2\cosh(\beta_\tau) = p$$

$$\beta_\tau = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-p}{p}\right)$$

# ベイズの公式と事後確率

尤度（ゆうど）

事前確率分布

事後確率分布

$$P(\{\sigma\}|\{\tau\}) = \frac{P(\{\tau\}|\{\sigma\})P(\{\sigma\})}{\sum_{\{\sigma\}} P(\{\tau\}|\{\sigma\})P(\{\sigma\})}$$

原画像のピクセル列
の推定値

ベイズの公式

尤度は劣化過程の確率モデル

2元対称通信路であることが既知ならば

未知な変数を含む

$$P(\{\tau\}|\{\sigma\}) = \prod_i \frac{\exp(h\ \tau_i\sigma_i)}{2\cosh(h)}$$

事前分布の選び方は全く任意である → 画像データの特徴を生かして
適切に選択する必要がある

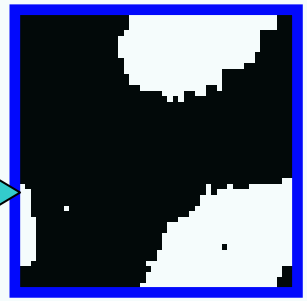
# 画像データの事前分布と事後確率

強磁性体
の確率モデル

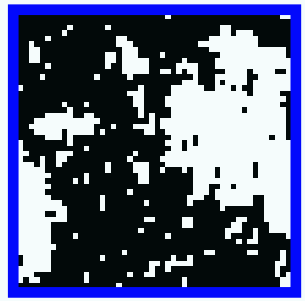
$$P\left(\{\sigma\}\right)=\frac{\exp\left(J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j\right)}{\sum_{\sigma}\exp\left(J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j\right)}$$

スナップショット

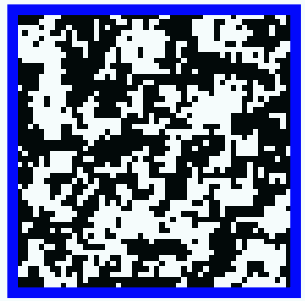
T=1/J=1.15



T=1/J=2.15



T=1/J=3.15



※ どの温度のスナップショット
の張り合わせで表現するか？
⇒ どのように J を決めるか？
（この方法は後に説明する）

ベイズの公式から求まる事後確率

$$P\left(\{\sigma\}\,|\,\{\tau\}\right)=\frac{\exp(-H_{\mathrm{eff}})}{\sum_{\{\sigma\}}\exp\left(-H_{\mathrm{eff}}\right)},\quad H_{\mathrm{eff}}=-J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j-h\sum_i\tau_i\sigma_i$$

