

令和4年度博士論文

開放量子系における
非平衡トポロジカル相

Nonequilibrium topological phases in open quantum systems

北海道大学大学院工学院

応用物理学専攻

数理物理工学研究室

河崎 真樹男

目次

第 1 章	序論	3
第 2 章	開放系の量子力学	6
2.1	孤立系の量子力学	6
2.2	開放量子系の時間発展	7
2.3	GKSL 方程式のミクロな描像からの導出	8
2.4	GKSL 方程式の性質	11
2.5	非エルミート量子力学	14
第 3 章	物質のトポロジカル相	16
3.1	トポロジカル物質	16
3.2	孤立平衡系のトポロジカル相	19
3.3	非エルミート系のトポロジカル相	23
3.4	本研究の目的	32
第 4 章	副格子対称性に保護された開放量子系のトポロジカル相	35
4.1	序論	35
4.2	一体リンドブラディアン	36
4.3	リンドブラディアンに対する副格子対称性	40
4.4	散逸的 SSH モデルにおける副格子対称性に保護されたエッジ状態	42
4.5	シフトした副格子対称性を有するためにジャンプ演算子が満たす条件	49
4.6	結論	51
第 5 章	PT 対称性を有する開放量子系のトポロジカル相	52
5.1	序論	52
5.2	リンドブラディアンの PT 対称性	53
5.3	PT 対称なキタエフ鎖	54

5.4	PT 対称な SSH モデル	58
5.5	結論	59
第 6 章	多重エッジ状態に起因した非エルミート系におけるバルク-エッジ対応の破れ	60
6.1	序論	60
6.2	量子ウォークのトポロジカル相	61
6.3	非エルミート性によるエッジ状態の頑強性の増強	65
6.4	結論	70
第 7 章	まとめ	71
	謝辞	74
付録		75
A	副格子対称性・擬エルミート性を含んだ非エルミートハミルトニアン の対称性クラス	75
B	散逸的 SSH モデルにおける $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ トポロジカル不変量の計算	78
C	摂動がない場合の 3 ステップ量子ウォークの \mathbb{Z} トポロジカル相	81
参考文献		85

第 1 章

序論

近年、トポロジカル相と呼ばれる新たな物質相が注目を集めている [1, 2]。トポロジカル相は系の大域的な性質を反映したトポロジカル不変量により特徴づけることができ、非自明なトポロジカル相を有する物質は、その表面にエッジ状態と呼ばれる特殊な表面状態を有する。トポロジカル不変量とエッジ状態の関係はバルク-エッジ対応と呼ばれ、トポロジカル相において普遍的な関係となる。トポロジカル不変量やエッジ状態は系の大域的な性質を変えない摂動等に対して頑強であるため、非自明なトポロジカル相を有する物質では、試料の詳細に依らないホール伝導度の量子化 [3]、無散逸なスピン流の実現 [4, 5] 等、従来の物質相とは異なる性質を有しうる。この頑強性から、トポロジカル相は基礎物理的な興味だけではなく、量子コンピュータ等への産業応用も期待されている。トポロジカル相はハミルトニアンの特称性により分類することができ、結晶構造に伴う空間対称性を考慮しない場合には、時間反転対称性・粒子正孔対称性・カイラル対称性の三種の特称性の有無から、ハミルトニアンは 10 種類の対称性クラスに分類される [6–8]。

これまで、トポロジカル相を含む多くの物質相に関する理論・実験研究の多くは孤立平衡系を対象としてきた。しかし、近年では実験技術が進歩したことにより、光学系 [9, 10] や冷却原子 [11–13] 等の人工量子系を用いることで物質相をシミュレートすることが可能となった。これらの系では系の非平衡ダイナミクスを直接観測することが可能である他、着目系と外界との相互作用を調節することにより、制御された散逸を誘起することができる。そのため、人工量子系を用いることで、従来不可能であった非平衡系や開放系における物質相の実験的研究が可能となる。このような背景から、近年では非平衡系や開放系の新奇物質相に関する研究が、理論・実験の双方から精力的に行われている [14–27]。

トポロジカル相に関しても、非平衡系や開放系への拡張が考えられている。非平衡系への拡張の一例として、孤立平衡系では自明なトポロジカル相を有する物質に周期的な外場を印加することにより、非自明なトポロジカル相を誘起するフロッケ・トポロジカル相がある [28–35]。また、光の増幅や減衰を含む古典光学系や連続測定下にある量子系の時間発展は非エルミート・シュレディンガー方程式に従うため、開放系のトポロジカル相として、非エルミートなハミルトニアンで記述される非エルミート系の

トポロジカル相が調べられた [36–45]。孤立平衡系のトポロジカル相は 10 種類の対称性クラスで分類されたが、非エルミート系ではその非エルミート性により分類に用いられる対称性の数が増加し、38 種類の対称性クラスによりトポロジカル相が分類される [46, 47]。更に、孤立系では物質内部の性質は系の境界条件に依存しないのに対し、非エルミート系ではこの限りではなく、孤立平衡系と同様の意味でのバルク-エッジ対応が成立しない場合が存在する [48–52]。これらの事実により、非エルミート系では孤立平衡系より多様なトポロジカル相が実現する。非エルミート系のトポロジカル相で顕著な性質であるバルク-エッジ対応の破れは、バルク状態が境界条件依存性を有する場合の報告がほとんどであり、他の機構によるバルク-エッジ対応の破れの解明が課題となる。

一方で、多くの開放量子系では連続測定が行われていないため、その時間発展は非エルミート・シュレディンガー方程式ではなく、密度演算子の時間発展方程式である GKSL (Gorini-Kossakowski-Shdarshan-Lindblad) 方程式に従う [53–55]。そのため、開放量子系のトポロジカル相を調べるためには、GKSL 方程式を特徴づけるリンドブラディアンをトポロジーに基づいて解析する必要がある [56–72]。GKSL 方程式は数学的な変換により非エルミート・シュレディンガー方程式に対応づけられるため、非エルミートハミルトニアン分類理論を用いることで、リンドブラディアンを対称性に基づいて分類することができる [60, 73, 74]。しかし、先行研究 [60] において、リンドブラディアンが非エルミートな構造を有しているにも関わらず、リンドブラディアンの分類される対称性クラスが孤立平衡系と同数である 10 種類になることが報告された。この結果は、非エルミート系の場合と異なり、開放量子系のトポロジカル相が孤立平衡系とほぼ等しくなることを意味する。しかし、前述したように、非平衡開放系では物質相の性質も変化し得ることから、非平衡開放系の物性を明らかにする上で、孤立平衡系に対応物のないトポロジカル相の存在を明らかにすることが重要な課題となる。

本論文では、前述した二つの課題に取り組むことで、開放系の新奇トポロジカル相を明らかにした。先行研究では、開放量子系の物理的制約により、非エルミート行列の分類で本質的な役割を果たす副格子対称性がリンドブラディアンに対して矛盾なく定義できないことを前提に、リンドブラディアンのトポロジカルな分類が行われた。これに対し本研究では、複素平面上での固有値のシフトを導入することにより、リンドブラディアンに対して副格子対称性が矛盾なく定義可能であることを示した [75]。これにより、先行研究で棄却された対称性クラスがリンドブラディアンに対して実現可能となり、リンドブラディアンの分類される対称性クラスが増大することを示した。更に、既存理論では開放量子系の緩和ダイナミクスのトポロジカルな分類が行われていたが、非エルミート系に特有の対称性である PT 対称性を用いることにより、定常状態としてエッジ状態が実現可能であることも示した [76]。また、本論文では非エルミート系におけるバルク-エッジ対応の破れの新たな機構を発見した。多重エッジ状態を有する非エルミートなモデルに摂動を印加して対称性クラスを変化させることにより、あるパラメータ領域ではバルク-エッジ対応が破れることを示した [77]。この機構はバルク状態の境界条件依存性を必要

とせず、先行研究とは異なる機構となる。

本論文は全 7 章から構成されており、各章の概要は以下ようになる。第 2 章では開放量子系の時間発展方程式である GKSL 方程式の導出や諸性質を紹介する。第 3 章では孤立平衡系及び非エルミート系のトポロジカル相を説明する。トポロジカル相の分類方法に関しても第 3 章で取り扱う。第 4 章では、リンドブラディアンに対して実現可能な副格子対称性である、シフトした副格子対称性を提案する。シフトした副格子対称性の一般論を説明した後、この対称性を有する具体的なモデルを構築し、具体例を通してその性質を実証する。第 5 章では、PT 対称性を有するリンドブラディアンのトポロジカル相を調べる。非エルミート・トポロジカル相における PT 対称性の役割を述べた後に、リンドブラディアンに対する PT 対称性を導入する。導入した PT 対称性を有するような開放量子系のモデルを構築し、数値計算を行うことにより、開放量子系においてもエッジ状態が定常状態として存在可能であることを示す。第 6 章では、多重エッジ状態に起因した非エルミート系でのバルク-エッジ対応の破れを提案する。摂動を印加することで、多重エッジ状態が許されるトポロジカル相から単一エッジ状態のみが許されるトポロジカル相に相転移させる。非エルミート性に起因して、エッジ状態が PT 対称性と類似の反線形対称性を保つようになり、多重エッジ状態が安定に存在することを示す。第 7 章はまとめであり、本論文での研究結果をまとめると共に、今後の課題についても述べる。

第2章

開放系の量子力学

近年、実験技術の向上や量子デバイスへの関心の高まりに伴い、着目系が環境と相互作用する開放量子系の性質に注目が集まっている。着目系と環境を合わせて孤立系として取り扱い、環境の自由度を消去することにより、開放系の時間発展を記述することができる。特に、着目系と環境の間の非マルコフな相互作用が無視できる場合には、開放量子系の時間発展はリンドブラッド型の量子マスター方程式により記述できる。本章では、開放量子系の時間発展やその取り扱いを紹介し、全系のミクロな時間発展からリンドブラッド型の量子マスター方程式を導出する。また、近年開放系の文脈で研究されている非エルミート系との関連も述べる。

2.1 孤立系の量子力学

孤立系の量子状態はヒルベルト空間のベクトル $|\psi\rangle$ により記述される。確率解釈の要請から、このベクトルはノルムが1である: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. 量子状態 $|\psi\rangle$ に対する時間発展は、シュレディンガー方程式

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \quad (2.1)$$

で与えられる。 H は孤立系のハミルトニアンを表す。(本論文ではプランク定数を $\hbar = 1$ とする単位系を常に採用する。) H が時間に依存しない場合、シュレディンガー方程式の形式解は

$$|\psi(t)\rangle = U|\psi(0)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle \quad (2.2)$$

と求められる。時間発展で確率が保存することを要請すると、時間発展演算子 U はユニタリ演算子になり、その生成子であるハミルトニアン H はエルミート演算子となる必要がある。

2.2 開放量子系の時間発展

一方で、環境と相互作用する開放量子系を考えると、ヒルベルト空間のベクトルで記述できない量子状態が現れる。例えば逆温度 β の熱浴と相互作用する系では、固有エネルギー E_n の状態 $|n\rangle$ の分布確率はカノニカル分布 $p_n = \exp(-\beta E_n)/Z$ (Z は分配関数) に従い、複数の状態が古典的に混ざった状態が実現する。このような状態はベクトルにより記述できないが、代わりに演算子を用いることで表現することができる。状態ベクトルで表現できる量子状態を純粋状態、状態ベクトルで表現できない量子状態を混合状態と呼ぶ。一般に、確率 p_n で量子状態 $|\psi_n\rangle$ が混合した混合状態は演算子

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (2.3)$$

により記述できる。混合状態を記述する演算子 ρ は密度演算子と呼ばれる。確率解釈の要請から、密度演算子は全ての固有値が非負なエルミート演算子で、 $\text{tr}[\rho] = 1$ を満たす必要がある。純粋状態 $|\psi\rangle$ は密度演算子の形式では $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ と表示される。密度演算子 ρ の純粋状態への近さを表す量に純粋度 $\text{tr}[\rho^2]$ がある。ヒルベルト空間の次元を d とした時に純粋度は $1/d \leq \text{tr}[\rho^2] \leq 1$ を満たし、 $\text{tr}[\rho^2] = 1$ となることと ρ が純粋状態であることは同値である。

密度演算子を用いることで、全体系の状態から部分系の状態を得ることができる。全体系の密度演算子を ρ とし、全体系を二つの部分系に分割することを考える。全体系のヒルベルト空間 \mathcal{H} を $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$ と分割した時に、部分系 a の密度演算子 ρ_a は

$$\rho_a = \text{tr}_b[\rho] \quad (2.4)$$

で得られる。 tr_b は部分系のヒルベルト空間 \mathcal{H}_b におけるトレースをとることを表す。(2.4) 式で得られる密度演算子のことを特に縮約密度演算子と呼ぶ。一般に、全体系の密度演算子 ρ が純粋状態であっても、その縮約密度演算子は純粋状態とはならない。例えば二つの二準位系からなる系の密度演算子が $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, $|\psi\rangle = (|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle)/\sqrt{2}$ と書かれる場合を考えると、一つの二準位系における縮約密度演算子は $(|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|)/2$ となり、混合状態となる。

次に、密度演算子に対する時間発展を考える。環境と相互作用しない孤立系を考えると、(2.3) 式内の純粋状態 $|\psi_n\rangle$ はそれぞれシュレディンガー方程式に従う。(2.1) 式を (2.3) 式内の $|\psi_n\rangle$ に対して適用することで、密度演算子に対する孤立系の時間発展方程式

$$i \frac{d}{dt} \rho = [H, \rho] \quad (2.5)$$

を得る。(2.5) 式はフォン・ノイマン方程式と呼ばれる。一方で、環境と相互作用する開放量子系の時間発展は、密度演算子から密度演算子への線形写像 (超演算子) として定義される。孤立系では状態ベクトルのノルムを保存するために時間発展演算子がユニタリになったように、開放量子系の時間

