Title	Spatio and temporal dynamics of solutions for reaction-diffusion equations with nonlocal effect [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	石井, 宙志
Citation	北海道大学. 博士(理学) 甲第14774号
Issue Date	2022-03-24
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/85800
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	theses (doctoral - abstract and summary of review)
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	Hiroshi_Ishii_abstract.pdf (論文内容の要旨)

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　石 井 宙 志

学 位 論 文 題 名

Spatio and temporal dynamics of solutions for reaction-diffusion equations with nonlocal effect
（非局所効果を持つ反応拡散方程式における解の時空間ダイナミクスについて）

近年では生物学や化学，医学などの様々な分野で，物質間の「反応」と物質の「拡散」，物質間の空間的距離に応じて働きを変える「非局所効果」を有する，非局所効果を持つ反応拡散方程式が諸分野の数理モデルとして提案されている．非局所効果はしばしば適切な積分核と未知関数との空間方向における合成積により記述される．例として以下の数理モデルが挙げられる：

$$u_t = du_{xx} + K * u + f(u), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \qquad (NRD)$$

ここで，$u = u(t,x) \in \mathbb{R}\ (t > 0, x \in \mathbb{R}), d \geq 0,\ f \in C(\mathbb{R}),\ K \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$とし，

$$(K * u)(t,x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y)u(t,y)dy$$

であり，添え字のtとxはそれぞれの偏微分を表すものとする．$f(u)$は反応，du_{xx}は拡散，$K * u$は非局所効果をそれぞれ表している．非局所効果を持つ反応拡散方程式は(NRD)のような単独の方程式であっても，積分核形状に依存して様々な時空間パターンが現れること，特にチューリング不安定性が生じ得ることが知られており，多成分反応拡散方程式と同等な構造が内在されていると予想されている．パターンの形成過程を理解するために，これまで定常解や進行波解のような局在パターンの存在や安定性が解析されてきた．しかし，方程式が持つ非局所性により解の局所的な性質を解析することが難しいことや比較原理といった解の比較手法が適用できない場合があることなど，数学解析の技術的困難が多々あり，解の存在や安定性の証明といった基本的性質ですら解析が困難となる．本学位論文では非局所効果がパターンの形成過程にどのような影響を与えるかを理論的に理解することを目的として，解の時空間ダイナミクスを考察するための新たな解析手法の開発，およびそれらの応用例を中心に紹介する．

本学位論文は[1,2,3]の結果に基づき，全 4 章で構成されている．第 1 章では非局所効果を持つ反応拡散方程式と数理モデルについて紹介し，非局所効果を用いた数理モデリングの有効性や反応拡散方程式との関連性について説明する．第 2 章では(NRD)に符号変化する積分核を与えた場合の進行波解の存在を示すための解析手法とその結果を[1]に基づき紹介する．第 3 章では[2]により得られた局在パターン同士の弱い相互作用の解析手法を説明し，その応用例について述べる．第 4 章では非局所効果がもたらす物質の空間伝搬機構への影響を解析することを動機として，拡散方程式と分数べき拡散方程式の解の零点の漸近挙動を考察した．それらを[3]で得られた結果と合わせて紹介する．

[1]では(NRD)において，符号変化する積分核を与えた場合の進行波解の存在を解析した．(NRD)は神経科学や相分離現象などの数理モデルとして現れ，物質間の相互作用を記述するために積分核が符号変化する場合が起こりうる．数学解析においては積分核が非負であることを仮定し，比較原理などを用いて単調な進行波解の存在が解析されてきた．一方，符号変化する積分核の場合，比較原理が一般に適用できないことからも解析が困難であり，進行波解の存在に関する結果はほとんどなかった．さらに，単安定な進行波解の存在についてはこれまで解析されていなかった．そのため，[1]では符号変化する積分核を有する(NRD)に対して，進行波解の存在を示すための手法を構築することを動機として解析を行った．その結果，積分核が非負の場合の優解・劣解の定義を自然に拡張し，Schauder の不動点定理を適用することで一般の積分核にも適用可能な進行波解の存在を示す手法を構築した．また，優解・劣解の定義をみたす関数を構成することにより単安定な進行波解の存在を初めて証明することに成功した．さらに，進行波解の速度が十

分大きければ，(NRD)において 2 つの異なる不安定な平衡点をつなぐ進行波解が存在し得ることも明らかにした．本学位論文では[1]の結果に加えて，符号変化する積分核を有する(NRD)に対する比較原理を時間発展可能な形に拡張することにより，安定性に関する議論も可能とした結果を新たに紹介している．

[2]では局在パターン同士の弱い相互作用による空間パターンの時間変化の解析手法を提示した．多成分の非局所効果を持つ反応拡散方程式に対して，局在パターン同士の距離が十分離れている場合，初期関数が局在パターンの重ね合わせに十分近ければ，時間発展する解も局在パターンの重ね合わせにより近似可能であることを反応拡散方程式における中心多様体縮約理論の結果を拡張することにより明らかにした．さらに，局在パターンの位置の時間変化を常微分方程式に帰着し, その常微分方程式に非局所効果の影響を特徴づける定数が含まれることも報告している．また，(NRD)に対して[2]の理論を適用し，2 つの定常フロント解同士の相互作用に関する数理解析を行い，本理論の応用例を示した．さらに，本学位論文では[2]の結果を拡張し，非線形の合成積の項を含む数理モデルに対しても理論を適用可能となるように拡張した．その結果を紹介するとともに，拡張した理論の応用例も新たに示している．

最後に非局所効果による物質の空間伝搬機構を解析することを動機として，拡散現象を記述する偏微分方程式に対して解の零点の漸近挙動の解析を行った．平衡点近傍で微小に摂動された初期関数を与えた場合，解が平衡点に十分近い限りそのダイナミクスはその平衡点近傍で線形化した方程式の解で近似できると予想される．線形化された方程式は変数変換により，拡散現象を記述する偏微分方程式に帰着される．そのため，拡散現象を記述する偏微分方程式に対して解の零点の漸近挙動を解析することは，平衡点近傍における解の時空間ダイナミクスの理解に直結すると期待される．それらを動機として通常の拡散方程式，および非局所的な拡散現象を記述する分数べき拡散方程式に対して解の零点運動に関する解析を行った．[3]では拡散方程式における解の零点の漸近挙動の解析を行い，その漸近挙動を 3 次のオーダーまで求めることに成功している．実際，動座標系を導入して漸近展開を行うことで，初期関数の両側ラプラス変換の零点を係数に持つ$O(t)$で発散していく零点が存在することを明らかにした．また，初期関数が有限回符号変化する場合，$O(t)$で発散していく零点の係数は初期関数の両側ラプラス変換の零点であることも報告している．本学位論文では[3]の結果に加えて新たに非局所的な拡散現象を表現する分数べき拡散方程式の零点の漸近挙動を解析した．結果として，解の基本解の漸近展開の評価を改良し，解と漸近展開の誤差を基本解により上から評価できることを示した．これにより，解の零点集合の上限が拡散方程式と不連続的になることや初期関数の積分量が 0 でないときには解の零点集合は有限時間で空になることなど, 零点の漸近挙動が拡散方程式と大きく異なることを明らかにした．

参考文献

[1] S.-I. Ei, J.-S. Guo, H. Ishii, C.-C. Wu, *J. Math. Anal. Appl*., **487(2)**, (2020).
[2] S.-I. Ei and H. Ishii, *Discrete Contin. Dynam. Syst. Ser. B.*, **26(1)**, (2021).
[3] H. Ishii, *arXiv:2109.14559.*