



Title	(No.88-1193B)ヴォロノイ分割を用いた有限体積法による流れ場計算手法の構成
Author(s)	谷口, 伸行; 荒川, 忠一; 小林, 敏雄
Citation	日本機械学会論文集 B編, 55(513), 1324-1328 https://doi.org/10.1299/kikaib.55.1324
Issue Date	1989-05-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/83417
Type	article
File Information	B55_1324.pdf



[Instructions for use](#)

ヴォロノイ分割を用いた有限体積法による 流れ場計算手法の構成*

谷口伸行^{*1}, 荒川忠一^{*2}, 小林敏雄^{*3}

Construction of a Flow-Simulating Method with Finite Volume Based on Voronoi Diagrams

Nobuyuki TANIGUCHI, Chuichi ARAKAWA, and Toshio KOBAYASHI

In flow simulations with the finite different method or the finite volume method, it is a serious limitations that the calculating points must be ordered on the co-ordinates. Using the Voronoi diagrams for the cell division of the finite volume method creates a new discretization form which permits the arbitrary distribution of the points. This paper constructs a new method for the flow simulations by Voronoi diagrams, and shows calculation results of the two-dimensional flows.

Key Words: Numerical Analysis, Flow Simulations, Finite Volume Method, Voronoi Diagrams, Unstructural Grid

1. 概 要

比較的複雑な流れ場の数値計算においては、境界条件の表現法と計算時間が問題となることが多い。前者は計算点の配置に対する自由度を増すことにより改善される。後者については主に離散方程式を解くための行列計算の速度に依存しており、ここでは並列計算機を有効に利用できることも重要である。

流れ場の数値計算手法として、差分法は離散方程式を効率のよい反復法で解くことができるため計算時間の点に優れる。また、乱流モデルなどの物理モデルを導入する場合に、離散方程式が簡明であることも利点としてあげられる。しかし、計算点の配置が座標系に依存することは大きな欠点である。一般座標系の導入はこの欠点のある程度改善するが、格子生成法に対する過大な負担という問題を生じる。また比較的単純な形状に対しても、計算点の配置を適切に定めることが著しく困難である場合が少なくない。

本論文で提案する計算法では、計算領域の離散化にヴォロノイ図を用いることにより計算点を座標系によらず任意の位置に置くことができる。ヴォロノイ図は計算幾何学の概念で、空間内に置かれた離散点の勢力圏を表す領域分割図である。離散化法には有限体積法を、アルゴリズムにはSIMPLEを適用する。離散化行列の解法には差分法で用いられるものと同様の点反復法を適用することができ、最も計算時間を要する反復計算の部分では十分なベクトル化が可能である。

本論文ではこの計算法の概要を述べ、二次元層流における計算例を示す。

2. 離散化の方法

2.1 セル分割 有限体積法では計算領域を有限個の小領域(セル)に分割し、このセルにおいて物理量 ϕ の輸送方程式を体積積分した式、

$$\int_{V_{v01}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{n} + \int_{V_{v01}} B dV \dots \dots \dots (1)$$

を基礎方程式とする。上式で $\int_{V_{v01}} dV$ は体積積分を、

$\int_S d\mathbf{n}$ は境界面での面積分を表す。 \mathbf{J} は面での全フラックスベクトル(v :速度ベクトル, Γ :拡散係数より $\mathbf{J} = v\phi + \Gamma \nabla \phi$)、 \mathbf{n} は面の法線ベクトル、 B は ϕ の生

* 昭和62年11月4日 第947回講演会において講演、原稿受付 昭和63年8月22日。

*1 准員, 東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)。

*2 正員, 東京大学工学部。

*3 正員, 東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

成量である。

従来の有限体積法では離散点の配置およびセル分割は座標系に沿って行われ、セル形状は六面体（二次元では四角形）になる。ここで、式(1)の左辺および右辺第2項の体積積分はセル内の代表値により評価される。また、右辺第1項はセル境界面において面の近傍点を用いて離散化され、それらの点の相互の影響係数を与える。これらから得られる離散式は一般に、

$$a^c \phi^c = \sum a^{NB} \phi^{NB} + b \dots\dots\dots (2)$$

(C:セル代表点, NB:座標軸に沿った近傍点)の形で表される。aは影響係数をbは定数項を示す。これは隣接点との参照関係において差分法と同等であるため、効率のよい反復法で解ける一方、離散点配置における欠点も差分法と共有している。

ところで、式(1)はセル形状を制限していないので、従来とは異なるセル分割により新たな離散化式を与える可能性を持つ。ただし、セル分割には次の条件が課せられると考えられる。