発展でも密度演算子の正定値性とトレースが保存される必要がある。そのような時間発展は CPTP (Completely-Positive Trace-Preserving) 写像で与えられる。ヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の有界な線形演算子全体の集合を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ と書くと、CPTP 写像 $\hat{\Phi} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は演算子 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して線形であり、時間発展によりトレースを保存する: $\text{tr}[A] = \text{tr}\{\hat{\Phi}[A]\}$. 更に、任意のヒルベルト空間 \mathcal{H}' と正定値演算子 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}')$ に対して、 $\hat{\Phi} \otimes \hat{\mathcal{I}}[B]$ は常に正定値性を保つ。ここで、 $\hat{\mathcal{I}}$ は \mathcal{H}' 上の恒等超演算子である。これは、着目系と相互作用しない自明な系を付け加えても、CPTP 写像による時間発展で密度演算子の正定値性が保たれることを保証する。また、孤立系ではユニタリ演算子の生成子から連続的な時間発展方程式であるシュレディンガー方程式を得ることができたように、開放量子系においても CPTP 写像の生成子を考えることで連続的な時間発展方程式を得ることができる。密度演算子を時間 t だけ時間発展させる CPTP 写像を $\hat{\Phi}(t)$ とした時、任意の $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ に対して

$$\hat{\Phi}(t_1)\hat{\Phi}(t_2) = \hat{\Phi}(t_1 + t_2) \quad (2.6)$$

を満たす場合には

$$\hat{\Phi}(t) = e^{-i\hat{\mathcal{L}}t} \quad (2.7)$$

と書くことができ、連続時間での時間発展方程式が

$$i\frac{d}{dt}\rho = \hat{\mathcal{L}}[\rho] \quad (2.8)$$

と得られる。証明は省略するが、(2.6) 式を満たす CPTP 写像に関しては、その生成子 $\hat{\mathcal{L}}$ が

$$i\frac{d}{dt}\rho = \hat{\mathcal{L}}[\rho] = [H, \rho] + i\sum_{\mu} (2L_{\mu}\rho L_{\mu}^{\dagger} - \{L_{\mu}^{\dagger}L_{\mu}, \rho\}) \quad (2.9)$$

と得られることが知られている [53, 54]。 (2.9) 式は孤立系でのシュレディンガー方程式やフォン・ノイマン方程式に相当する開放量子系の時間発展方程式で、GKSL (Gorini-Kossakowski-Shdarshan-Lindblad) 方程式と呼ばれる。右辺第 1 項はフォン・ノイマン方程式と同型の項であり、系のハミルトニアンによるユニタリな時間発展を表す。右辺第 2 項が環境との相互作用により生じる散逸的な時間発展を表す。 L_{μ} は環境との相互作用により着目系に生じる作用を表す演算子で、ジャンプ演算子と呼ぶ。また、生成子である線形超演算子 $\hat{\mathcal{L}}$ をリンドブラディアンと呼ぶ。以降、本論文では主に GKSL 方程式を用いて開放量子系を解析する。

2.3 GKSL 方程式のミクロな描像からの導出

前節では密度演算子や CPTP 写像の満たすべき性質から公理的に GKSL 方程式を導入した。一方で、開放量子系の時間発展は、環境を含んだ合成系のシュレディンガー方程式から環境の自由度を消去することによっても得ることができる。本節では、上述の方法により GKSL 方程式を導出する。

着目系と環境のヒルベルト空間をそれぞれ $\mathcal{H}_S, \mathcal{H}_E$ と書く。着目系のハミルトニアン、環境のハミルトニアン、両者の相互作用ハミルトニアンをそれぞれ $H_S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S), H_E \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_E), H_{SE} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E)$ と書く。この時、合成系のハミルトニアンは

$$H_{\text{tot}} = H_S \otimes I_E + I_S \otimes H_E + H_{SE} \quad (2.10)$$

と書くことができる。ここで、 I_p ($p = S, E$) は着目系及び環境に作用する恒等演算子である。また、合成系の密度演算子を $\rho_{\text{tot}}(t)$ と書く。この時、自由ハミルトニアン $H_0 := H_S \otimes I_E + I_S \otimes H_E$ による相互作用表示 $O^I(t) := e^{iH_0 t} O(t) e^{-iH_0 t}$ に移ると、時間発展はフォン・ノイマン方程式

$$i \frac{d}{dt} \rho_{\text{tot}}^I(t) = [H_{SE}^I, \rho_{\text{tot}}^I(t)] \quad (2.11)$$

で与えられる。(2.11) 式の形式解は

$$\rho_{\text{tot}}^I(t) = \rho_{\text{tot}}^I(0) - i \int_0^t ds [H_{SE}^I(s), \rho_{\text{tot}}^I(s)] \quad (2.12)$$

と求められる。この形式解を (2.11) 式に再度代入すると、

$$i \frac{d}{dt} \rho_{\text{tot}}^I(t) = [H_{SE}^I(t), \rho_{\text{tot}}^I(0)] - i \int_0^t ds [H_{SE}^I(t), [H_{SE}^I(s), \rho_{\text{tot}}^I(s)]] \quad (2.13)$$

が得られる。ここで、初期時刻 $t = 0$ で着目系と環境が無相関であることを要請する: $\rho_{\text{tot}}(0) = \rho(0) \otimes \rho_E$. 更に、環境の初期状態 ρ_E が $\text{tr}_E[H_{SE}\rho_E] = 0$, $[H_E, \rho_E] = 0$ を満たすことも要請する。前者は相互作用ハミルトニアンのエネルギーの原点をずらすことで常に満たすことができる。後者は ρ_E が環境の時間発展に対して定常であることを意味する。これらの要請のもとに (2.13) 式で環境に関するトレースをとると、第一項を消去することができ、

$$i \frac{d}{dt} \rho^I(t) = -i \int_0^t d\text{str}_E \{ [H_{SE}^I(t), [H_{SE}^I(s), \rho_{\text{tot}}^I(s)]] \} \quad (2.14)$$

となる。

更に、環境との相互作用が弱く、着目系と環境の間のエンタングルメントが小さいと仮定し、(2.14) 式右辺の積分内で $\rho_{\text{tot}}^I(s) \simeq \rho^I(s) \otimes \rho_E$ と近似する。また、環境との相互作用で生じる非マルコフ的な効果は無視できるとして、積分内で $\rho^I(s) \simeq \rho^I(t)$ と近似し、積分の下限を $-\infty$ とする。これらの近似を用いると、(2.14) 式を

$$i \frac{d}{dt} \rho^I(t) = -i \int_0^\infty d\text{str}_E \{ [H_{SE}^I(t), [H_{SE}^I(t-s), \rho_{\text{tot}}^I(t)]] \} \quad (2.15)$$

のように書き直せる。ここで、相互作用ハミルトニアンを以下のように分解する:

$$H_{SE} = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \otimes B_{\alpha} = \sum_{\alpha, \omega} A_{\alpha}(\omega) \otimes B_{\alpha}. \quad (2.16)$$

$A_\alpha \in \mathcal{H}_S, B_\alpha \in \mathcal{H}_E$ はエルミート演算子であり、 $A_\alpha(\omega)$ はエネルギー ϵ を持つ H_S の固有状態への射影 $\Pi(\epsilon)$ を用いて

$$A_\alpha(\omega) := \sum_{\epsilon' - \epsilon = \omega} \Pi(\epsilon) A_\alpha \Pi(\epsilon') \quad (2.17)$$

と定義される。定義より $A_\alpha(\omega)$ は

$$[H_S, A_\alpha(\omega)] = -\omega A_\alpha(\omega), [H_S, A_\alpha^\dagger(\omega)] = \omega A_\alpha^\dagger(\omega), \sum_\omega A_\alpha(\omega) = A_\alpha \quad (2.18)$$

を満たす。(2.18) 式を用いると、相互作用表示での相互作用ハミルトニアンは

$$H_{SE}^I(t) = \sum_{\alpha, \omega} e^{-i\omega t} A_\alpha(\omega) \otimes B_\alpha^I(t) = \sum_{\alpha, \omega} e^{i\omega t} A_\alpha^\dagger(\omega) \otimes B_\alpha^{I\dagger}(t) \quad (2.19)$$

と簡略化される。(2.19) 式を用いて (2.15) 式を書き直すと、

$$i \frac{d}{dt} \rho^I(t) = i \sum_{\omega, \omega'} \sum_{\alpha, \beta} e^{i(\omega' - \omega)t} \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) [A_\beta(\omega) \rho^I(t) A_\alpha^\dagger(\omega') - A_\alpha^\dagger(\omega') A_\beta(\omega) \rho^I(t) + \text{H.c.}] \quad (2.20)$$

となる。ここで環境の相関関数のフーリエ変換を

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) := \int_0^\infty ds e^{i\omega s} \text{tr}[B_\alpha^{I\dagger}(t) B_\beta^I(t-s) \rho_E] \quad (2.21)$$

とした。H.c. は、括弧内の項に対してそのエルミート共役を加えることを表す。(2.21) 式の表式には時間 t が含まれているが、 ρ_E が環境の時間発展に対して定常であることから、(2.21) 式は t に依存しない。

(2.20) 式を更に簡略化するために、回転波近似と呼ばれる近似を行う。この近似では、着目したい時間スケールに比較して、 $|\omega - \omega'|^{-1}$ が十分小さいとみなす。この時、 $\omega \neq \omega'$ である場合に $e^{i(\omega' - \omega)t}$ が着目する時間スケールに比べて非常に早く振動するため、(2.20) 式内の $\omega \neq \omega'$ の項は時間平均して 0 とみなすことができる。従って $\omega = \omega'$ の項のみが残ることになり、(2.20) 式を

$$i \frac{d}{dt} \rho^I(t) = i \sum_\omega \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) [A_\beta(\omega) \rho^I(t) A_\alpha^\dagger(\omega) - A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta(\omega) \rho^I(t) + \text{H.c.}] \quad (2.22)$$

と書き直せる。更に、 Γ をエルミート成分と反エルミート成分

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) = \gamma_{\alpha\beta}(\omega) + iS_{\alpha\beta}(\omega) \quad (2.23)$$

と分解すると、Lindblad 型の方程式

$$i \frac{d}{dt} \rho^I(t) = [H_{LS}, \rho^I(t)] + \hat{\mathcal{D}}[\rho^I(t)], \quad (2.24)$$

$$H_{LS} := \sum_\omega \sum_{\alpha, \beta} S_{\alpha\beta}(\omega) A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta(\omega), \quad (2.25)$$

$$\hat{\mathcal{D}}[\rho] := \sum_\omega \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha\beta}(\omega) [2A_\beta(\omega) \rho A_\alpha^\dagger(\omega) - \{A_\alpha^\dagger(\omega) A_\beta(\omega), \rho\}] \quad (2.26)$$

が得られる。 γ を対角化し、

$$\gamma_{\alpha\beta}(\omega) = \sum_i \gamma'_i(\omega) U_{\alpha i}^\dagger(\omega) U_{i\beta}(\omega) \quad (2.27)$$

と書いた時、

$$L_\mu(\omega) := \sqrt{\gamma'_\mu(\omega)} \sum_\alpha U_{\mu\alpha}(\omega) A_\alpha(\omega) \quad (2.28)$$

と新たな演算子を定義し、相互作用描像からシュレディンガー描像に戻すと、最終的に GKSL 方程式

$$i \frac{d}{dt} \rho(t) = [H_S + H_{LS}, \rho(t)] + \sum_{\mu, \omega} (2L_\mu(\omega) \rho(t) L_\mu^\dagger(\omega) - \{L_\mu^\dagger(\omega) L_\mu(\omega), \rho\}) \quad (2.29)$$

が得られる。(2.18) 式より $[H_S, H_{LS}] = 0$ であるため、 H_{LS} は着目系のハミルトニアン固有状態を変化させない。

2.4 GKSL 方程式の性質

本節では GKSL 方程式の一般的な性質を議論する。初めに、GKSL 方程式の生成子が属する超演算子の数学的な取り扱いを紹介する。ヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の有界な線形演算子全体の集合 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を考えると、Hilbert-Schmidt 内積

$$(A, B) := \text{tr}[A^\dagger B] \quad (2.30)$$

を入れることにより、 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 自身もヒルベルト空間となる。従って、密度演算子を含む $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の元をベクトルとみなすことができる。リンドブラディアンや CPTP 写像等の超演算子は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の有界な線形演算子となり、孤立系の場合のハミルトニアンや時間発展演算子と類似の取り扱いが可能となる。 \mathcal{H} が n 次元ヒルベルト空間であるとすると、 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は適当な n 次元列ベクトル \mathbf{a}_j を用いて $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ と行列表示される。この時、

$$\text{vec}(A) := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

と n^2 次元ベクトルを構成することで、具体的に $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の元のベクトル表示を得られる。この対応をベクトル化と呼ぶ。この表示を用いると Hilbert-Schmidt 内積は

$$(A, B) = [\text{vec}(A)]^\dagger \text{vec}(B) \quad (2.32)$$

となり、通常のベクトルの内積と同じ形となる。ベクトル化は任意の $A, B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して、

$$\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A) \text{vec}(B). \quad (2.33)$$

を満たすことが知られている。この公式を用いることにより、演算子のベクトル化に伴う超演算子の行列表示を得ることができる。

(2.33) 式のベクトル化の公式を (2.9) 式の GKSL 方程式に適用することで、ベクトル化した GKSL 方程式

$$i \frac{d}{dt} \text{vec}(\rho) = \mathcal{L} \text{vec}(\rho), \quad (2.34)$$

$$\mathcal{L} = I \otimes H - H^T \otimes I + i \sum_{\mu} (2L_{\mu}^* \otimes L_{\mu} - I \otimes L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} - L_{\mu}^T L_{\mu}^* \otimes I) \quad (2.35)$$

を得ることができる。(2.34) 式はシュレディンガー方程式と同型の方程式となるが、シュレディンガー方程式とは異なり、リンドブラディアンは非エルミートとなる。[超演算子 $\hat{\mathcal{L}}$ のエルミート共役は Hilbert-Schmidt 内積を用いて $(\hat{\mathcal{L}}^{\dagger}[A], B) = (A, \hat{\mathcal{L}}[B])$ と定義されるが、行列表示 \mathcal{L} のエルミート共役を考えることと等価である。] 非エルミート行列では、複素固有値が現れる他、左右の固有ベクトルを考える必要がある。非エルミート行列 A に対して、右・左固有ベクトル $|\psi_j\rangle, \langle\langle\psi_j|$ は

$$A |\psi_j\rangle = \lambda_j |\psi_j\rangle, \quad (2.36)$$

$$\langle\langle\psi_j| A = \lambda_j \langle\langle\psi_j| \quad (2.37)$$

で与えられる。これらは規格直交化することができ、

$$\langle\langle\psi_j|\psi_k\rangle = \langle\psi_j|\psi_k\rangle = \delta_{j,k} \quad (2.38)$$

と取ることができる。エルミート行列やユニタリ行列の場合には $\langle\langle\psi_j| = |\psi_j\rangle^{\dagger}$ となるが、一般には左右の固有ベクトルはエルミート共役では繋がらない。非エルミート行列 A が対角化可能な場合には、 A を固有値分解

$$A = \sum_j \lambda_j |\psi_j\rangle \langle\langle\psi_j| \quad (2.39)$$

することができる。非エルミート行列 A を生成子とする時間発展演算子 $U(t) = e^{-iAt}$ を考えると、 $\lambda_j = a_j + ib_j$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ と分解した時に、

$$U(t) = \sum_j e^{b_j t} e^{-ia_j t} |\psi_j\rangle \langle\langle\psi_j| \quad (2.40)$$