画像復元問題のエネルギー関数

# ノイズを利用したアルゴリズム

前回の復習

$$E = -Js_1s_2 - h_1s_1 - h_2s_2$$

ノイズを利用したアルゴリズム

(1) 各時刻で任意に $s_1, s_2$ の1つを選び、その符号を変える。

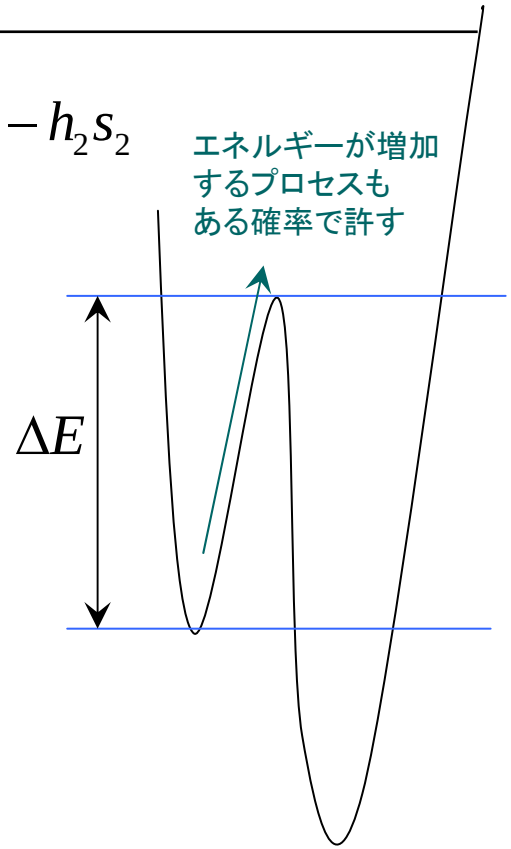
この前後の状態を $\vec{s}, \vec{s}'$ と書く。

(2) (1)の前後でのエネルギー差：$\Delta E = E(\vec{s}') - E(\vec{s})$ を計算し、

$\Delta E < 0$ ならば新しい状態を採用

$\Delta E > 0$ でも確率 $e^{-\Delta E/T}$ で新しい状態を採用

(3) (1)(2)を繰り返す




$P(s_1, s_2)$ の時間発展を調べてみる

⇒ 定常状態が存在するか？存在するならどのような分布か？

# スナップショットの作り方

## マルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC法）

$$E = -J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j$$

**ノイズを利用したアルゴリズムの多変数版**

(1) 各時刻で任意に $\sigma_i$ を1つを選び、その符号を変える。

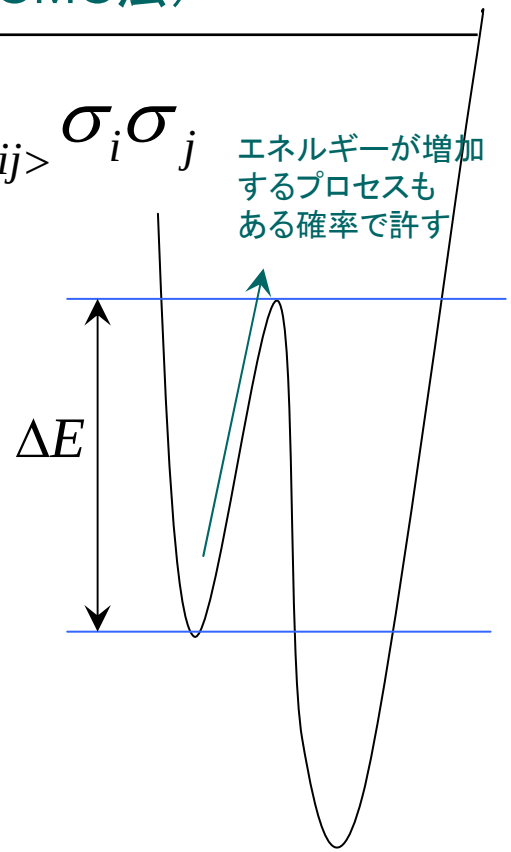
この前後の状態を $\vec{\sigma}, \vec{\sigma}'$ と書く。

(2) (1)の前後でのエネルギー差 $\Delta E = E(\vec{\sigma}') - E(\vec{\sigma})$ を計算し、

$\Delta E < 0$ ならば新しい状態を採用

$\Delta E > 0$ でも確率 $e^{-\Delta E/T}$ で新しい状態を採用

(3) (1)(2)を繰り返す

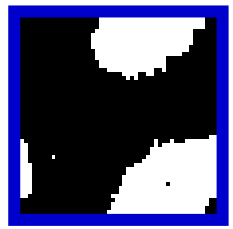



$P(\{\sigma\})$ の時間発展を調べてみる

平衡状態では

$$P(\{\sigma\}) = \frac{\exp\left(J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j\right)}{\sum_{\sigma}\exp\left(J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j\right)}$$

1/J=1.15



# 最大事後確率推定

事後確率

$$P(\{\sigma\}|\{\tau\}) = \frac{\exp(-H_{\mathrm{eff}})}{\sum_{\{\sigma\}}\exp(-H_{\mathrm{eff}})},$$