- (1) 領域がすきまなく、重なり合わずに分割される。
- (2) 各セルは内部に一つずつ離散点を含む。

本研究では上記の条件を満足する分割法として、ヴォロノイ図の適用を提案する。ヴォロノイ図は領域内に分布する離散点 X^n の勢力圏

$$V(X^i) = \bigcap_{j=1}^n \{X \mid d(X^i, X) \leq d(X^j, X)\}$$

X :領域内の点, $d(X^i, X)$: X^i, X 間の距離による分割図である⁽¹⁾。図1の白丸の離散点に対し、太線がヴォロノイ図によるセル分割を表している。計算領域の境界もセルの境界となると考えると、このような閉じたセルが必ず各離散点の周りに構成され、計算領域内部のセルは常に凸領域であることが知られている。二次元では、セル境界は隣接点との垂直二等分線(三次元では面)で与えられ、3セルの境界交点は離散点による三角形の外心である。

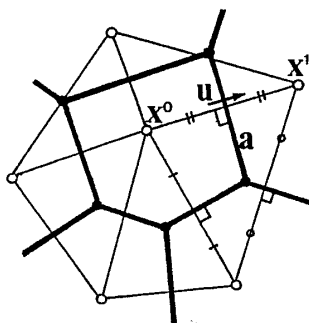


図1 ヴォロノイ図による分割

以下ではヴォロノイ図を適用した場合の式(1)の離散化法について概要を述べる。

2.2 面フラックス 式(1)の右辺第1項はヴォロノイ図によって得られる多面体セルの各境界面において一定値をとるとして評価される。ここで、各面は近傍2点を2等分しており、その位置関係(例えば、面aに対し点 x^0 および点 x^1)は正規座標系における通常のセル分割によるものと変わらないことが注目される。よって、面をとるフラックス $J (= \mathbf{J} \cdot \mathbf{n})$ の評価には従来の有限体積法における方法をそのまま用いることができる⁽²⁾。Jを一定としたときの解析解、

$$J = u \left\{ \frac{\exp(Pe)}{1 - \exp(Pe)} \phi^0 + \frac{1}{1 - \exp(Pe)} \phi^1 \right\} \dots\dots\dots (3)$$

Pe:セルペクレ数 = uL/Γ

ϕ^0, ϕ^1 : 離散点 x^0, x^1 における値

u: 2点を結ぶ方向の速度成分

L: 2点間の距離

に基づき、

$$J = (\Gamma/L) * F(Pe) * (\phi^1 - \phi^0) + u * \phi^{up}$$

$$\phi^{up} = \begin{cases} \phi^0 & u \geq 0 \\ \phi^1 & u < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

と表される。F(Pe)にはスキームにより以下の関数が用いられる。

ここで、Jは2点 x^0, x^1 を結ぶ方向にとられており、ヴォロノイ図による分割では境界面と垂直になるため、式(1)右辺第1項の内積は容易に計算される。

2.3 生成項 式(1)の右辺第2項(生成項)の表式は物理量 ϕ によって異なるが、代表点における一次微分の積和で表されることが多い。よって、変数 ϕ のこう配 $\nabla \phi$ を以下のように定義する。本節では、上付き添字は離散点位置を、下付き添字はベクトルの成分を示し、総和記号は隣接点の個数の和をとることを表す。

まず、考えている代表点 x^0 の隣接点の一つを x^{nb} とすると、境界面での $\nabla \phi$ の2点を結ぶ方向の射影成分は一次差分で

$$(\nabla \phi^{nb})_{nb} = \frac{\phi^{nb} - \phi^0}{\|x^{nb} - x^0\|} \dots\dots\dots (5)$$

表1 スキームと補間関数

• Central dif.	$F(Pe) = 1 - 0.5 * Pe $
• Up Wind	$F(Pe) = 1$
• Hybrid	$F(Pe) = \max(0, 1 - .5 * Pe)$
• Power Law	$F(Pe) = \max(0, (1 - .1 * Pe)^2)$

と表される。 $\|x^{nb} - x^0\|$ は x がベクトル量であるのでその大きさを表す。また、 x^0 での $\nabla\psi$ のこの方向の成分と $(\nabla\psi^{nb})_{nb}$ との差をとると、

$$\delta\psi^{nb} = \frac{\psi^{nb} - \psi^0}{\|x^{nb} - x^0\|} - \nabla\psi \cdot e^{nb} \dots\dots\dots (6)$$

となる。 e^{nb} は 2 点を結ぶ方向(すなわち、面に垂直な方向)の単位ベクトルである。式(6)は各隣接点について得られるので、 $\delta\psi^{nb}$ の重み付け二乗平均、

$$\Psi = \sum_{nb} (g^{nb} \delta\psi^{nb} \delta\psi^{nb}) \quad g^{nb} \text{ は重み係数} \dots\dots\dots (7)$$

を評価関数として $\nabla\psi$ が定義される。

すなわち、 $\Delta\psi$ の成分(任意の直交座標系)を独立として

$$\frac{\partial\Psi}{\partial(\nabla\psi)_a} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