と表示され、 U は非ユニタリとなる。固有状態 $|\psi_j\rangle$ は固有値の虚部 b_j が正の場合には指数的に増幅し、負の場合には指数的に減衰することがわかる。

リンドブラディアンの固有値方程式を

$$\hat{\mathcal{L}}[\rho_j] = \lambda_j \rho_j \quad (2.41)$$

とすると、任意の初期状態をリンドブラディアンの固有演算子を用いて $\rho(0) = \sum_j c_j \rho_j$ のように展開することができる。 $\rho(0)$ は

$$\rho(t) = e^{-i\hat{\mathcal{L}}t}[\rho(0)] = \sum_j c_j e^{-i\lambda_j t} \rho_j \quad (2.42)$$

と時間発展する。(2.42) 式の時間発展も正值性とトレースを保存するため、リンドブラディアン固有値には制約が課せられる。一つは固有値の虚部が 0 以下になることであり、固有演算子 ρ_j が時間発展で増幅しないことを反映している。もう一つは、実部が非ゼロの固有値 λ が存在すると、実部だけが反転したペア $-\lambda^*$ も存在することである。この時、対応する固有演算子も互いにエルミート共役の関係になり、時間発展後の密度演算子の正值性を保証する。また、Hilbert-Schmidts 内積から誘導される密度演算子のノルムは $(\rho, \rho) = \text{tr}[\rho^2]$ であり、純粋度に対応する。典型的な開放量子系では時間が経過するにつれて状態の純粋度が減少していくが、これは $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ でのノルムが減少することに対応しており、リンドブラディアンの非エルミート性が反映されている。孤立系の時間発展であるフォン・ノイマン方程式の場合だと、(2.35) 式の第 3 項以降が全て消えるため、リンドブラディアンはエルミートとなり、純粋度が保存される。

リンドブラディアンは必ず 1 個はゼロ固有値を有し、定常状態を有することが示せる。GKSL 方程式はトレースを保存するため、密度演算子 $\rho(t)$ のトレースは常に 1 だが、これを (2.32) 式を用いて書き直すと、 $[\text{vec}(I)]^\dagger \text{vec}[\rho(t)] = 1$ となる。この式の両辺を時刻 t で微分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= [\text{vec}(I)]^\dagger \frac{d}{dt} \text{vec}[\rho(t)] \\ &= [\text{vec}(I)]^\dagger \mathcal{L} \text{vec}[\rho(t)] \end{aligned} \quad (2.43)$$

が得られる。(2.43) 式は任意の密度演算子 ρ に対して成立するため、

$$[\text{vec}(I)]^\dagger \mathcal{L} = 0 \quad (2.44)$$

となる。これは、リンドブラディアン \mathcal{L} が常に固有値 0 の左固有ベクトルを有することを意味する。従って、対応する右固有ベクトル $\text{vec}(\rho_{\text{ss}})$ も存在し、これが定常状態を記述する密度演算子となる。

また、孤立系では量子状態が時間発展するシュレディンガー描像と、物理量が時間発展するハイゼンベルク描像が存在したが、GKSL 方程式でもハイゼンベルク描像を考えることができる。物理量 A の時刻 t での期待値が Hilbert-Schmidts 内積を用いて $\langle A(t) \rangle = \text{tr}[A\rho(t)] = (A, \rho(t))$ と書けることを用いると、

$$\langle A(t) \rangle = \text{tr}\{Ae^{-i\hat{\mathcal{L}}t}[\rho(0)]\} = \text{tr}\{e^{i\hat{\mathcal{L}}^\dagger t}[A]\rho(0)\} \quad (2.45)$$

と書き換えることができ、 $A(t) = e^{i\hat{\mathcal{L}}^\dagger t}[A]$ と物理量の時間発展が求められる。連続時間での時間発展を考えると、ハイゼンベルク描像の場合にも GKSL 型の方程式

$$i \frac{d}{dt} A = \hat{\mathcal{L}}^\dagger[A] = -[H, A] + i \sum_{\mu} (2L_{\mu}^\dagger A L_{\mu} - \{L_{\mu}^\dagger L_{\mu}, A\}) \quad (2.46)$$

に従う。

2.5 非エルミート量子力学

非エルミート量子力学とは、ハミルトニアンが非エルミートであるシュレディンガー方程式で時間発展が与えられる体系のことを指す。この時、(2.40) 式で見たように、時間発展演算子 U がユニタリ演算子でなくなるため、時間発展により量子状態のノルムが時間変化する。そのため、環境との相互作用により状態が減衰するような場合に、非エルミート量子力学が有効理論として用いられ、原子核の崩壊の説明 [78] 等に用いられてきた。その他にも、近軸近似した電磁波の波動方程式を考えると、その方程式はシュレディンガー方程式と同型になり、ハミルトニアンに対応する部分が非エルミートになることが知られている。この場合、非エルミート性は光の流入や散逸に対応し、非エルミート性を用いた様々な光学デバイスが提案・実現されている [41–43, 79, 80]。

非エルミート量子力学は開放量子系でも考えることができる。任意の CPTP 写像は

$$\hat{\Phi}[\rho] = \sum_j M_j \rho M_j^\dagger, \quad \sum_j M_j^\dagger M_j = I \quad (2.47)$$

の形で表示できることが知られている [81]。この演算子 $\{M_j\}$ で記述される測定をした時、測定結果 j が観測される確率 p_j は

$$p_j = \text{tr}[M_j \rho M_j^\dagger], \quad (2.48)$$

測定後の量子状態は

$$\rho_j = M_j \rho M_j^\dagger / p_j \quad (2.49)$$

となる。これらを用いると、(2.47) 式より、任意の CPTP 写像は

$$\hat{\Phi}[\rho] = \sum_j p_j \rho_j \quad (2.50)$$

と表示できる。(2.50) 式は、量子測定 $\{M_j\}$ を行った後、測定結果 j に関してアンサンブル平均をとることで任意の CPTP 写像が表現できることを示す。アンサンブル平均をとらずに特定の測定結果 j のみを取り出すと、その時間発展は (2.49) 式で与えられ、非ユニタリ時間発展演算子 M_j による時間発展と等価になる。リンドブラディアンから生成される時間発展超演算子も CPTP 写像を生成するため、同様の考え方をすると、GKSL 方程式で記述される開放量子系と量子連続測定下にある系を対応づけることができ、特定の測定結果のみを取り出すことで非エルミートな時間発展を得ることができる。量子測定として、 L_μ で記述されるジャンプ過程が起きたこと、あるいはどのジャンプ過程も発生しなかったことを観測するものを考える。すると、GKSL 方程式と等価な時間発展方程式として、成分が確率変

数となる状態ベクトルに対する確率シュレディンガー方程式

$$id|\psi(t)\rangle = \left[\left(H - i \sum_{\mu} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \right) |\psi(t)\rangle + i \sum_{\mu} \|L_{\mu} |\psi(t)\rangle\|^2 |\psi(t)\rangle \right] dt + \sum_{\mu} \left(\frac{L_{\mu} |\psi(t)\rangle}{\|L_{\mu} |\psi(t)\rangle\|} - |\psi(t)\rangle \right) dN_{\mu}(t) \quad (2.51)$$

を考察することができる。\$dN_{\mu}(t)\$ は \$dN_{\mu}(t)dN_{\nu}(t) = \delta_{\mu,\nu}dN_{\mu}(t)\$, \$E[dN_{\mu}(t)] = \|L_{\mu} |\psi(t)\rangle\|^2 dt\$ を満たすポアソン増分である。\$E[\cdot]\$ は確率変数に対する期待値を表す。物理的には、\$N_{\mu}(t)\$ は \$L_{\mu}\$ によるジャンプ過程が発生した回数に対応する。(2.51) 式に現れる状態ベクトルから作られる密度演算子 \$|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|\$ に対して、確率変数に関する期待値を取ると、その時間発展は (2.9) 式の GKSL 方程式と等しくなる。

ここで、(2.51) 式で記述される系においてジャンプ過程が発生しなかった場合のみを選択した時間発展を考察する。その場合には \$dN_{\mu} = 0\$ となるため、時間発展は

$$id|\psi(t)\rangle = \left[\left(H - i \sum_{\mu} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \right) |\psi(t)\rangle + i \sum_{\mu} \|L_{\mu} |\psi(t)\rangle\|^2 |\psi(t)\rangle \right] dt \quad (2.52)$$

となる。(2.52) 式は状態ベクトルに関して非線形だが、解析的に解くことができ、形式解は

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-iH't} |\psi(0)\rangle}{\|e^{-iH't} |\psi(0)\rangle\|}, \quad H' := H - i \sum_{\mu} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \quad (2.53)$$

と求められる。この解は、波動関数が非エルミートハミルトニアン \$H'\$ で生成される非ユニタリな時間発展をし、確率解釈を保つために常に規格化され続けることを表す。つまり、GKSL 方程式においてジャンプ過程が起これない場合のみを事後選択することにより、非エルミートなダイナミクスを実現できる。あるいは、ジャンプ過程が起これないくらい短時間の時間発展を考えると、そのダイナミクスは非エルミート量子力学で有効的に記述できる。

第3章

物質のトポロジカル相

物性物理学の大きな目標の一つは、様々な物質相を分類することにある。常磁性-強磁性転移のような物質相の転移には多くの場合、自発的な対称性の破れが伴うことが知られていた。一方で、近年では自発的な対称性の破れを伴わない新たな物質相である、トポロジカル相が注目を集めている。非自明なトポロジカル相を持つ物質では、物質の境界にエッジ状態と呼ばれる頑強な表面状態が現れることから、基礎研究と応用の両面から注目されている。本章では物質のトポロジカル相について説明をする。また、近年盛んに研究が行われている非平衡系でのトポロジカル相の一例として、非エルミート系のトポロジカル相についてもレビューする。

3.1 トポロジカル物質

通常物質相では局所的な秩序変数により相が指定されていたが、トポロジカル相では、物質のバルク状態から計算される大域的な量である、トポロジカル不変量が相を特徴づける。以降、非自明なトポロジカル不変量を有する物質あるいは相をトポロジカル物質、トポロジカル相と呼ぶ。トポロジカル不変量は名前の通り位相不変な量であり、ハミルトニアン H の微視的な構造に依存しない。一般に、ハミルトニアン H のエネルギーギャップと対称性を保つような変形や摂動に対して、トポロジカル不変量は値を変えない。また、異なるトポロジカル不変量を有する物質が空間的に接している場合に、その界面にはエッジ状態と呼ばれる界面付近に局在した状態がエネルギーギャップを閉じるように出現する。出現するエッジ状態の個数は二つの相が有するトポロジカル不変量の差で与えられ、この対応はバルク-エッジ対応と呼ばれる。バルク-エッジ対応から、トポロジカル不変量と同様に、エッジ状態もギャップと対称性を保つ摂動に対して安定に存在する。

トポロジカル物質の代表例に量子ホール絶縁体 [3] がある。二次元電子系に垂直に磁場を印加し、そ

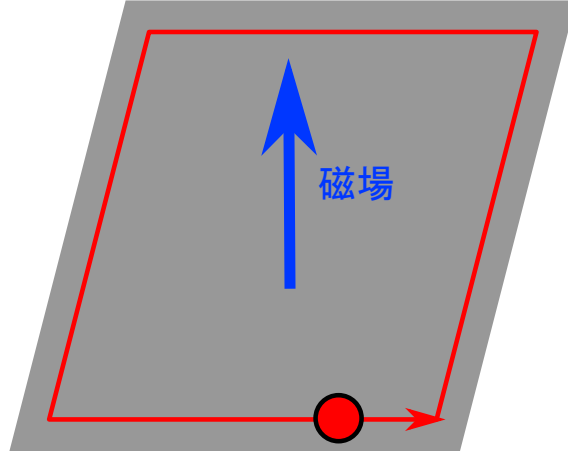


図 3.1: 量子ホール絶縁体に現れるカイラルエッジ状態。

の時の電気伝導度やホール伝導度を測定すると、ホール伝導度が

$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}, \nu \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

のように量子化することが知られている。この時、 ν がトポロジカル不変量に相当し、 ν はチャーン数

$$\nu = \sum_n \int_{\text{BZ}} \frac{d^2 \mathbf{k}}{2\pi} \left(\frac{\partial a_{n,y}}{\partial k_x} - \frac{\partial a_{n,x}}{\partial k_y} \right) \quad (3.2)$$

で与えられる。 n はバンドの指数を表し、 a は n 番目のバンドにおける Berry 接続

$$\mathbf{a}_n := -i \langle u_{n\mathbf{k}} | \Delta_{\mathbf{k}} | u_{n\mathbf{k}} \rangle \quad (3.3)$$

である。 \int_{BZ} はブリルアンゾーン全体での積分を表す。 $|u_{n\mathbf{k}}\rangle$ は並進対称性を仮定したハミルトニアン
の固有状態である。真空のトポロジカル不変量は 0 であるため、量子ホール絶縁体の表面ではトポロジ
カル不変量の差が ν となる。それに対応して、固定端条件で量子ホール絶縁体のハミルトニアンを対角
化すると、 ν 個のエッジ状態が出現する。これらのエッジ状態は図 3.1 に示すように、物質の端を一方
向に運動し続ける状態であり、カイラルエッジ状態と呼ばれる。一つのカイラルエッジ状態がホール伝
導度に e^2/h だけ寄与し、エッジ状態が ν 個存在することにより、ホール伝導度が (3.1) 式のように量
子化する。

量子ホール絶縁体では磁場を印加するため、時間反転対称性が破れる。しかし、トポロジカル物質の
中には対称性に保護された相を有する物質も存在する。対称性に保護されたトポロジカル相を有するモ
デルの中で最も基本的なものに、SSH (Su - Schrieffer-Heeger) モデル [82] が挙げられる。SSH モデル
は二種類のスピンレスフェルミオンが交互に並んだ 1 次元鎖で、ハミルトニアンは

$$H_{\text{SSH}} = \sum_j (t_0 c_{j,B}^\dagger c_{j,A} + t_1 c_{j,B}^\dagger c_{j+1,A} + \text{H.c.}), t_j \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