エネルギー関数

$$H_{\mathrm{eff}} = -J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j - h\sum_i \tau_i\sigma_i$$

事後確率最大 ⟷ エネルギー関数最小
⇒ シミュレーテッド・アニーリングで最適化

画像復元が最適化問題として定式化される

このパラメータTを温度としたアニーリング

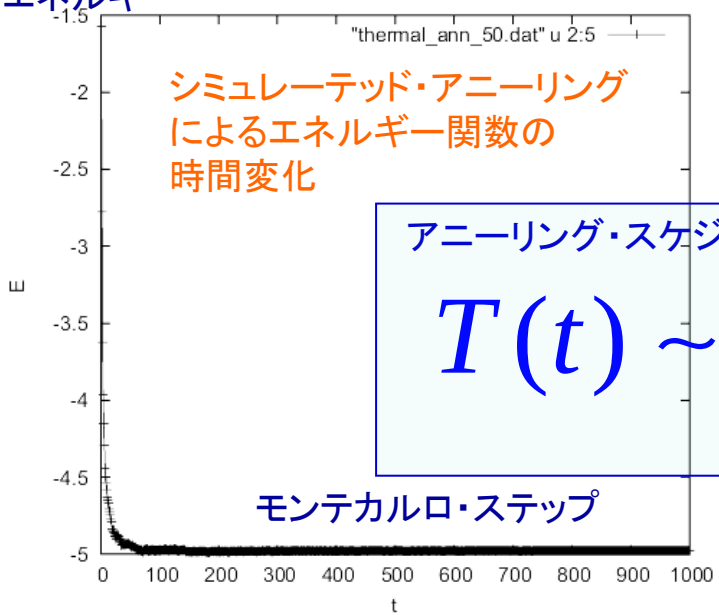
劣化画像データは与えられている

$$P(\{\sigma\}) = \frac{\exp\left(T^{-1}\left\{J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j + h\sum_i \tau_i\sigma_i\right\}\right)}{\sum_{\sigma}\exp\left(T^{-1}\left\{J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j + h\sum_i \tau_i\sigma_i\right\}\right)}$$