が各成分について得られ、これらは以下の連立一次式にまとめられる。

$$[A]\nabla\psi = r \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $A_{ab} = \sum_{nb} \{g^{nb}(e^{nb})_a(e^{nb})_b\}$

$$r_a = \sum_{nb} \{g^{nb}(e^{nb})_a(\nabla\psi^{nb})_a\}$$

a, b は $\nabla\psi$ の座標系とする

ここで、 $\Delta\psi^{nb}$ を与える近接点が 3 個以上あれば式(9)は独立になり、代表点での $\nabla\psi$ の各成分が得られる。

以上の手法によって得られる離散式は、

$$a^c\phi^c = \sum a^{NB}\phi^{NB} + b \dots\dots\dots (10)$$

(C :セル代表点, NB :ヴォロノイ図による隣接点)とまとめられる。式(10)において隣接点の数は一般にセルによって異なることに注意されたい。また、正規座標での等間隔格子のようにヴォロノイ図による分割が従来のセル分割と一致する場合には、式(10)は式(2)と一致する。

2.4 連続式の評価 連続の式については、従来の有限体積法でのノンスタガード格子(すべての物理量が同一格子で解かれる)に拡張された SIMPLE アルゴリズムが適用される⁽³⁾。

まず、連続の式を体積積分し前述の輸送方程式と同じセルで離散化すると次式を得る。

$$\sum (uS)^{nb} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

nb :セルの境界面, u :面に垂直な速度, S :面積
式(11)の速度 u は、境界面を挟む 2 点 x^1, x^0 で離散化された運動量式を平均して得られる次式であたえる。

$$u = \bar{u} - d(\nabla P)_u \dots\dots\dots (12)$$

()_u: u の方向成分 (x^1, x^0 を結ぶ方向)

$$\bar{u} = \left[\left\{ \left(\sum a^{NB} u^{NB} + b^1 \right) / a^c \right\}^1 \right]$$

$$+ \left\{ \left(\sum a^{NB} u^{NB} + b^1 \right) / a^c \right\}^0 / 2$$

a :式(10)の係数, b^1 :圧力を含まない定数項

{ }¹, { }⁰: x^1, x^0 での値

$$d = [(V/\rho a^c)^1 + (V/\rho a^c)^0] / 2$$

V :セルの体積, ρ :密度

$$(\nabla P)_u = (P^1 - P^0) / L$$

L : x^1, x^0 を結ぶ方向の距離

式(12)中で圧力こう配項は式(10)の表式と異なる。ここで、SIMPLE の仮定により

$$u = u^* + u^1, \quad P = P^* + P^1 \dots\dots\dots (13)$$

u^*, P^* :近似値, u^1, P^1 :修正値

を式(11), (12)に代入し、 u^1 項を省略すると修正圧力 P^1 の離散式が得られる。これは式(10)の形にまとめられ、参照される近傍点は輸送方程式と同一である。計算アルゴリズムは従来の SIMPLE 法に従う。

4. 計算手法の構成

3章に述べた離散化法を実際の流れ場計算に適用すると、計算手順は以下のようになる。

- (1) 格子点の定義(配置は任意)
- (2) ヴォロノイ図によるセル分割
- (3) 位置, 形状の情報の計算
- (4) 参照配列の生成
- (5) SIMPLE アルゴリズムによる繰返し計算

計算速度を上げるためには、最も計算時間を要する繰返し計算の効率化が重要である。特に、離散式行列の反復計算においてはベクトル化による十分な加速が期待できる。本研究ではベクトル化による加速率に優れた行列解法として、マルチカラー SOR (Successive Over-relaxation Method) を採用した。この方法では、一点反復解法である SOR における点評価をベクトル化に適した順序で行う。本計算法では離散点が座標系により順序づけられていないため、点評価の順序は解法を最適化するようにとることができる。よって、マ

表 2 各手順の計算時間

	M 6 8 0	on bench mark	S 8 2 0
Dividing cells	6.4 sec		
Calculating infor. of fig.	2.6 sec		
Setting ref. index	0.32sec		
Solving flow	113 sec	626	4.2 sec
Total	122 sec	678	
FVM on Cartesian		65	