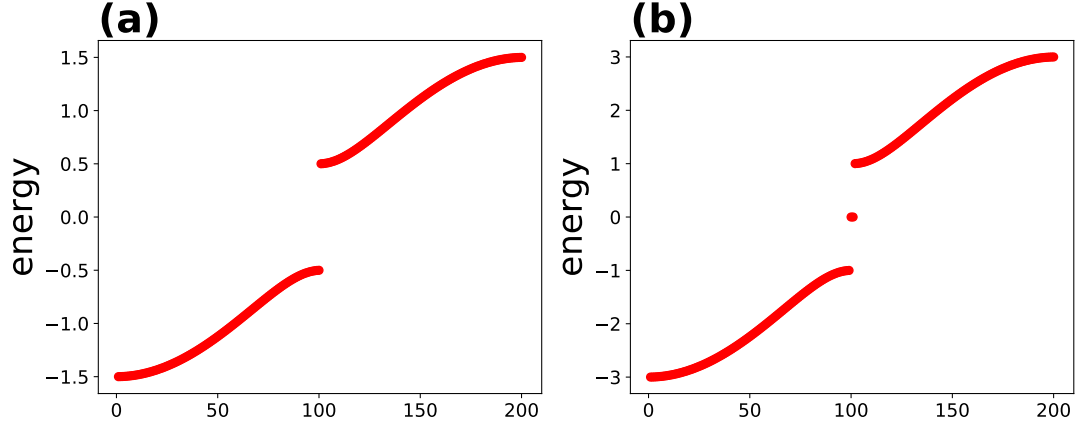


図 3.2: 固定端境界条件を課した SSH モデルのハミルトニアン \tilde{H}_{SSH} のスペクトル。(a) $t_1 = 0.5t_0$ ($w = 0$) の場合。(b) $t_1 = 2t_0$ ($w = 1$) の場合。

で与えられる。 $c_{x,s}^\dagger$, $c_{x,s}$ は位置 x , 副格子 $s = A, B$ の電子の生成・消滅演算子である。 $\mathbf{c} := (c_{1,A}, c_{1,B}, \dots, c_{n,A}, c_{n,B})^T$ として、ハミルトニアンを $H_{\text{SSH}} = \mathbf{c}^\dagger \cdot \tilde{H}_{\text{SSH}} \mathbf{c}$ と表示すると、係数行列 \tilde{H}_{SSH} を対角化することで H_{SSH} を対角化できるため、以降は \tilde{H}_{SSH} に着目する。

$$\tilde{H}_{\text{SSH}} = \sum_j (t_0 |j, B\rangle \langle j, A| + t_1 |j, B\rangle \langle j+1, A|) \quad (3.5)$$

であり、 \tilde{H}_{SSH} は対称性

$$\Gamma \tilde{H}_{\text{SSH}} \Gamma = -\tilde{H}_{\text{SSH}}, \quad \Gamma = \sum_j (|j, A\rangle \langle j, A| - |j, B\rangle \langle j, B|) \quad (3.6)$$

を持つ。この対称性はカイラル対称性と呼ばれ、SSH モデルではカイラル対称性に保護されたエッジ状態が出現する。並進対称性を課して運動量空間で \tilde{H}_{SSH} を対角化すると、その固有エネルギーは

$$E(k) = \sqrt{t_0^2 + t_1^2 + 2t_0 t_1 \cos k} \quad (3.7)$$

と得られ、 $t_0 = t_1$ の場合にギャップが閉じる。カイラル対称性下でのトポロジカル不変量は巻き付き数

$$w := -\frac{1}{4\pi i} \int_{\text{BZ}} \text{tr} \left[\sigma_z H(k)^{-1} \frac{dH(k)}{dk} dk \right] \quad (3.8)$$

で与えられる。巻き付き数を計算すると、その値は $t_0 > t_1$ の場合に 0, $t_0 < t_1$ の場合に 1 となり、ギャップが閉じない限り巻き付き数の値は変化しない。固定端境界条件を課した場合のスペクトルは図 3.2 のようになり、トポロジカル不変量である巻き付き数の値に応じて、ゼロエネルギー状態の出現の有無が変化する。

3.2 孤立平衡系のトポロジカル相

前節ではトポロジカル不変量がトポロジカル相を特徴づけ、エッジ状態という特殊な状態が非自明なトポロジカル不変量に伴って現れることを見た。トポロジカル相を調べる上で、どのような場合にトポロジカル不変量が非自明な値を有しうるのかに関心が向くが、トポロジカル不変量の値域はハミルトニアンの対称性により系統的に分類することができる。本節では、孤立平衡系におけるハミルトニアンのトポロジカルな分類を紹介する。

3.2.1 一体ハミルトニアンと対称性

本章では n 個のフェルミオンからなる系で、フェルミオン間に多体の相互作用がない場合のみを考える。この状況を数式で表現すると、ハミルトニアンが

$$H = \sum_{j,k} (c_j^\dagger, c_j) \tilde{H}_{j,k} \begin{pmatrix} c_k \\ c_k^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

と書き表せられることに対応する。 c, c^\dagger はフェルミオンの生成・消滅演算子を表し、反交換関係 $\{c_j, c_k\} = 0$, $\{c_j, c_k^\dagger\} = \delta_{j,k}$ を満たす。ハミルトニアン H のエルミート性を反映して、係数行列 \tilde{H} もエルミート行列となる。絶縁体や金属等、系の粒子数が保存する場合には $\tilde{H}_{j,k}$ が対角行列になり、 H 内に $c_j^\dagger c_k^\dagger$ のような粒子数を変化させる項が現れない。超伝導体の場合には $U(1)$ 対称性が破れ、 $\tilde{H}_{j,k}$ は非対角成分を有する。 \tilde{H} を対角化することで H も対角化することができるため、一体ハミルトニアンではどちらを考えても良い。 \tilde{H} のことを一粒子ハミルトニアンと呼ぶ。

(3.9) 式のハミルトニアンに作用する対称性を考える。ここでは簡単のため、空間座標に作用せず、粒子の内部自由度 (例えばスピンや副格子の自由度) に作用する対称性を考える。量子力学では、系の対称性はユニタリ変換か反ユニタリ変換に対する系の不変性で表される。ユニタリ・反ユニタリ変換のそれぞれに関して、対称性の操作で消滅演算子を消滅演算子に変換するか、生成演算子に変換するかの二通りが考えられるため、全部で四種類の対称性変換

$$U c_i U^\dagger = \sum_j U_{i,j} c_j, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{T} c_i \mathcal{T}^\dagger = \sum_j T_{i,j} c_j, \quad T^2 = \varepsilon_T I, \quad \mathcal{T} i \mathcal{T}^{-1} = -i, \quad (3.11)$$

$$\mathcal{C} c_i \mathcal{C}^\dagger = \sum_j \Xi_{i,j}^* c_j^\dagger, \quad \Xi^2 = \varepsilon_\Xi I, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{S} c_i \mathcal{S}^\dagger = \sum_j \Gamma_{i,j}^* c_j^\dagger, \quad \Gamma^2 = I, \quad \mathcal{S} i \mathcal{S}^{-1} = -i \quad (3.13)$$

が考えられる。ここで $\varepsilon_T, \varepsilon_\Xi = \pm 1$ である。これらの対称性は、順にユニタリ対称性、時間反転対称性、粒子正孔対称性、カイラル対称性と呼ばれる。対称性変換のユニタリ性から、(3.10)-(3.13) 式内の

係数行列 U, T, Ξ, Γ はユニタリ行列または反ユニタリ行列になる。これらの対称性変換に対するハミルトニアンの変換性 $[\mathcal{V}, H] = 0, \mathcal{V} = U, T, C, S$ を要求すると、一粒子ハミルトニアンに対する対称性の関係式

$$U^\dagger \tilde{H} U = \tilde{H}, \quad (3.14)$$

$$T^\dagger \tilde{H} T = \tilde{H}, \quad T^2 = \varepsilon_T I, \quad T i T^{-1} = -i, \quad (3.15)$$

$$\Xi^\dagger \tilde{H} \Xi = -\tilde{H}, \quad \Xi^2 = \varepsilon_\Xi I, \quad \Xi i \Xi^{-1} = -i, \quad (3.16)$$

$$\Gamma^\dagger \tilde{H} \Gamma = -\tilde{H}, \quad \Gamma^2 = I \quad (3.17)$$

が得られる。一体ハミルトニアンに対しては時間反転対称性とカイラル対称性が反ユニタリ変換で表されたが、一粒子ハミルトニアンに対しては、時間反転対称性と粒子正孔対称性が反ユニタリ変換による対称性・反対称性として表される。ユニタリ対称性 (3.14) は、ハミルトニアンが対称性演算子と可換であることを意味するため、対称性演算子の固有値によってハミルトニアンをブロック対角化できることを意味する。他三種の対称性はハミルトニアンの固有ベクトルや固有値に制約を与える。例えばカイラル対称性 (3.17) を考える。固有値方程式

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (3.18)$$

に左から Γ を作用させると、(3.17) 式から、

$$H(\Gamma |\psi\rangle) = -E(\Gamma |\psi\rangle) \quad (3.19)$$

となる。(3.19) 式は、カイラル対称性下では一粒子ハミルトニアンは必ず正負対称なスペクトルを持ち、その固有ベクトルもカイラル対称性の演算子により関係することを意味する。

ハミルトニアンが並進対称性を有する場合を考える。位置自由度をあらわに表記すると、一体ハミルトニアンは

$$H = \sum_{j,k} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} [c_j^\dagger(\mathbf{r}), c_j(\mathbf{r})] \tilde{H}_{j,k}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \begin{bmatrix} c_k(\mathbf{r}') \\ c_k^\dagger(\mathbf{r}') \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

と書ける。このハミルトニアンに対して並進対称性は

$$\tilde{H}_{j,k}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \tilde{H}_{j,k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.21)$$

と定義される。この時、フーリエ変換

$$c_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k} \in \text{BZ}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} c_j(\mathbf{k}) \quad (3.22)$$

を行い、位置自由度を運動量自由度に変換することで、ハミルトニアンをブロック対角化することができる:

$$H = \sum_{j,k} \sum_{\mathbf{k}} [c_j^\dagger(\mathbf{k}), c_j(\mathbf{k})] \tilde{H}_{j,k}(\mathbf{k}) \begin{bmatrix} c_k(\mathbf{k}) \\ c_k^\dagger(\mathbf{k}) \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}_{j,k}(\mathbf{k}) := \sum_{\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{H}_{j,k}(\mathbf{r}). \quad (3.23)$$

ここで、 V は系の総粒子数である。(3.23) 式の表示に対して再び対称性変換に対するハミルトニアンの不変性を要求すると、運動量空間での一粒子ハミルトニアン $\tilde{H}(\mathbf{k})$ に対する対称性はそれぞれ

$$U\tilde{H}(\mathbf{k})U^\dagger = \tilde{H}(\mathbf{k}), \quad (3.24)$$

$$T\tilde{H}(\mathbf{k})T^\dagger = \tilde{H}(-\mathbf{k}), \quad T^2 = \varepsilon_T I, \quad TiT^{-1} = -i, \quad (3.25)$$

$$\Xi\tilde{H}(\mathbf{k})\Xi^\dagger = -\tilde{H}(-\mathbf{k}), \quad \Xi^2 = \varepsilon_\Xi I, \quad \Xi i\Xi^{-1} = -i, \quad (3.26)$$

$$\Gamma\tilde{H}(\mathbf{k})\Gamma^\dagger = -\tilde{H}(\mathbf{k}), \quad \Gamma^2 = I \quad (3.27)$$

となる。時間反転対称性と粒子正孔対称性の一粒子ハミルトニアンへの作用は反ユニタリであるため、対称性変換により運動量が反転する。

ユニタリ対称性はハミルトニアンを既約分解するため、分解された各要素に着目すると、ハミルトニアンに対して本質的な対称性は時間反転対称性、粒子正孔対称性、カイラル対称性の三種となる。従って、一粒子ハミルトニアンをこれら三種類の対称性の有無により分類することができる。このような分類を AZ (Altland-Zirnbauer) クラス [83] と呼ぶ。これら三種の対称性は独立ではなく、ハミルトニアンが時間反転対称性と粒子正孔対称性の両方を有している場合には、 $\Gamma = T\Xi$ とすることでカイラル対称性を満たすことができる。これを踏まえると、一粒子ハミルトニアンは 10 種類の対称性クラスに分類できる。AZ クラスの詳細な定義に関しては次項で明示する。

3.2.2 一体ハミルトニアンの対称性によるトポロジカルな分類

(3.9) 式の一体ハミルトニアンのトポロジカルな分類 [6, 8, 84] を考える。前項で説明したように、(3.9) 式の一体ハミルトニアンを考える代わりに、一粒子ハミルトニアン \tilde{H} を考えることとする。 $\tilde{H} = \sum_{E_n > 0} E_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + \sum_{E_{n'} < 0} E_{n'} |\psi'_{n'}\rangle \langle \psi'_{n'}|$ と一粒子ハミルトニアンをスペクトル分解する。第一項が正の、第二項が負のエネルギーを持つバンドに対応する。この時、正のエネルギーを全て 1 に、負のエネルギーを全て -1 に連続変形する平坦化

$$\tilde{H} \mapsto \tilde{H}' := \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| - \sum_{n'} |\psi'_{n'}\rangle \langle \psi'_{n'}| \quad (3.28)$$

を行う。平坦化はハミルトニアンの対称性クラスを変化させないため、 \tilde{H} の代わりに平坦化ハミルトニアン \tilde{H}' を考えて問題ない。平坦化ハミルトニアンは $\tilde{H}'^2 = I$ を満たす。

トポロジカル不変量はハミルトニアンの連続変形に対して不変であるため、連続変形で繋がらないハミルトニアンが何種類あるのかを求めることで、トポロジカル不変量の値域を決定することができる。以降では空間次元が 0 次元のハミルトニアンを対象とする。最初に、系がカイラル対称性のみを有する場合を考える。この時、 $\{\tilde{H}', \Gamma\} = 0$ を満たす \tilde{H}' が、連続変形で互いに繋がる場合を同一視して、何種類あるのかを考えたい。これは、代数的には、複素クリフォード代数の拡大問題として取り扱うこと

ができる。複素クリフォード代数 Cl_q とは、

$$\{e_j, e_k\} = 0 \ (j \neq k), \ e_j^2 = I \quad (3.29)$$

を満たす元 e_0, e_1, \dots, e_{q-1} で生成される複素ベクトル空間である。カイラル対称性のみを有するハミルトニアン \hat{H}' のトポロジカルな分類は、 $e_1 = \Gamma$ とした時に許される $e_0 = \hat{H}'$ の追加の仕方の分類を行うことと等価になる。この時のクリフォード代数の拡大を $Cl_1 \rightarrow Cl_2$ と書き、取りうる e_0 全体の空間を表現空間 \mathcal{C}_1 とする。 \mathcal{C}_1 の連結成分の個数は $\pi_0(\mathcal{C}_1)$ で与えられる。数学の結果を用いると $\pi_0(\mathcal{C}_1) = 0$ となるが、この結果はカイラル対称性のみを有する 0 次元ハミルトニアンは常にトポロジカルに自明な相に連続変形でき、非自明なトポロジカル相が現れないことを意味する。対称性がない場合には $Cl_0 \rightarrow Cl_1$ の拡大問題を考えれば良く、その表現空間 \mathcal{C}_0 は $\pi_0(\mathcal{C}_0) = \mathbb{Z}$ を満たす。つまり、対称性を持たない 0 次元ハミルトニアンには、連続変形でトポロジカルに自明な相に変換できないものが任意の整数個存在しても良い。

