学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　　氏　名　島 谷　晴 基

学 位 論 文 題 名

On the pulse dynamics for reaction-diffusion systems on one-dimensional domains with various boundary conditions

（1 次元領域上の反応拡散系に現れるパルスの様々な境界条件下におけるダイナミクスについて）

本学位論文は, ノイマン境界条件及び周期境界条件下における1次元領域上の反応拡散系, キルヒホッフ境界条件下における複数の半直線 $(0,\infty)$や線分$(0,K)$ $(K>0)$ を原点で結合して構成したメトリックグラフ, 特にH字型メトリックグラフ, 円が付いたメトリックグラフ上の反応拡散系に対して, パルス相互作用理論を用いた新たな理論の構築について述べたものである.

パルス相互作用理論とは, Ei2002([1])によって構築された反応拡散系のパルス解, フロント解のダイナミクスを解析する手法であり, 現在でも広く用いられている. この理論は, $\mathbb{R}$上の反応拡散系に対するものであるが, 近年, 境界条件下での反応拡散系にも適用できることが分かってきている$(\mathrm{Ei-Ishimoto(2013)([2])})$. この理論を様々な境界条件下における反応拡散系に適用できた事が本学位論文の内容である.

第1章では問題の背景と動機, 第2章では本学位論文全体で共通する仮定と定義の説明を与えている.

第3章では, ノイマン境界条件及び周期境界条件下での1次元区間上における複数ピークを持つ定常解に関する線形化固有値問題を考察している. この問題に関しては, スカラー方程式であるアレン・カーン方程式のフロント型定常解における線形化固有値問題が広く取り扱われていており, 非線形項が特定の条件を満たす場合に限り, 線形化固有値問題における固有値と固有関数のリーディング項は, それぞれ余弦関数と双曲線関数を用いて表されることが分かっていたが, 反応拡散系におけるパルス型定常解の線形化固有値問題については, 一般的な解析手法は全く存在していなかった. この章では, パルス相互作用理論を用いた全く新たな手法を固有値問題の解析に応用することにより, Gray-Scott モデルや Gierer-Meinhardt モデルなど, 変分構造を持たない反応拡散系に対しても固有値と固有関数のリーディング項を, 三角関数を用いて具体的に導出することに成功したことについて述べている.

第4章は, 第5章, 第6章の準備のための先行研究を紹介する章である. この章では, $R\in\mathbb{N}$ 本の半直線$(0,\infty)$を原点で結合したスターグラフ上の反応拡散系を取り上げる. この研究は近年盛んに行われており, 特にアレン・カーンタイプのスカラー方程式に関して, 比較原理や変分法を用いることにより, フロント解の運動や定常解の安定性解析がなされてきた. しかしながら, 一般の反応拡散系におけるパルス解の運動に関する数学的な結果がこれまでなかった. このような状況下で, 最近, パルス相互作用理論を用いることにより, スター型メトリックグラフ上の反応拡散系におけるパルス解に対して, 解の運動を記述する運動方程式を具体的に求めることに初めて成功した. その結果は論文$(\mathrm{Ei-Mitsuzono-Shimatani(2022)([3])})$として既に出版済みである. この章では第5章, 第6章の準備のために, [3]の主結果とその証明の紹介を行う.

第 5 章では, スター型メトリックグラフの2個のノードを線分で繋いで構成したH字型メトリックグラフ上の反応拡散系を考察している. この研究に関しては, 特にスカラーのアレン・カーンタイプの方程式におけるフロント解の研究が盛んであり, 様々な結果が報告されている. しかしながら, パルス解の挙動に関する結果は全く存在しないのが現状であった. このような状況下で, 本学位論文では, パルス相互作用理論を用いることによって, H字型メトリックグラフ上の反応拡散系におけるパルス解の運動を記述する運動方程式の導出, 及びこの運動方程式を応用することによって, パルス型定常解に関する結果も得られた. 第5章では, これら2つの結果について述べたもの

となっている.
　第6章では,太さに対応するパラメータが各グラフ上で異なる場合のメトリックグラフ上の反応拡散系の考察を行っている.特に,1本の半直線と1個の円をつないで構成したメトリックグラフを取り扱った.このような円が付いたメトリックグラフ上の反応拡散系については,スカラー方程式における定常解の研究が盛んに行われており,様々な結果が報告されている.しかしながら,円が付いたメトリックグラフ上の解の時間発展に関する結果は,ほとんど存在しない.そこで本学位論文では,パルス相互作用理論を用いることによって,太さに対応するパラメータが各グラフ上で異なる場合の,円が付いたメトリックグラフ上におけるスカラー反応拡散方程式のフロント解の構成,及びその解の時間発展の挙動を解析した.その結果,円が付いたメトリックグラフ上のスカラー反応拡散方程式におけるフロント解の運動を記述する運動方程式を,太さのパラメータを含めた形で具体的に導出することができた.この章では,この結果とその応用例について述べている.

参考文献

[1] S.-I.Ei, The motion of weakly interacting pulses in reaction-diffusion systems, J. D. D. E.14(1)(2002),85-137.
[2] S.-I. Ei, T.Ishimoto, Effect of boundary conditions on the dynamics of a pulse solution for reaction-diffusion systems, Network and heterogeneous media Volume 8, Number 1, March 2013, 191-209.
[3] S.-I. Ei, Ken Mitsuzono, H.Shimatani, The dynamics of pulse solutions for reaction diffusion systems on a star shaped metric graph with the Kirchhoff's boundary condition. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 2022, http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2022209.