Title	特異モデルに対する双対平坦構造とその応用 [論文内容及び審査の要旨]
Author(s)	中島, 直道
Citation	北海道大学. 博士(情報科学) 甲第15534号
Issue Date	2023-03-23
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/89374
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	theses (doctoral - abstract and summary of review)
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	Naomichi_Nakajima_review.pdf (審査の要旨)

学位論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称　博士 (情報科学)　　氏名　中島 直道

審査担当者　主　査　教　授　沼田 泰英
　　　　　　副　査　教　授　今井 英幸
　　　　　　副　査　教　授　大本 亨　（早稲田大学基幹理工学部）

学位論文題名

特異モデルに対する双対平坦構造とその応用
（The dually flat structure for singular models and its applications）

中島直道氏の研究テーマは, 数学における微分幾何学と特異点論の研究, およびその情報科学への応用に関する研究である. とりわけ, 数理工学者の甘利俊一氏が提唱した情報幾何学 (Information Geometry) に関して, 特異点論からの新しいアイデアを導入し, 独創的な研究を推し進めている.

情報幾何学は, 統計科学, 凸最適化, 情報理論, 機械学習, 複雑ネットワークなどの幅広い応用分野において, 微分幾何学の手法を用いた理論的基礎ならびに統一された幾何学的解釈を与えるものである. とりわけ, 甘利氏が導入した双対平坦多様体と呼ばれる特殊なリーマン多様体が, 情報幾何学における最重要の空間概念である. たとえば, 正規分布全体がなす空間には, フィッシャー・ラオ情報量をリーマン計量とする多様体の構造が入り, 双対平坦多様体になる.

一方で, 深層学習等の特異統計モデルに代表されるような現実的な問題においては, フィッシャー・ラオ計量が退化する状況が現れ, 双対平坦構造を定義することができない. そのため, 情報幾何学的アプローチは原理的に破綻する. 中島氏はこの問題に対して, 特異点論を用いて新たな切り口を開いた. すなわち, リーマン計量が退化していても甘利理論の主要な定理や主張が成立するように, 双対平坦構造の定義をその出発点から書き換えて理論の刷新を試みている. 甘利理論においては, 凸ポテンシャルとそのルジャンドル変換である双対ポテンシャルの組が重要な役割を果たす. 中島氏は, 非凸ポテンシャルに対してもルジャンドル変換が意味を持つことに着目し, 多価あるいは特異性を持つ双対ポテンシャルを許容することで, リーマン計量の退化を許容する新しい定式化を与えた. この内容は, 情報幾何学に関する専門学術誌《Information Geometry》に掲載された共著論文において論じられている.

続いてこの新しい定式化を元に, 計量が退化する点の周りにおける特異双対ポテンシャルの局所的表示を, 特異点論を用いて具体的に解析している. これが 2 編目となる《Kodai Math. Journal》に掲載された中島氏の単著論文の内容である. この結果は, 数理統計の江口氏によるコントラスト関数と高次テンソルの理論と整合性を持ち, また数学の梅原・山田氏らによる特異空間の微分幾何学や変分法の大家であるエクランの初期の仕事と大いに近親性がある. このことは, 中島氏の開拓している研究が, 数学の理論とその応用の両面で高い可能性を持つことを示していると言えるだろう.

本学位論文は, これら 2 編の論文に基づきまとめられている. 第 1 章では, 研究の動機及びその背景が概説され, 第 3 章ではヘッセ多様体, 第 4 章では接触幾何学の理論についてまとめられている. ヘッセ多様体のポテンシャル関数が誘導する双対構造やダイバージェンスについて議論され, 統計多様体の文脈で現れる双対平坦多様体とヘッセ多様体の同値性について述べられ, 統計多様体の幾

何学的視点からの特徴付けが与えられる. また, 接触多様体やルジャンドル部分多様体, 連接接束といった概ヘッセ多様体を定義する上で重要な概念について説明される. 第 4 章では, 本理論の鍵となる概ヘッセ多様体という概念が導入される. ヘッセ多様体におけるルジャンドル双対性を接触幾何学の枠組みで解釈した上で, 概ヘッセ多様体の定義が述べられる. 概ヘッセ多様体は, ルジャンドル多様体から決まる互いに双対的な連接接束の組および計量を備えた多様体であるが, 双対的な連接接束の組が, ヘッセ多様体のルジャンドル双対性におけるヘッセ構造 (とそのポテンシャル関数) と双対ヘッセ構造 (とそのポテンシャル関数, つまりヘッセ構造のポテンシャル関数のルジャンドル変換) の役割を果たす. また, 計量は一般には退化する場合もあり, すべての点で退化していないこととヘッセ多様体であることが同値となっている. この意味で, 概ヘッセ多様体はヘッセ多様体の自然な拡張となっている. 第 5 章では, 双対平坦多様体のダイバージェンスを, 概ヘッセ多様体の正準ダイバージェントという形で一般化し, その性質について議論をする. 特に, 拡張ピタゴラスの定理や射影定理と呼ばれる基本的な定理が, 概ヘッセ多様体でも成り立つことがわかる. 第 6 章では, 本理論の, 深層学習, 統計的推定, 非凸最適化問題への応用の可能性について論じられ, 第 7 章では結論がまとめられる.

以上を要するに, フィッシャー・ラオ計量が退化し双対平坦構造を定義することができず, 情報幾何学的アプローチが原理的に破綻するような場合でもアプローチできるような理論を, 概ヘッセ多様体という概念を導入することで, 中島氏は構築した. 中島氏の理論は, 情報幾何学の進歩に貢献するところが大きい. よって, 中島氏は北海道大学博士 (情報科学) の学位を授与される資格があるものと認める.