系が時間反転対称性と粒子正孔対称性を有する場合には、その反ユニタリ性から、実クリフォード代数の拡大問題を考える必要がある。実クリフォード代数 $Cl_{p,q}$ は

$$\{e_j, e_k\} = 0 \ (j \neq k), \ e_j^2 = \begin{cases} -I & 0 \leq j \leq p-1 \\ I & p \leq j \leq p+q-1 \end{cases} \quad (3.30)$$

を満たす元 $e_0, \dots, e_{p-1}, e_p, \dots, e_{p+q-1}$ で生成される実ベクトル空間である。実クリフォード代数を考える際に、虚数単位 i の代わりに

$$J^2 = -I, \ \{T, J\} = \{\Xi, J\} = [\tilde{H}', J] = 0 \quad (3.31)$$

で定義される J を用いることで、実効的に複素数を扱うことができる。例として、ハミルトニアンが時間反転対称性と粒子正孔対称性の双方を有している場合には、

$$e_0 = \tilde{H}', \ e_1 = \Xi, \ e_2 = \Xi J, \ e_3 = T \Xi J, \quad (3.32)$$

$$e_0^2 = I, \ e_1^2 = \varepsilon_{\Xi} I, \ e_2^2 = \varepsilon_{\Xi} I, \ e_3^2 = -\varepsilon_T \varepsilon_{\Xi} \quad (3.33)$$

と生成子を構成できる。従って、時間反転対称性や粒子正孔対称性の二乗の符号 $\varepsilon_T, \varepsilon_{\Xi}$ に応じて異なる実クリフォード群の拡大を考えることになる。例えば、 $\varepsilon_T = 1, \varepsilon_{\Xi} = 1$ なら $Cl_{1,2} \rightarrow Cl_{1,3}$, $\varepsilon_T = -1, \varepsilon_{\Xi} = 1$ なら $Cl_{0,3} \rightarrow Cl_{0,4}$ の拡大が対応する。拡大 $Cl_{p,q} \rightarrow Cl_{p,q+1}$ の表現空間は $q-p$ のみに依存することが知られており、 \mathcal{R}_{q-p} と書く。

以上の手法を用いて、10 種類の AZ 対称性クラス全てについて $\pi_0(\mathcal{C}_q), \pi_0(\mathcal{R}_q)$ を求めることにより、0 次元ハミルトニアンのトポロジカルな分類を行える。 d 次元ハミルトニアンに関しては、K 理論を用いることにより、その分類が $\pi_0(\mathcal{C}_{q-d}), \pi_0(\mathcal{R}_{q-d})$ で与えられることが示されている [6]。更に、ボット周期性定理より、表現空間に対して $\pi_0(\mathcal{C}_q) = \pi_0(\mathcal{C}_{q+2}), \pi_0(\mathcal{R}_{q-d}) = \pi_0(\mathcal{R}_{q+8})$ が成立することも知ら

表 3.1: 一粒子ハミルトニアンの特ポロジカル分類表 [6–8]。1 列目は AZ 対称性クラスの名称、2-4 列目は該当するクラスの対称性の有無を表す。TRS は時間反転、PHS は粒子正孔対称性、CS はカイラル対称性をそれぞれ表し、0 は対称性がないこと、1 はカイラル対称性があること、± は時間反転対称性・粒子正孔対称性の対称性演算子の二乗の符号 $\varepsilon_T, \varepsilon_\Xi$ を表す。6-13 列目は該当する対称性クラスに属する d 次元ハミルトニアンから計算されるトポロジカル不変量の値域 $[= \pi_0(\mathcal{C}_{q-d}), \pi_0(\mathcal{R}_{q-d})]$ を表す。

クラス	TRS	PHS	CS	分類空間	$d=0$	1	2	3	4	5	6	7
A	0	0	0	\mathcal{C}_0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0
AIII	0	0	1	\mathcal{C}_1	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}
AI	+	0	0	\mathcal{R}_0	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
BDI	+	+	1	\mathcal{R}_1	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2
D	0	+	0	\mathcal{R}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0
DIII	-	+	1	\mathcal{R}_3	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$
AII	-	0	0	\mathcal{R}_4	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0
CII	-	-	1	\mathcal{R}_5	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0
C	0	-	0	\mathcal{R}_6	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0
CI	+	-	1	\mathcal{R}_7	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}

れているため、 $d = 0$ から $d = 7$ までを調べれば十分である。これらを総合すると、最終的に表 3.1 に示される、一粒子ハミルトニアンのトポロジカル分類表を得る。この表は各論的に得られたトポロジカル物質の性質とも一致している。例えば量子ホール絶縁体は整数値のチャーン数で特徴づけられるが、これは量子ホール絶縁体のハミルトニアンが $d = 2$ のクラス A に属していることを反映している。

3.3 非エルミート系のトポロジカル相

近年では孤立平衡系を超えて、外界と相互作用した非平衡相での物性に注目が集まっている。例えば、平衡状態では常伝導状態である銅酸化物に光パルス照射することで、非平衡超伝導状態が発現する [14] ことや、量子多体系に局所的な量子測定を行うことで、系のエンタングルメント構造に相転移が生じる [22] ことが挙げられる。本章で扱っているトポロジカル相に関しても同様に、非平衡系に対する拡張が考えられており、孤立平衡系より多彩なトポロジカル現象が現れる。その内の一つとして、本節では非エルミート系でのトポロジカル相を紹介する。

3.3.1 非エルミート性によるトポロジカル相の多様化

前節で見たように、トポロジカル相は系の対称性に基づいて分類される。非エルミート系では、ハミルトニアンの非エルミート性に伴って考える対称性の数が増える他、複数のギャップ構造が現れることが知られている [46, 47]。従って、非エルミート系では、孤立系に比較してより多様なトポロジカル相が実現する。

本節では、(3.9) 式と同じ形となる、非エルミートな一体ハミルトニアンを考える。ハミルトニアン H の非エルミート性を反映して、一粒子ハミルトニアン \tilde{H} も同様に非エルミートとなる。孤立平衡系の場合と同様に、(3.11)-(3.13) 式の対称性変換に関するハミルトニアンの不変性を要求することで、対称性の関係式

$$T^\dagger \tilde{H} T = \tilde{H}, \quad T^2 = \varepsilon_T I, \quad T i T^\dagger = -i, \quad (3.34)$$

$$\Xi^\dagger \tilde{H}^\dagger \Xi = -\tilde{H}, \quad \Xi^2 = \varepsilon_\Xi I, \quad \Xi i \Xi^\dagger = -i, \quad (3.35)$$

$$\Gamma^\dagger \tilde{H}^\dagger \Gamma = -\tilde{H}, \quad \Gamma^2 = I \quad (3.36)$$

を得る。ここで $\varepsilon_T, \varepsilon_\Xi \in \{\pm 1\}$ である。孤立系の場合にはエルミート性より $\tilde{H} = \tilde{H}^\dagger$ となったが、非エルミート系ではこの関係式が成立しないため、(3.35),(3.36) 式左辺にハミルトニアンのエルミート共役が現れる。非エルミート一粒子ハミルトニアンに対する時間反転対称性、粒子正孔対称性、カイラル対称性を (3.34)-(3.36) 式で定義すると、孤立系の場合と同様に、ハミルトニアンが時間反転対称性と粒子正孔対称性を有する場合には、ハミルトニアンはカイラル対称性 $\Gamma = T\Xi$ を満たす。従って、これら三種の対称性により、非エルミート系でも AZ 対称性クラスを定義できる。一方で、(3.34)-(3.36) 式左辺の \tilde{H} を \tilde{H}^\dagger で置換した対称性

$$T_{\text{NH}}^\dagger \tilde{H}^\dagger T_{\text{NH}} = \tilde{H}, \quad T_{\text{NH}}^2 = \varepsilon_{T_{\text{NH}}} I, \quad T_{\text{NH}} i T_{\text{NH}}^{-1} = -i, \quad (3.37)$$

$$\Xi_{\text{NH}}^\dagger \tilde{H} \Xi_{\text{NH}} = -\tilde{H}, \quad \Xi_{\text{NH}}^2 = \varepsilon_{\Xi_{\text{NH}}} I, \quad \Xi_{\text{NH}} i \Xi_{\text{NH}}^{-1} = -i, \quad (3.38)$$

$$S^\dagger \tilde{H} S = -\tilde{H}, \quad S^2 = I \quad (3.39)$$

を考えると、一粒子ハミルトニアン \tilde{H} がエルミートの場合にはこれらは一致するが、非エルミートの場合には一致せず、新たな対称性を定義することができる。これらの対称性はそれぞれ非エルミート時間反転対称性、非エルミート粒子正孔対称性、副格子対称性と呼ばれる。ハミルトニアンが非エルミート時間反転対称性と非エルミート粒子正孔対称性の双方を有する場合、 $\Gamma = T_{\text{NH}}\Xi_{\text{NH}}$ とすると、(3.36) 式のカイラル対称性を満たす。そのため、(3.37),(3.38),(3.36) 式の三種の対称性から AZ 対称性クラスと類似の対称性クラスを構成できる。この対称性クラスを AZ^\dagger クラスと呼ぶ。更に、これらの対称性クラスに加えて、副格子対称性は非エルミート系特有の副次的な対称性として働き、新たな対称性クラスを考える必要がある。非エルミート系の対称性クラスの詳細に関しては、次項で詳しく説明する。ま

た、これらの対称性は全て運動量空間で書き直すことができ、

$$T\tilde{H}(\mathbf{k})T^\dagger = \tilde{H}(-\mathbf{k}), T^2 = \varepsilon_T I, TiT^\dagger = -i, \quad (3.40)$$

$$\Xi\tilde{H}^\dagger(\mathbf{k})\Xi^\dagger = -\tilde{H}(-\mathbf{k}), \Xi^2 = \varepsilon_\Xi I, \Xi i\Xi^\dagger = -i, \quad (3.41)$$

$$\Gamma\tilde{H}^\dagger(\mathbf{k})\Gamma^\dagger = -\tilde{H}(\mathbf{k}), \Gamma^2 = I, \quad (3.42)$$

$$T_{\text{NH}}\tilde{H}^\dagger(\mathbf{k})T_{\text{NH}}^\dagger = \tilde{H}(-\mathbf{k}), T_{\text{NH}}^2 = \varepsilon_{T_{\text{NH}}} I, T_{\text{NH}}iT_{\text{NH}}^{-1} = -i, \quad (3.43)$$

$$\Xi_{\text{NH}}\tilde{H}(\mathbf{k})\Xi_{\text{NH}}^\dagger = -\tilde{H}(-\mathbf{k}), \Xi_{\text{NH}}^2 = \varepsilon_{\Xi_{\text{NH}}} I, \Xi_{\text{NH}}i\Xi_{\text{NH}}^{-1} = -i, \quad (3.44)$$

$$S\tilde{H}(\mathbf{k})S^\dagger = -\tilde{H}(\mathbf{k}), S^2 = I \quad (3.45)$$

となる。

関連して、非エルミート系での重要な対称性として擬エルミート性と PT (Parity-Time) 対称性

$$\eta\tilde{H}^\dagger(\mathbf{k})\eta^\dagger = \tilde{H}(\mathbf{k}), \eta^2 = I, \quad (3.46)$$

$$\mathcal{PT}\tilde{H}(\mathbf{k})(\mathcal{PT})^\dagger = \tilde{H}(\mathbf{k}), \mathcal{PT}i(\mathcal{PT})^\dagger = -i \quad (3.47)$$

がある。ここで、 η はエルミートかつユニタリな演算子であり、 \mathcal{PT} は反ユニタリ演算子である。擬エルミート性は演算子のエルミート性を一般化した対称性であり、 $\eta = I$ の場合にエルミート性に帰着する。PT 対称性はパリティ変換と時間反転対称性を組み合わせた対称性で、反ユニタリ対称性の一種である。 \mathcal{PT} はパリティ変換を含むため、空間座標を反転させる効果も含み、内部対称性ではない。ハミルトニアンが擬エルミート性もしくは PT 対称性を有する時、そのスペクトルは一般に実数になるか、複素共役のペアで現れる。このことを見るために、PT 対称なハミルトニアンの固有値方程式 $\tilde{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ を考える。左から \mathcal{PT} を作用させると、(3.47) 式より、

$$\tilde{H}(\mathcal{PT}|\psi\rangle) = E^*(\mathcal{PT}|\psi\rangle) \quad (3.48)$$

を得る。ハミルトニアンの固有ベクトル $|\psi\rangle$ が \mathcal{PT} の同時固有ベクトルになる場合

$$\mathcal{PT}|\psi\rangle = e^{i\phi}|\psi\rangle \quad (3.49)$$

を考えると、(3.48) 式に (3.49) 式を代入し、 $\tilde{H}|\psi\rangle = E^*|\psi\rangle$ を得る。これより $E = E^*$ となり、非エルミートハミルトニアンの固有値が実になる。(3.49) 式が成立しない場合には、二つの線形独立な固有ベクトル $|\psi\rangle, \mathcal{PT}|\psi\rangle$ が存在し、それらの固有値はそれぞれ E, E^* となり、スペクトルは複素共役のペアで現れる。(3.49) 式が成立し、ハミルトニアンの固有ベクトルが \mathcal{PT} の同時固有ベクトルになっている場合、固有状態は PT 対称性を保つと呼ぶ。対して、固有状態が PT 対称性を保たない場合は、固有状態は PT 対称性を破ると呼ぶ。擬エルミート性の場合には、ハミルトニアンの擬エルミート性と反線形対称性は同値であることが知られており [85]、上記の議論を反線形対称性に適用することで同様の結論を得る。トポロジカルな分類に際しては、擬エルミート性は副格子対称性を用いて代替することができる。このことも次項で説明する。