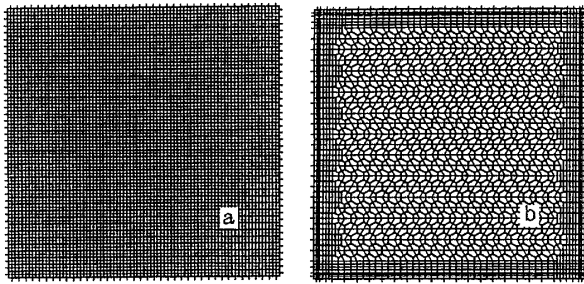


図 2 正方キャビティの分割例

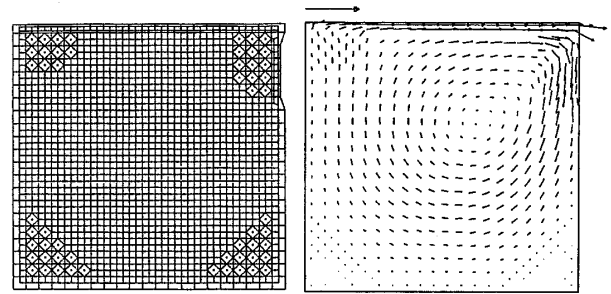


図 4 点追加後のセル分割と計算結果

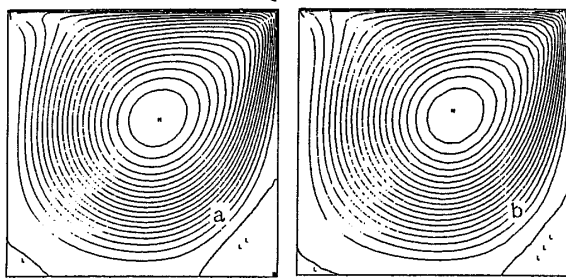


図 3 キャビティ内流れの計算結果

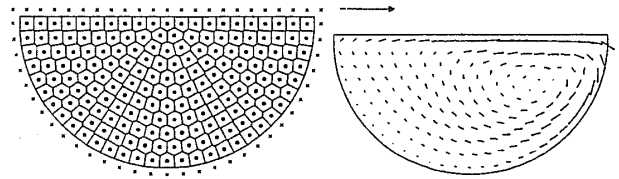


図 5 半円キャビティのセル分割と計算結果

ルチカラー SOR はこの計算法に適した解法と思われる。

各点での離散式(10)において参照される近傍点が規格的でないことは有限要素法に類似する。近傍点における座標量, 物理量は参照配列(リストベクトル)を用いて間接的に参照される。また, 前述のマルチカラー SOR における順序づけも参照配列により行う。手順(4)はこれらの配列の生成を意味する。

また, 本論文の計算例では面フラックスの補間式として Power Law スキームを用いた。

5. 計算例と結果

まず, 離散点の配置が異なる場合の結果を比較した。計算対象は正方キャビティ流れで定常層流とした。図 2 に 2 種類の計算格子を示す。図 2 で細線は格子点の配置を, 太線はセル形状を示している。格子 a ではノンスタガード格子による従来の手法と同一のセル分割が得られ, 離散式も一致する。格子 a, b は同一の計算プログラムで解析でき, 結果はほぼ一致する。図 3 にレイノルズ数 1000 の結果を流線図で示す。

また, この方法では計算点の追加, 削除が可能となる。正規座標系に基づく格子にいくつかの点を追加すると図 4 のようなセルが得られ(丸印は追加点), これを用いた計算が可能である。

図 5 は直線部が移動する半円キャビティの計算結果である。これは, 座標変換による格子生成では格子に

特異点が生じるため, 適切な分割が難しい領域の一例である。

最後に, 図 1 格子 a の計算点(40×40)における各手順の計算時間を示す。

反復計算の収束条件は離散化式の無次元残差 10^{-3} 以下とした。計算にははん用機(HITAC-M680H), 並列計算機(同 S820H-80)を用いた。両者のスカラー演算速度は同程度であるので, 反復計算は並列計算により約 25 倍に加速されている本計算手法では反復計算に至る前にいくつかの手順を要するが, 反復計算に対し計算量として充分小さいことがわかる。

また, 正規座標系における従来の計算手法との比較では, ベンチマークプログラム⁽⁴⁾を基準とした計算速度で約 10 倍となった。比較に用いた計算手法は正規座標系スタガード格子を用いた SIMPLE アルゴリズムによるもので, 定常計算においては効率のよい計算手法とされている⁽⁴⁾。格子点配置の自由度が飛躍的に高いこと, 並列化による加速率が十分に期待できることから本計算手法の計算速度は満足しうものと考えられる。

6. 結 論

有限体積法における領域の離散化に, 計算幾何学の概念であるヴォロノイ図を適用することにより, 新しい流れ場数値計算手法を構成した。

この計算法を二次元層流キャビティ流れに適用し, 差分法, 有限体積法による従来の計算手法と比較して格子配置の自由度が飛躍的に高く, 計算時間において劣らないことを確認した。

文 献

- (1) 今井ほか2名, 地理情報処理に関する基本アルゴリズム, 共立出版 (1986), 126-148.
- (2) Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, (1978), Hemisphere, 79-135.
- (3) Rhie, C. M., ほか1名, *AIAA J.*, 21-11 (1983), 1525-1532.
- (4) 第1回CFDワークショップ成果報告集, 日本機械学会 (1988), 1-32.
-