※ J および h の決め方は次回。今回は既知とする

# アニーリング法による画像復元の実例

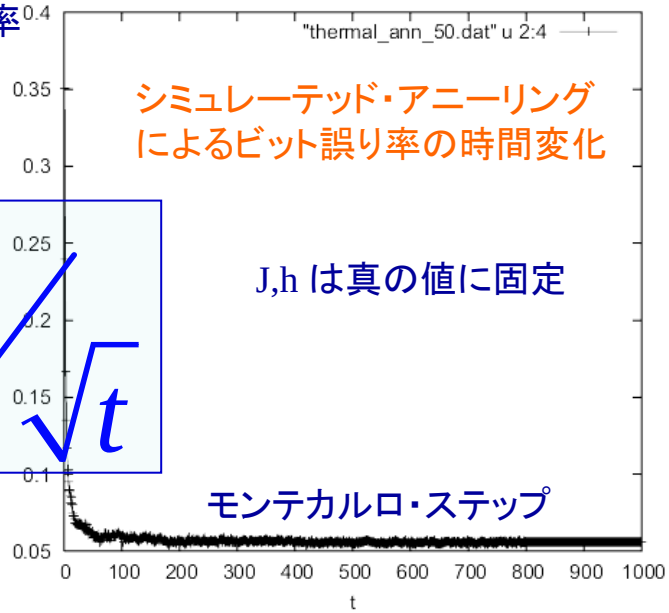
エネルギー




シミュレーテッド・アニーリングによるエネルギー関数の時間変化

モンテカルロ・ステップ

誤り率



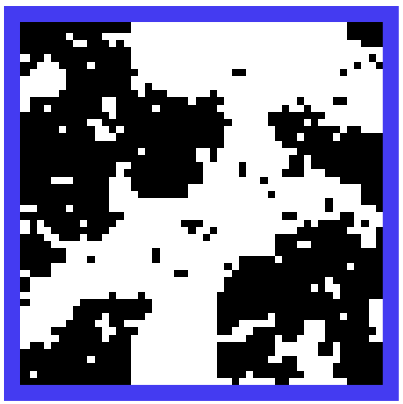

シミュレーテッド・アニーリングによるビット誤り率の時間変化

モンテカルロ・ステップ

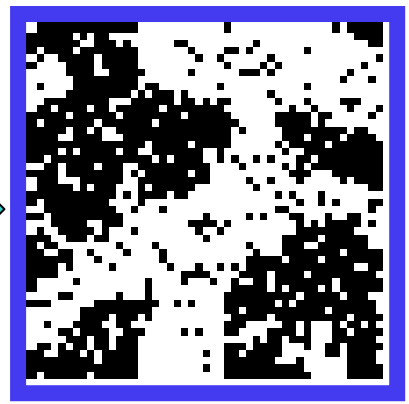
アニーリング・スケジュール

$$T(t) \sim 3/\sqrt{t}$$

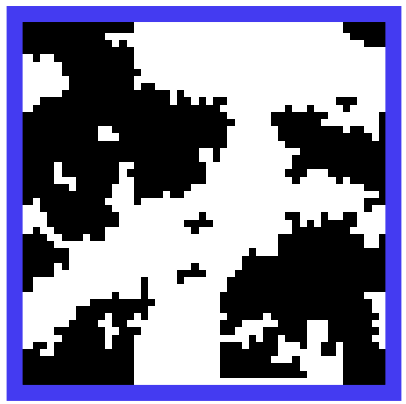
J,h は真の値に固定



原画像



劣化画像

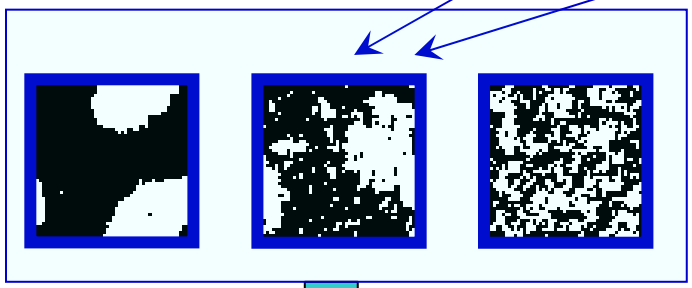


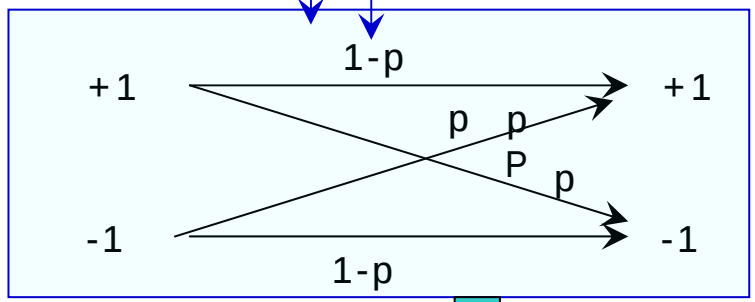
復元画像

# 確率モデルのパラメータ推定

事後確率は次のように書けるが・・・

$$P(\{\sigma\}) = \frac{\exp\left(T^{-1}\left\{J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j + h\sum_i \tau_i\sigma_i\right\}\right)}{\sum_\sigma \exp\left(T^{-1}\left\{J\sum_{<ij>}\sigma_i\sigma_j + h\sum_i \tau_i\sigma_i\right\}\right)}$$






どの J で指定されるスナップショットの張り合わせで画像を表現するのか

劣化率 h がどのくらいなのか

この決め方は
次回説明する

未知

未知

用いることのできるのは劣化画像についての情報のみ