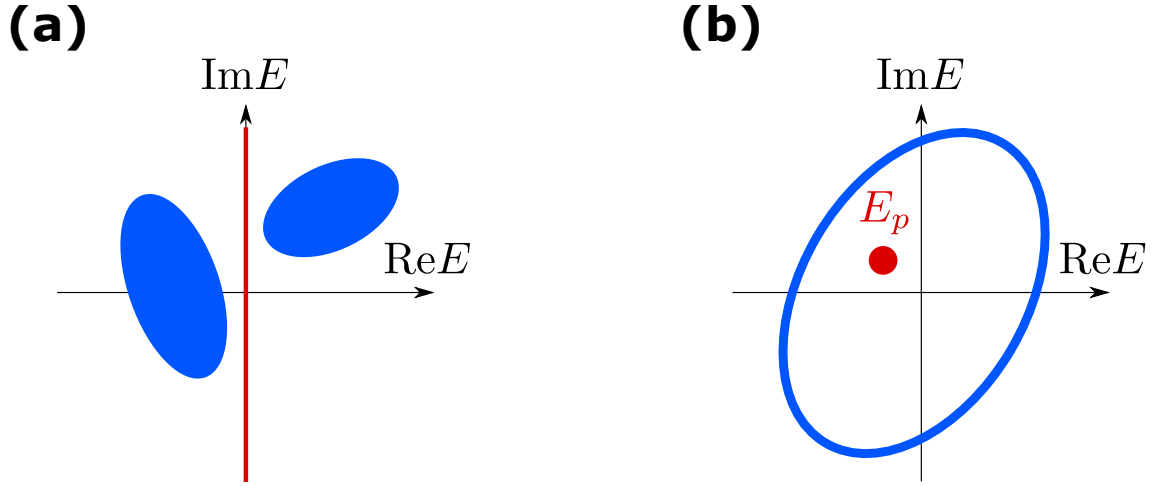


図 3.3: 非エルミート系の二種類のギャップ構造。(a) 線ギャップの場合。(b) 点ギャップの場合。

また、非エルミート系では二種類のギャップ構造を定義できる。非エルミート行列は複素固有値を持つため、孤立系ではエネルギーは実軸上に分布されていたのに対して、非エルミート系ではエネルギーが複素平面上に分布する。孤立系では、ハミルトニアンの特値にあるエネルギー $E = E_p$ が含まれない場合に、 E_p でギャップが開いていると定義していた。しかし、非エルミート系ではエネルギーが複素平面上に分布するため、図 3.3 に示すように、複素平面上のある点のエネルギーをスペクトルに含まない 0 次元のギャップ構造と、複素平面上のある直線上のエネルギーをスペクトルに含まない 1 次元のギャップ構造の二通りが考えられる。前者を点ギャップ、後者を線ギャップと言う。特に、直線 $\text{Re}E = 0$ に対する線ギャップのことを、実線ギャップと呼ぶ。トポロジカル相の議論ではギャップが開いていることが重要だったが、非エルミート系では二種類のギャップ構造が現れるため、それに伴って点ギャップ・線ギャップに対する異なるトポロジカル相が定義できる。これまでの議論を総合すると、孤立系と比較して、非エルミート系では考える対称性とギャップ構造の種類が増加するため、トポロジカル相も多様化する。

例として、3.1 節で紹介した SSH モデルに増幅と減衰に対応する純虚数のオンサイトポテンシャルを加えたモデル

$$H_{\text{NHSSH}} = \sum_j (t_0 c_{j,B}^\dagger c_{j,A} + t_1 c_{j,B}^\dagger c_{j+1,A} + \text{H.c.}) + \sum_j (ig c_{j,A}^\dagger c_{j,A} - ig c_{j,B}^\dagger c_{j,B}) \quad (3.50)$$

を考える。運動量空間での一粒子ハミルトニアンは

$$\tilde{H}_{\text{NHSSH}}(k) = \begin{pmatrix} ig & t_0 + t_1 e^{-ik} \\ t_0 + t_1 e^{ik} & -ig \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

で与えられ、カイラル対称性

$$\Gamma \tilde{H}_{\text{NHSSH}}^\dagger(k) \Gamma^\dagger = -\tilde{H}_{\text{NHSSH}}(k), \quad \Gamma = \sigma_z \quad (3.52)$$

を有する。ここで、 σ_i ($i = x, y, z$) はパウリ行列で

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

と定義される。増幅や減衰がない場合 ($g = 0$) には、SSH モデルは時間反転対称性と粒子正孔対称性を有していたが、 $g \neq 0$ の場合にはこれらの対称性は保たれない。一方で、 $g \neq 0$ の場合でも PT 対称性は保たれる:

$$\mathcal{PT}\tilde{H}_{\text{NHSSH}}(k)(\mathcal{PT})^\dagger = \tilde{H}_{\text{NHSSH}}(k), \mathcal{PT} = \sigma_x \mathcal{K}. \quad (3.54)$$

ここで \mathcal{K} は複素共役演算子 $\mathcal{K}A\mathcal{K}^\dagger = A^*$ である。系に増幅や減衰があるため、そのハミルトニアンは非エルミートとなるが、カイラル対称性に保護されたエッジ状態は出現する。トポロジカル不変量に関しても、非エルミートハミルトニアンから計算をすることができる。実線ギャップを有するハミルトニアンのバルクの固有値方程式を

$$H(k)|\psi_E(k)\rangle = E(k)|\psi_E(k)\rangle, \quad (3.55)$$

$$\langle\langle\psi_E(k)|H(k) = E(k)\langle\langle\psi_E(k)| \quad (3.56)$$

と書いた時、平坦化ハミルトニアンを

$$Q(k) := I - 2 \sum_{\text{Re}E < 0} (|\psi_E(k)\rangle\langle\langle\psi_E(k)| + |\psi_E(k)\rangle\langle\psi_E(k)|) \quad (3.57)$$

と定義することができる。 Q はエルミートかつカイラル対称性を有するため、 Q を用いてトポロジカル不変量である巻き付き数

$$w = -\frac{1}{4\pi i} \int_{\text{BZ}} \text{tr} \left[\Gamma Q(k)^{-1} \frac{dQ(k)}{dk} dk \right] \quad (3.58)$$

を計算することができ、ホッピング振幅 t_0, t_1 や増幅・減衰の強さ g に依存してトポロジカル不変量の値が変わる。固定端境界条件下でのスペクトルを計算すると図 3.4 のようになり、バルク状態は実線ギャップを有し、PT 対称性を保つため固有エネルギーが実となる。一方で、エッジ状態は系の端に局在するため PT 対称性を破り、固有エネルギーが複素化し、実線ギャップを閉じるように純虚数の固有エネルギーを有する。このように、増幅や減衰を含むエッジ状態が出現することが、非エルミート系に特有のトポロジカル現象となる。また、このモデルは光の増幅や減衰を取り入れた微小共振器を用いて実験的に実現されている [43]。

3.3.2 非エルミート・トポロジカル相の分類

孤立平衡系で対称性を用いてトポロジカル相が分類できたように、非エルミート系においても対称性によりトポロジカル相を分類することができる。本項では、非エルミート系のトポロジカル相の分類を与える。前述したように、非エルミート系では線ギャップと点ギャップが存在し、それぞれのギャップ

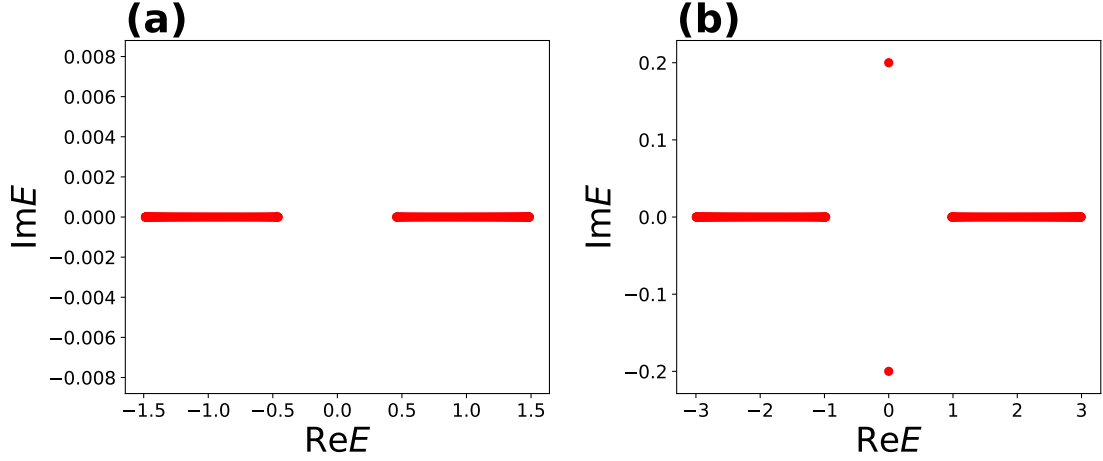


図 3.4: 固定端境界条件下での非エルミート SSH モデルのハミルトニアン \tilde{H}_{NHSSH} のスペクトル。(a) $t_1 = 0.5t_0, g = 0.2t_0$ ($w = 0$) の場合。(b) $t_1 = 2t_0, g = 0.2t_0$ ($w = 1$) の場合。

ブ構造に対応したトポロジカル相が現れるが、本論文では実線ギャップに着目するため、以降は実線ギャップに限って話を進める。一般的な分類は先行研究 [47] で与えられている。

非エルミート系では対称性の分岐が発生するため、それに伴い対称性クラスが増加する。一方で、非エルミート性由来して、時間反転対称性と非エルミート粒子正孔対称性はトポロジカルに同じ対称性とみなせる。非エルミートハミルトニアン H が (3.34) 式の時間反転対称性を有する場合、複素平面上でスペクトルを回転する操作 $H \rightarrow e^{i\phi}H$ を $\phi = 0$ から $\phi = \frac{\pi}{2}$ まで連続的に行うと、時間反転操作の反ユニタリ性から、 iH は対称性

$$T^\dagger(i\tilde{H})T = -(i\tilde{H}) \quad (3.59)$$

を有することがわかる。(3.59) 式は (3.38) 式と同型になり、非エルミートハミルトニアン H が時間反転対称性を有する場合、非エルミート粒子正孔対称性を有するハミルトニアン iH に連続変形できることを示している。このような変形は非エルミート性を許さないと連続的に行えないため、この対称性の統合は非エルミート系特有のものである。

この結果を用いると、非エルミート系の対称性クラス数を決定することができる。以降では、AZ クラスに対しては表 3.1 で用いたクラス名をそのまま使い、AZ † クラスに対しては CII † のように、ダガー記号付きのクラス名で表すこととする。前述した時間反転対称性と非エルミート粒子正孔対称性の同一視により、D † , C † クラスはそれぞれ AI, AII クラスとトポロジカルに同値な対称性クラスとなる。また、A † , AIII † クラスは A, AIII クラスと同じであるため、AZ, AZ † クラスを合わせると 16 種類となる。これに加えて、副格子対称性が加わった AZ クラスも考えることができる。AZ (AZ †) クラス内では、位相を調節することにより常に (非エルミート) 時間反転対称性と (非エルミート) 粒子正孔対称性を可換になるようにとることができていた。しかし、副格子対称性を含むと、全ての対称性演算子を互いに

可換にとることはできず、副格子対称性と他の対称性の交換関係を考える必要がある。例えば、BDI クラスに副格子対称性を付加した場合を考えると、時間反転対称性・粒子正孔対称性と副格子対称性がそれぞれ交換・反交換する場合が存在し、合計で 4 種類の拡張が考えられる。他の対称性クラスについても同様に考えると、副格子対称性が付加された AZ クラスは全部で 22 種類存在することがわかる。更に、この後述べるが、副格子対称性が付加された AZ^\dagger クラスや、擬エルミート性が付加された AZ クラス、AZ クラスと AZ^\dagger クラス双方の対称性を同時に有する場合の対称性クラスは、全て副格子対称性が付加された AZ クラスと同値となる。従って、非エルミートハミルトニアンは $16 + 22 = 38$ 種類の対称性クラスに分類されることがわかる。

以下では副格子対称性を有するクラスについて考える。以降、X クラスに副格子対称性が付加された対称性クラスを $X+S$ と書くこととする。特に、副格子対称性と（非エルミート）時間反転対称性、（非エルミート）粒子正孔対称性との関係が

$$ST = \pm_T TS, S\Xi = \pm_\Xi \Xi S \quad (3.60)$$

となる場合には、 S の下添え字にそれぞれの符号を書き、 $X+S_{\pm_T \pm_\Xi}$ と書く。ここでは例として、 $DIII^\dagger + S_{++}$ クラスを考える。このクラスに属するハミルトニアンは非エルミート時間反転対称性と非エルミート粒子正孔対称性

$$T_{NH}\tilde{H}^\dagger(\mathbf{k})T_{NH}^\dagger = \tilde{H}(-\mathbf{k}), T_{NH}^2 = -I, \quad (3.61)$$

$$\Xi_{NH}\tilde{H}(\mathbf{k})\Xi_{NH}^\dagger = -\tilde{H}(-\mathbf{k}), \Xi_{NH}^2 = -I \quad (3.62)$$

を有し、それぞれが副格子対称性と可換である。

$$ST_{NH} = T_{NH}S, S\Xi_{NH} = \Xi_{NH}S. \quad (3.63)$$

この時、 $T = S\Xi_{NH}$ とすると、 T は時間反転対称性の対称性演算子になっていることがわかる：

$$T\tilde{H}(\mathbf{k})T^\dagger = -S\tilde{H}(-\mathbf{k})S^\dagger = \tilde{H}(-\mathbf{k}), \quad (3.64)$$

$$T^2 = I, ST = TS. \quad (3.65)$$

同様に、 $\Xi = ST_{NH}$ とすると、 T と可換となる粒子正孔対称性の対称性演算子 Ξ を構成することができる：

$$\Xi\tilde{H}^\dagger(\mathbf{k})\Xi^\dagger = -\tilde{H}(-\mathbf{k}), \quad (3.66)$$

$$\Xi^2 = -I, S\Xi = \Xi S. \quad (3.67)$$

従って、 $DIII^\dagger + S_{++}$ クラスは $CI+S_{++}$ クラスと等しいことがわかる。その他の対称性クラスや、副格子対称性と他対称性が反交換する場合なども同様の方法で、副格子対称性が付加された AZ^\dagger クラスを副格子対称性が付加された AZ クラスに対応させることができる。全ての対称性クラスに関する具体的な対応関係や、擬エルミート性を有する場合などの議論は付録 A で行う。

以上の議論より、非エルミートハミルトニアンの特称性クラスを決定することができたため、これらのトポロジカルな分類を行う。実線ギャップを有するハミルトニアンに対して、以下の定理が成立することが知られている。

theorem 1. [47] 実線ギャップを有する非エルミートハミルトニアンは、ギャップと対称性を保ったまま、エルミートなハミルトニアンに連続変形することができる。

