Lesson 9　　incompressible flow　（非圧縮性流れの解法　MAC 法）

非圧縮性流れの基礎式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad -①$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad -②$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad -③$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left\{-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right\}$$

$-④$

速度-圧力カップリング・アルゴリズム

運動方程式（①、②）の時間発展に対して

圧力項　⇒　オイラー陰解法を用いる

他の項　⇒　オイラー陽解法を用いる

$$u^{k+1}=u^k+\Delta t\left\{-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right\}^k-\frac{\Delta t}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{k+1} \qquad -①$$

$$v^{k+1}=v^k+\Delta t\left\{-u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right\}^k-\frac{\Delta t}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{k+1} \qquad -②$$

④にも同じ時間発展スキームを適用する

$$\frac{\Delta t}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)^{k+1}=-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{k+1}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{k}\right\}$$

$$+\Delta t\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right\}^k+\frac{\partial}{\partial y}\left\{-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right\}^k\right] \qquad -④$$

ここで、時刻 t^{k+1} で③を満たすには

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{k+1}=0 \qquad -③$$

④の右辺は時刻 t^k のみとなるので既知 ⇒ 時刻 t^{k+1} の圧力 p^{k+1} が得られる。

離散化スキーム

変数と格子点：

$$p_{i,j}^{k}=p\left(t_k,x_i,\ y_j\right),\quad u_{i,j}^{k}=u\left(t_k,x_i,\ y_j\right),\quad v_{i,j}^{k}=v\left(t_k,x_i,\ y_j\right)$$

運動方程式 ①、②

$$u_{i,j}^{k+1}=u_{i,j}^{k}+\Delta t\left\{-\frac{u_{i,j}^{k}}{\Delta x}\left(u_{i,j}^{k}-u_{i-1,j}^{k}\right)-\frac{v_{i,j}^{k}}{\Delta y}\left(u_{i,j}^{k}-u_{i,j-1}^{k}\right)\right\}\qquad\left(if\ u_{i,j}^{k}>0,\ v_{i,j}^{k}>0\right)$$

$$+\frac{\mu}{\rho}\Delta t\left\{\frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{i+1,j}^{k}-2u_{i,j}^{k}+u_{i-1,j}^{k}\right)+\frac{1}{\Delta y^2}\left(u_{i,j+1}^{k}-2u_{i,j}^{k}-u_{i,j-1}^{k}\right)\right\}\qquad\boxed{u_{i,j}^{+}}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(p_{i+1,j}^{k+1}-p_{i-1,j}^{k+1}\right)$$

$$v_{i,j}^{k+1}=v_{i,j}^{k}+\Delta t\left\{-\frac{u_{i,j}^{k}}{\Delta x}\left(v_{i,j}^{k}-v_{i-1,j}^{k}\right)-\frac{v_{i,j}^{k}}{\Delta y}\left(v_{i,j}^{k}-v_{i,j-1}^{k}\right)\right\}\qquad\left(if\ u_{i,j}^{k}>0,\ v_{i,j}^{k}>0\right)$$

$$+\frac{\mu}{\rho}\Delta t\left\{\frac{1}{\Delta x^2}\left(v_{i+1,j}^{k}-2v_{i,j}^{k}+v_{i-1,j}^{k}\right)+\frac{1}{\Delta y^2}\left(v_{i,j+1}^{k}-2v_{i,j}^{k}-v_{i,j-1}^{k}\right)\right\}\qquad\boxed{v_{i,j}^{+}}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left(p_{i,j+1}^{k+1}-p_{i,j-1}^{k+1}\right)$$

時間項　⇒　オイラー陽解法

拡散項　⇒　2 次精度中心差分（2 階微分）

対流項　⇒　1 次精度風上差分（1 階微分）

圧力項　⇒　2 次精度中心差分（1 階微分）

圧力ポアソン式　④

$$\frac{\Delta t}{\rho}\left\{\frac{1}{\Delta x^2}\left(\underline{p_{i+1,j}^{k+1}}-\underline{2p_{i,j}^{k+1}}+\underline{p_{i-1,j}^{k+1}}\right)+\frac{1}{\Delta y^2}\left(\underline{p_{i,j+1}^{k+1}}-\underline{2p_{i,j}^{k+1}}+\underline{p_{i,j-1}^{k+1}}\right)\right\}$$

$$=\underline{\frac{1}{2\Delta x}\left(u_{i+1,j}^{+}-u_{i-1,j}^{+}\right)+\frac{1}{2\Delta y}\left(v_{i,j+1}^{+}-v_{i,j-1}^{+}\right)}$$

$$u_{i,j}^{+}=u_{i,j}^{k}+\Delta t\left\{-\frac{u_{i,j}^{k}}{\Delta x}\left(u_{i,j}^{k}-u_{i-1,j}^{k}\right)-\frac{v_{i,j}^{k}}{\Delta y}\left(u_{i,j}^{k}-u_{i,j-1}^{k}\right)\right\}+\frac{\mu}{\rho}\Delta t\left\{\frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{i+1,j}^{k}-2u_{i,j}^{k}+u_{i-1,j}^{k}\right)+\frac{1}{\Delta y^2}\left(u_{i,j+1}^{k}-2u_{i,j}^{k}-u_{i,j-1}^{k}\right)\right\}$$

$$v_{i,j}^{+}=v_{i,j}^{k}+\Delta t\left\{-\frac{u_{i,j}^{k}}{\Delta x}\left(v_{i,j}^{k}-v_{i-1,j}^{k}\right)-\frac{v_{i,j}^{k}}{\Delta y}\left(v_{i,j}^{k}-v_{i,j-1}^{k}\right)\right\}+\frac{\mu}{\rho}\Delta t\left\{\frac{1}{\Delta x^2}\left(v_{i+1,j}^{k}-2v_{i,j}^{k}+v_{i-1,j}^{k}\right)+\frac{1}{\Delta y^2}\left(v_{i,j+1}^{k}-2v_{i,j}^{k}-v_{i,j-1}^{k}\right)\right\}$$