従って、定理 1 を用いることにより、実線ギャップを有する非エルミートハミルトニアンの分類は、エルミートなハミルトニアンの分類により行える。副格子対称性がない場合には、AZ, AZ[†] クラスの双方は孤立平衡系の AZ クラスに連続変形することができるため、3.2.2 項の分類をそのまま用いることができる。一方で、副格子対称性が付加されている場合には、付加的な対称性を含んだ孤立平衡系の AZ クラスに連続変形される。付加的な対称性が存在する場合のトポロジカルな分類は先行研究 [86] で行われており、この結果を用いることで副格子対称性が付加された AZ クラスの分類を行える。これらの結果を用いて行った、非エルミートハミルトニアンのトポロジカルな分類を表 3.2, 3.3 に示す。副格子対称性が加わることにより、一般には表 3.1 に現れないようなトポロジカル相が出現する。例えば $d = 1$ の BDI+S₊₊ クラスを考えると、この場合には副格子対称性から誘導される擬エルミート性によりハミルトニアンを二つのセクターにブロック対角化することができる。それぞれのセクターに対して独立にトポロジカル不変量を定義することができるため、分類は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ となる。

3.3.3 バルク-エッジ対応の破れ

3.1 節で説明したように、孤立平衡系では、周期境界条件を課した際の運動量空間のハミルトニアンからトポロジカル不変量を計算することができ、エッジ状態の出現を予言することができた。しかし、非エルミート系では一般にこの関係が成立しない場合がある。孤立平衡系では、系のサイズが十分大きい場合には、バルク状態に対する境界条件の影響を無視することができた。そのため、固定端境界条件下でのバルク状態を調べる代わりに、計算が簡便な周期境界条件の下でバルク状態を調べ、トポロジカル不変量を求めた。非エルミート系では、系のサイズが十分大きい場合でも、バルク状態が境界条件に鋭敏に依存することがある。ここでは例として、ホッピングが非対称な SSH モデル

$$H = \sum_x [(t_1 + \gamma/2)c_{x,A}^\dagger c_{x,B} + (t_1 - \gamma/2)c_{x,B}^\dagger c_{x,A}] + \sum_x (t_2 c_{x+1,A}^\dagger c_{x,B} + t_3 c_{x+1,B}^\dagger c_{x,A}), t_j \in \mathbb{R} \quad (3.68)$$

を考える [48]。フーリエ変換を行うと、運動量空間での一粒子ハミルトニアンは

$$\tilde{H}(k) = d_x \sigma_x + \left(d_y + \frac{i\gamma}{2} \right) \sigma_y, \quad d_x = t_1 + (t_2 + t_3) \cos k, \quad d_y = (t_2 - t_3) \sin k \quad (3.69)$$

表 3.2: 実線ギャップを有する非エルミート一粒子ハミルトニアンの特ポロジカルな分類 [47]。3-10 列目は該当する対称性クラスに属する d 次元ハミルトニアンから計算されるトポロジカル不変量の値域 $[= \pi_0(\mathcal{C}_{q-d}), \pi_0(\mathcal{R}_{q-d})]$ を表す。

クラス	分類空間	$d = 0$	1	2	3	4	5	6	7
A	\mathcal{C}_0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0
AIII	\mathcal{C}_1	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}
AI	\mathcal{R}_0	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
BDI	\mathcal{R}_1	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2
D	\mathcal{R}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0
DIII	\mathcal{R}_3	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$
AII	\mathcal{R}_4	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0
CII	\mathcal{R}_5	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0
C	\mathcal{R}_6	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0
CI	\mathcal{R}_7	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}
AI †	\mathcal{R}_0	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
BDI †	\mathcal{R}_1	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2
D †	\mathcal{R}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0
DIII †	\mathcal{R}_3	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$
AII †	\mathcal{R}_4	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0
CII †	\mathcal{R}_5	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0
C †	\mathcal{R}_6	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0
CI †	\mathcal{R}_7	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}

となる。 \tilde{H} を対角化すると、その固有値は

$$E_{\pm}(k) = \pm \sqrt{d_x^2 + \left(d_y + \frac{i\gamma}{2}\right)^2} \quad (3.70)$$

と求められる。簡単のために $t_3 = 0$ とすると、 $t_1 = t_2 \pm \gamma/2$ か $t_1 = -t_2 \pm \gamma/2$ の場合にギャップが閉じる。固定端境界条件下でハミルトニアンを対角化して得たスペクトルを図 3.5(a) に示す。固定端境界条件下ではバルク状態のギャップは $t_1 = \sqrt{t_2^2 + (\gamma/2)^2}$ で閉じており、周期境界条件を課した場合の運動量空間でのスペクトルとは異なる点でギャップが閉じ、エッジ状態が現れることがわかる。トポロジカル不変量はギャップを閉じない限り値が変わらないため、この結果は $\tilde{H}(k)$ から計算されたトポロジカル不変量がエッジ状態の出現を予測できず、バルク-エッジ対応が破れることを表す。この時、非対

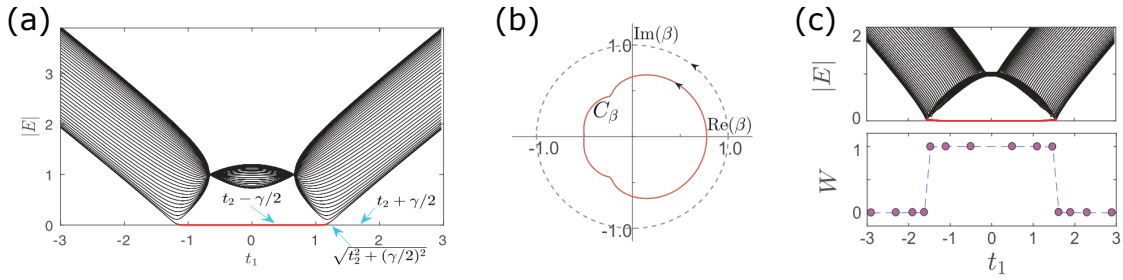


図 3.5: (a) 固定端境界条件下でのホッピングが非対称な SSH モデルのスペクトルの t_1 依存性。赤線はエッジ状態を表す。 $t_2 = 1$, $t_3 = 0$, $\gamma = 4/3$ とした。(b) $t_1 = 1.1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1/5$, $\gamma = 4/3$ の場合の一般化ブリルアンゾーン。(c) $t_2 = 1$, $t_3 = 1/5$, $\gamma = 4/3$ の場合の固定端境界条件下でのスペクトル。下図:一般化ブリルアンゾーンから計算したトポロジカル不変量の t_1 依存性。図は文献 [48] のものを引用した。

称なホッピングに起因して、固定端境界条件下でのバルク状態は境界に指数的に局在した状態となり、周期境界条件下でのバルク状態とは大きく異なる。本論では扱わないが、この現象は 3.3.1 項で紹介した点ギャップにおけるトポロジカル相のバルク-エッジ対応として理解することができる [51]。

この問題は、波数を複素数へと拡張することで解決できる。 $t_3 = 0$ の場合には、波数 k を $k - i \ln r$, $r := \sqrt{|(t_1 - \gamma/2)(t_1 + \gamma/2)|}$ と変換することにより、(3.69) 式の運動量空間のハミルトニアンが、固定端境界条件下でのバンドギャップが閉じる点を正しく与えられるようになる。言い換えると、運動量空間に現れる指数項 e^{ik} は、通常は複素平面上の単位円上を動いていたが、半径 r の円上を動くようにすることで、バルク-エッジ対応を回復することができる。この手順は $t_3 \neq 0$ の場合にも一般化することができ、運動量空間のハミルトニアン内の e^{ik} を、固定端境界条件下でのバルクのスペクトルを正しく記述できる複素数 β に置換する方法が確立されている。 β の動く範囲は一般化ブリルアンゾーンと呼ばれる。詳細な手続きは省略するが、一般化ブリルアンゾーンは固定端境界条件下での固有値方程式から得ることができる。一般に β の描く軌跡は単純な図形にならず、図 3.5(b) のような複雑な形を描く。一般化ブリルアンゾーンを用いてトポロジカル不変量を計算すると図 3.5(c) 下図のようになり、図 3.5(c) 上図内のエッジ状態と対応し、バルク-エッジ対応が回復する。

3.4 本研究の目的

実験技術の向上に伴って非平衡系や開放系の物性が注目される中、近年では非エルミート系のトポロジカル相が精力的に研究されてきた。一方で、多くの開放量子系は事後測定を伴わず、その時間発展は GKSL 方程式で記述されるため、開放量子系のトポロジカル相を明らかにするためには、GKSL 方程式の生成子である Lindblad 演算子の分類を考える必要がある。2.4 節で説明したように、GKSL 方程

式をベクトル化することにより、リンドブラディアンは非エルミート行列に変換することができる。先行研究 [60] では、非エルミート行列のトポロジカルな分類理論を用いることで、リンドブラディアンのトポロジカルな分類を行った。リンドブラディアンの固有値の虚部は常に 0 以下となるため、リンドブラディアンの有する内部対称性は非エルミート時間反転対称性、非エルミート粒子正孔対称性、カイラル対称性の三種に限られ、対称性クラスは 10 種の AZ^\dagger クラスのみに限られることが主張された。この議論に則ると、非エルミート行列の分類において重要な対称性である副格子対称性や擬エルミート性は、リンドブラディアンに対して成立しない対称性となる。本研究の主要な目的の一つは、これらの対称性を含む対称性クラスがリンドブラディアンにおいて実現可能かどうかを再考することにある。

また、開放量子系のトポロジカル相を調べる上で、その数理的基礎となっている非エルミート系のトポロジカル相を明らかにすることも重要な課題となる。非エルミート系では、対称性クラスやギャップ構造の多様化の他に、3.3 節で説明したように、バルク-エッジ対応の破れが発生する。3.3 節で説明した例のように、バルク-エッジ対応の破れはバルク状態が境界条件に依存する場合に発生することが報告されている。しかし、バルク状態が境界条件に依存しない場合にバルク-エッジ対応が常に保たれるかは明らかにされていない。本研究の二つ目の目的は、バルク状態が境界条件に依存しない場合に発生するバルク-エッジ対応の破れを発見することである。

これに対し、本研究では以下のことを明らかにした。一つ目は、リンドブラディアンに対して副格子対称性が定義可能であることを示した [75]。固有値のシフトを組み合わせるにより、副格子対称性に連続変形可能な対称性であり、リンドブラディアンに対して成立する対称性である、シフトした副格子対称性を定義した。シフトした副格子対称性を有する具体的なモデルも構成し、そのトポロジカル相を調べた。関連して、擬エルミート性の特殊な場合である、PT 対称性を有するトポロジカル相がリンドブラディアンにおいて実現可能であることも示した [76]。非エルミート系の場合と同様に、バルク状態が一定の固有値の虚部を有し、エッジ状態が PT 対称性を破って異なる固有値の虚部を有する振る舞いが、リンドブラディアンにおいても現れることを具体的なモデルで実証した。本研究で考えたモデルにおいて、PT 対称性を破るエッジ状態を定常状態とすることができることも示した。二つ目は、3.3 節で紹介したものは異なる機構で発現する非エルミート系のバルク-エッジ対応の破れを発見した [77]。多重エッジ状態を有する BDI^\dagger クラスに属する系に対称性を破る摂動を加え、 D^\dagger クラスへと轉移させる。トポロジカルな分類理論によれば D^\dagger クラスでは多重エッジ状態は現れないことが予想されるが、エッジ状態が非エルミート粒子正孔対称性に起因する反線形対称性を保つ範囲内では、多重エッジ状態が頑強に存在することを示した。この構成法を具体的なモデルに適用することで、実際にバルク-エッジ対応が破れることを実証した。

表 3.3: 副格子対称性を有する場合の、実線ギャップを有する非エルミート一粒子ハミルトニアン
 のトポロジカルな分類 [47]。クラス名の \mathcal{S}_{\pm} の下添え字は、時間反転対称性または粒子正孔対称性と副格子
 対称性が交換する場合には +, 反交換する場合には - とした。時間反転対称性と粒子正孔対称性の双方
 を含む対称性クラスの場合には、 $\mathcal{S}_{\pm\pm'}$ のように下添え字を二つ書き、一つ目が時間反転対称性と、二
 つ目が粒子正孔対称性との交換/反交換関係の符号を表す。3-10 列目は該当する対称性クラスに属する
 d 次元ハミルトニアンから計算されるトポロジカル不変量の値域 $[= \pi_0(\mathcal{C}_{q-d}), \pi_0(\mathcal{R}_{q-d})]$ を表す。

クラス	分類空間	$d = 0$	1	2	3	4	5	6	7
A+S	\mathcal{C}_1	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}
AIII+S ₋	$\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1$	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
AIII+S ₊	\mathcal{C}_0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0
AI+S ₊	\mathcal{R}_1	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2
AI+S ₋	\mathcal{R}_7	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}
BDI+S ₊₊	$\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_1$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	0	0	0	$2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
BDI+S ₊₋	\mathcal{R}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0
BDI+S ₋₊	\mathcal{R}_0	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
BDI+S ₋₋	\mathcal{C}_1	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}
D+S ₊	\mathcal{R}_1	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2
D+S ₋	\mathcal{R}_3	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$
DIII+S ₊₊	\mathcal{C}_1	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}
DIII+S ₊₋	\mathcal{R}_4	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0
DIII+S ₋₊	\mathcal{R}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0
DIII+S ₋₋	$\mathcal{R}_3 \times \mathcal{R}_3$	0	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	0	0	0	$2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$
AII+S ₊	\mathcal{R}_5	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0
AII+S ₋	\mathcal{R}_3	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$
CII+S ₊₊	$\mathcal{R}_5 \times \mathcal{R}_5$	0	$2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	0	0
CII+S ₊₋	\mathcal{R}_6	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0
CII+S ₋₊	\mathcal{R}_4	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0	0
CII+S ₋₋	\mathcal{C}_1	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}
C+S ₊	\mathcal{R}_5	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0	0
C+S ₋	\mathcal{R}_7	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}
CI+S ₊₊	\mathcal{C}_1	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}
CI+S ₊₋	\mathcal{R}_0	\mathbb{Z}	0	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
CI+S ₋₊	\mathcal{R}_6	0	0	$2\mathbb{Z}$	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	0
CI+S ₋₋	$\mathcal{R}_7 \times \mathcal{R}_7$	0	0	34 0	$2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

第 4 章

副格子対称性に保護された開放量子系の トポロジカル相

4.1 序論

前章では、非エルミート Schrödinger 方程式で記述される系のトポロジカル相を紹介した。非エルミート系では、ハミルトニアン非エルミート性により、ハミルトニアン分類される対称性クラスが増加し、それに伴ってトポロジカル相も多様化する。一方で、多くの開放量子系の時間発展は 2 章で紹介した GKSL 方程式 (2.9) で記述される。従って、環境と相互作用する物質のトポロジカル相を調べるためには、GKSL 方程式の時間発展を決定する Lindblad 演算子をトポロジカルに分類する必要がある。