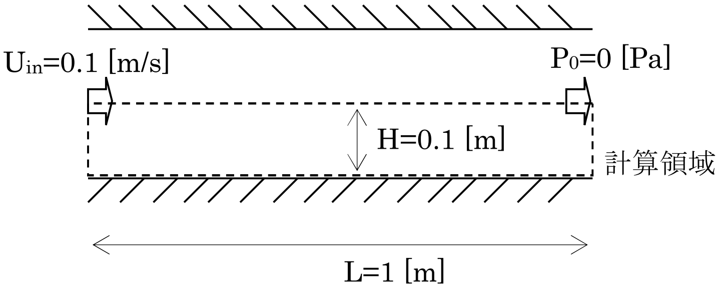
ラプラシアン（左辺）　⇒　2 次精度中心差分（2 階微分）　ただし、差分格子幅はΔx, Δy

発散項（右辺）　⇒　2 次精度中心差分（1 階微分）

＊すべての計算点の値 $p_{i,j}$ についての連立方程式として行列計算にて解を求める

$$\Rightarrow\quad a_E\boxed{p_{i+1,j}}+a_W\boxed{p_{i-1,j}}+a_P\boxed{p_{i,j}}+a_N\boxed{p_{i,j+1}}+a_S\boxed{p_{i,j-1}}=\boxed{b}$$

計算対象①　　**2 次元流路**　（**sample_program1.f90 の例**）



$\mu/\rho=10^{-4}$ [m²/s]
$\rho=1000$ [kg/m³]

境界条件

Inlet　$u=U_{in}, \quad v=0$　for　explicit terms　(u^+, v^+).

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0, \quad u=U_{in}$$　for　implicit terms　(pressure – continuity eqs.)

Outlet　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, \quad v=0$　for　explicit terms　(u^+, v^+).

$p=p_0, \quad \nabla\cdot\mathbf{v}=0$　for　implicit terms　(pressure – continuity eqs.)

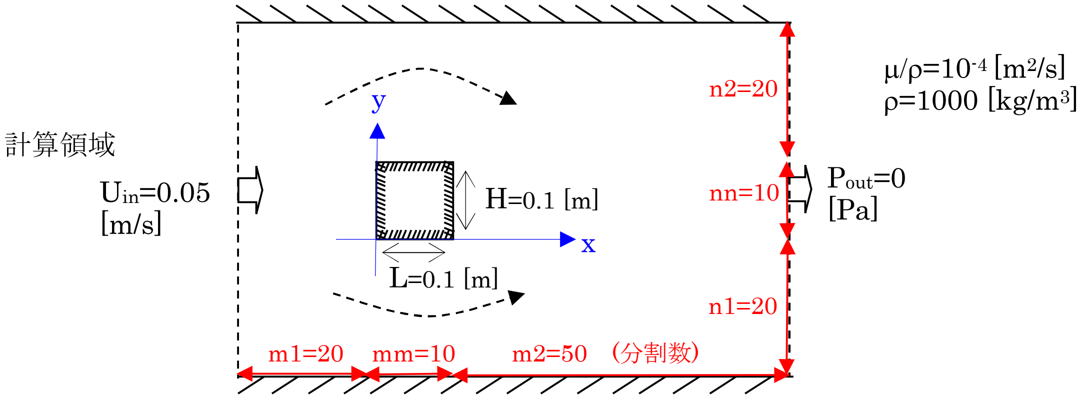
Wall　$u=0, \quad v=0$　for　explicit terms　(u^+, v^+).

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0, \quad v=0$$　for　implicit terms　(pressure – continuity eqs.)

Symmetry　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \quad v=0$　for　explicit terms　(u^+, v^+).

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0, \quad v=0$$　for　implicit terms　(pressure – continuity eqs.)

計算対象②　　**障害物まわりの 2 次元流れ**　（sample_program2.f90 の例）



境界条件

Inlet　$u = U_{in}, \quad v = 0$　　for　explicit terms　(u^+, v^+).

$\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad u = U_{in}$　　for　implicit terms　(pressure – continuity eqs.)

Outlet　$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = 0$　　for　explicit terms　(u^+, v^+).

$p = p_{out}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$　　for　implicit terms　(pressure – continuity eqs.)

Wall　$u = 0, \quad v = 0$　　for　explicit terms　(u^+, v^+).

$\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad u = U_{in}$　　or

$\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad v = 0$　　for　implicit terms　(pressure – continuity eqs.)

（sample_program3.f90 の例）

m1=20　mm=10　m2=70　,　n1=30　mm=10　n2=30

U_{in}=0.1 [m/s]　　に変更

＜Lesson 課題　計算したプログラムと計算結果について以下を検討する＞

Fortran プログラム（sample_program.f90）を参考に

① 非圧縮性流れシミュレーションの計算アルゴリズムと離散化スキームを理解する。

② 物理現象を考察して境界条件の与え方を理解する。

③ 数値解をグラフ化して解の妥当性と計算精度を評価する。

④ 物理条件（物性値、形状寸法、境界条件など）、計算法（離散化スキーム、格子数、計算ステップ数、計算式の定数など）による解の違いを評価する。