2.5 節で説明したように、GKSL 方程式をベクトル化することにより非エルミート・シュレディンガー方程式に変換することができるため、非エルミート系のトポロジカル相の理論を用いることで、開放量子系のトポロジカル相を考えることができる。Lindblad 演算子のトポロジカルな分類は Lieu ら [60] により行われた。一般的な非エルミートハミルトニアンとは異なり、Lindblad 演算子の固有値は常に 0 以下の虚部を持つため、取りうる対称性クラスに制約が生じる。その結果、Lieu らは Lindblad 演算子が AZ^\dagger クラスにより 10 種類に分類されると主張した。この主張は、実線ギャップの場合には、Lindblad 演算子のトポロジカルな分類は孤立平衡系の分類と等しくなることを意味している。特に、非エルミート系の分類では半分以上が副格子対称性が付加された対称性クラスであったが、副格子対称性が付加された対称性クラスは GKSL 方程式で記述される開放量子系では実現しないとされていた。

これに対し、本章では Lindblad 演算子においても副格子対称性が付加された対称性クラスが実現可能であることを示す [75]。Lindblad 演算子に対して、通常の副格子対称性は成立しないものの、固有値の虚部をシフトさせる操作と組み合わせることで、Lindblad 演算子に対しても成立しうる副

格子対称性を定義した。更に、散逸的な SSH モデルにおいて副格子対称性が付加された対称性クラスが実現可能であることを具体的に示した。

本章の構成は以下ようになる。4.2 節では、孤立系の一体ハミルトニアンに対応する、一体リンドブラディアンの解析方法についてまとめる。続いて、4.3 節でリンドブラディアンに対する副格子対称性を定義する。4.4 節では副格子対称性に保護された開放量子系のトポロジカル相の例として、一次元トポロジカル絶縁体の代表例である SSH モデルに散逸を加えたモデルを解析する。最後に、4.5 節で一次元開放量子系が副格子対称性を有する条件を議論する。

4.2 一体リンドブラディアン

粒子間に多体の相互作用がない場合には、ハミルトニアンは (3.9) 式のように電子の生成・消滅演算子の二次形式で書くことができ、実効的な解析はその係数行列である一粒子ハミルトニアンに対して行うことができた。開放量子系においても、環境との相互作用が電子間相互作用を誘起しない場合には、一体ハミルトニアンと類似の方法で解析を簡単化することができる。本節では、一体リンドブラディアンの解析方法として、第三量子化 [87–89] と呼ばれる手法を紹介する。

ハミルトニアン H が (3.9) 式のようにフェルミオンの生成・消滅演算子の二次形式で与えられ、ジャンプ演算子 L_μ が電子の生成・消滅演算子の一次結合で書ける場合、リンドブラディアン $\hat{\mathcal{L}}$ を一体リンドブラディアンと呼ぶ。今後の解析の簡便化のために、マヨラナ演算子 w を

$$w_{2j-1} := c_j + c_j^\dagger, \quad w_{2j} := i(c_j - c_j^\dagger) \quad (4.1)$$

と定義する。定義よりマヨラナ演算子はエルミートで、反交換関係

$$\{w_j, w_k\} = 2\delta_{j,k} \quad (4.2)$$

を満たす。マヨラナ演算子を用いると、リンドブラディアンが一体である条件は、ハミルトニアンとジャンプ演算子がそれぞれ

$$H = \sum_{j,k=1}^{2n} w_j \tilde{H}_{j,k} w_k, \quad \tilde{H} = \tilde{H}^\dagger = -\tilde{H}^T, \quad (4.3)$$

$$L_\mu = \sum_{j=1}^{2n} l_{\mu,j} w_j, \quad l_{\mu,j} \in \mathbb{C} \quad (4.4)$$

と書けることと等価である。

2.4 節で示したように、有界演算子全体の集合は (2.30) 式で定義される Hilbert-Schmidt 内積を持つヒルベルト空間となる。そこで、 n フェルミオン系のヒルベルト空間の基底を、マヨラナ演算子を用いて

$$P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}} := 2^{-n/2} w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \dots w_{2n}^{\alpha_{2n}}, \quad \alpha_j \in \{0, 1\} \quad (4.5)$$

と定義する。 $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n})$ とすると、これらは Hilbert-Schmidt 内積の下で $(P_\alpha, P_\beta) = \delta_{\alpha, \beta}$ を満たし、正規直交基底であることが確かめられる。この基底に対し、超演算子 \hat{c}, \hat{c}^\dagger を

$$\hat{c}_j[P_\alpha] := \delta_{\alpha_j, 1} w_j P_\alpha, \quad (4.6)$$

$$\hat{c}_j^\dagger[P_\alpha] := \delta_{\alpha_j, 0} w_j P_\alpha \quad (4.7)$$

と定義する。(4.2) 式より、これらの超演算子は反交換関係

$$\{\hat{c}_j, \hat{c}_k\} = 0, \quad \{\hat{c}_j, \hat{c}_k^\dagger\} = \delta_{j, k} \quad (4.8)$$

を満たし、 \hat{c}, \hat{c}^\dagger は通常のフェルミオンの生成・消滅演算子と同様の代数に従うことがわかる。以降これらの超演算子を生成・消滅超演算子と呼ぶ。生成・消滅超演算子の一般的な演算子への作用は

$$\hat{c}_j[A] = \frac{1}{2}(w_j A - \hat{P}[A]w_j), \quad (4.9)$$

$$\hat{c}_j^\dagger[A] = \frac{1}{2}(w_j A + \hat{P}[A]w_j) \quad (4.10)$$

となる。 $\hat{P}[A] := \Pi A \Pi$ であり、 $\Pi = (-1)^N$, $(N := \sum_{j=1}^n c_j^\dagger c_j)$ は粒子数に関するパリティ演算子である。

一体リンドブラディアンを生成・消滅超演算子を用いて書き換える。最初にユニタリな時間発展

$$\hat{\mathcal{L}}_0[\rho] := [H, \rho] = \sum_{j, k} \tilde{H}_{j, k} [w_j w_k, \rho] \quad (4.11)$$

を考える。 $[w_j w_k, \rho]$ の部分を考えて、(4.2) 式を用いて、

$$\begin{aligned} [w_j w_k, P_\alpha] &= w_j w_k P_\alpha - P_\alpha w_j w_k \\ &= 2(\delta_{\alpha_j, 1} \delta_{\alpha_k, 0} + \delta_{\alpha_j, 0} \delta_{\alpha_k, 1}) w_j w_k P_\alpha \\ &= 2(\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_k - \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_j)[P_\alpha] \end{aligned} \quad (4.12)$$

と超演算子を用いた表示を得る。(4.12) 式を (4.11) 式に代入すると、 $\hat{c} := (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_{2n})^T$, $\hat{c}^\dagger := (\hat{c}_1^\dagger, \hat{c}_2^\dagger, \dots, \hat{c}_{2n}^\dagger)$ とすると、

$$\hat{\mathcal{L}}_0 = 4\hat{c}^\dagger \cdot \tilde{H} \hat{c} \quad (4.13)$$

となり、絶縁体の一体ハミルトニアンと同型となる。次に、環境との相互作用による散逸項

$$\hat{\mathcal{L}}_\mu[\rho] := i(2L_\mu \rho L_\mu^\dagger - \{L_\mu^\dagger L_\mu, \rho\}) = i \sum_{j, k} l_{\mu, j} l_{\mu, k}^* \hat{\mathcal{L}}_{j, k}[\rho], \quad (4.14)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{j, k}[\rho] := 2w_j \rho w_k - w_k w_j \rho - \rho w_k w_j \quad (4.15)$$

を考える。マヨラナ演算子の反交換関係より、 $|\alpha| := \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j$ とすると、 $P_\alpha w_j = (-1)^{|\alpha| + \alpha_j} w_j P_\alpha$ が成立する。これを用いると $\hat{\mathcal{L}}_{j, k}$ の P_α への作用を

$$\hat{\mathcal{L}}_{j, k}[P_\alpha] = [2(-1)^{|\alpha| + \alpha_j} w_j w_k - w_k w_j - (-1)^{\alpha_j + \alpha_k} w_k w_j] P_\alpha \quad (4.16)$$

と書き直せる。更に、正規直交基底 P_α に関する公式

$$w_j P_\alpha = (\hat{c}_j^\dagger + \hat{c}_j)[P_\alpha], \quad (-1)^{\alpha_j} w_j P_\alpha = (\hat{c}_j^\dagger - \hat{c}_j)[P_\alpha], \quad (-1)^{|\alpha|} P_\alpha = \hat{\mathcal{P}}[P_\alpha] \quad (4.17)$$

を使うと、 $\hat{\mathcal{L}}_{j,k}$ は生成・消滅超演算子を用いて

$$\hat{\mathcal{L}}_{j,k} = \hat{\mathcal{P}}_+(4\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_k^\dagger - 2\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_k - 2\hat{c}_k^\dagger \hat{c}_j) + \hat{\mathcal{P}}_-(4\hat{c}_j \hat{c}_k - 2\hat{c}_j \hat{c}_k^\dagger - 2\hat{c}_k \hat{c}_j^\dagger) \quad (4.18)$$

と書くことができる。 $\hat{\mathcal{P}}_\pm := (1 \pm \hat{\mathcal{P}})/2$ はパリティの正負に関する射影である。(4.18) 式から、 $\hat{\mathcal{L}}_{j,k}$ ($\hat{\mathcal{L}}_\mu$) はパリティ $\hat{\mathcal{P}}$ を保存し、パリティの正負でブロック対角化できることがわかる。ユニタリ時間発展項 (4.13) も同様にパリティを保存するため、リンドブラディアン $\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_0 + i \sum_{j,k} l_{\mu,j} l_{\mu,k}^* \hat{\mathcal{L}}_{j,k}$ はパリティの正負でブロック対角化することができる。パリティ超選択則より、密度演算子はパリティ正負の演算子の重ね合わせで書くことができず、パリティが負の演算子 $\hat{\mathcal{P}}[\rho] = \Pi \rho \Pi = -\rho$ はトレースが 0 になるため、任意の密度演算子はパリティが正となる。従って、以降ではパリティが正となるブロックにのみ着目して解析を行う。パリティが正の部分空間に制限された $\hat{\mathcal{L}}_{j,k}$ は

$$\hat{\mathcal{L}}_{j,k}|_+ = 4\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_k^\dagger - 2\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_k - 2\hat{c}_k^\dagger \hat{c}_j \quad (4.19)$$

となる。以降では簡単のため添字がない場合も常にパリティが正の部分空間に制限されたリンドブラディアンを考えることとする。

(4.13),(4.14),(4.19) 式から、リンドブラディアン全体は生成・消滅超演算子を用いて

$$\hat{\mathcal{L}} = 2 \begin{pmatrix} \hat{c}^\dagger & \hat{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -Z^T & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c} \\ \hat{c}^\dagger \end{pmatrix} - A_0 \hat{I}, \quad (4.20)$$

$$Z := \tilde{H} + i\text{Re}M, \quad Y := 2\text{Im}M, \quad A_0 = 2\text{tr}[M] \quad (4.21)$$

と与えられる。 \hat{I} は恒等超演算子であり、 M はジャンプ演算子から決まる正定値行列

$$M_{j,k} := \sum_{\mu} l_{\mu,j} l_{\mu,k}^* \quad (4.22)$$

である。リンドブラディアンが (4.20) 式のように上三角型の構造をしているため、リンドブラディアンの固有値は対角ブロックに位置する行列 Z により完全に決定される。特に、 Z が対角化可能であればリンドブラディアン $\hat{\mathcal{L}}$ も同様に対角化可能となる。 Z の固有値を λ_j ($j = 1, 2, \dots, 2n$) とすると、リンドブラディアンは

$$\hat{\mathcal{L}} = -4 \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j \hat{b}'_j \hat{b}_j \quad (4.23)$$

と対角化することができる。 \hat{b}', \hat{b} はリンドブラディアンの固有モードに対する生成・消滅超演算子で、

$$\{\hat{b}_j, \hat{b}_k\} = \{\hat{b}'_j, \hat{b}'_k\} = 0, \quad \{\hat{b}_j, \hat{b}'_k\} = \delta_{j,k} \quad (4.24)$$

を満たす。但し一般的なフェルミオンの代数とは異なり、リンドブラディアン¹の非エルミート性に由来して $\hat{b}' \neq \hat{b}'^\dagger$ となる。また、固有値は Z にのみ依存するが、固有モードの生成・消滅演算子 \hat{b}, \hat{b}' は Y と Z の双方に依存する。(4.21) 式から、(3.9) 式の一体ハミルトニアン²の解析が一粒子ハミルトニアン \tilde{H} の解析に落とせたのと類似して、一体リンドブラディアン³のスペクトルの解析は $2n \times 2n$ 非エルミート行列 Z の解析に落とせることがわかる。(4.23) 式より、リンドブラディアン⁴が自明に有する定常状態を ρ_{ss} とすると、リンドブラディアン⁵の固有演算子は

$$\rho_{\nu} = \hat{b}'_1{}^{\nu_1} \hat{b}'_2{}^{\nu_2} \dots \hat{b}'_{2n}{}^{\nu_{2n}} [\rho_{\text{ss}}], \nu_j \in \{0, 1\} \quad (4.25)$$

と構成でき、その固有値は $-4 \sum_j \nu_j \lambda_j$ となる。 \hat{b}' は \hat{c}, \hat{c}^\dagger の線形結合で表され、これらはパリティを変化させるため、 \hat{b}' もパリティを変化させる。従って、(4.25) 式で表される固有演算子のうち、 $\sum_j \nu_j$ が偶数のものはパリティが正、奇数のものはパリティが負となる。前述したように、パリティが正の演算子のみが密度演算子となりうるため、リンドブラディアン⁶の固有状態となる密度演算子は、(4.25) 式で表される演算子のうち、 $\sum_j \nu_j$ が偶数となるものに限られる。特に、リンドブラディアン⁷が複数個の定常状態を有すると、その複数個の自由度を用いたノイズの影響を低減した量子計算が行えるため、複数個の定常状態を有する状況は量子コンピュータへの応用からも注目されるが、そのためには Z が複数個のゼロ固有値を有する必要がある。

一体リンドブラディアンによる時間発展は多体相関を誘起しないため、その時間発展は共分散行列

$$C_{j,k}(t) := \text{tr}[\rho(t)w_j w_k] - \delta_{j,k} \quad (4.26)$$

によっても特徴づけることができる。物理量 $\tilde{C}_{j,k} := w_j w_k - \delta_{j,k} I$ に対して GKSL 方程式 (2.46) 式を適用すると、一体リンドブラディアン⁸の元で \tilde{C} は

$$\frac{d}{dt} \tilde{C} = 4i(Z^T \tilde{C} + \tilde{C} Z + YI) \quad (4.27)$$

に従って時間発展する。 Y, Z は (4.21) 式で定義した行列である。両辺を密度演算子 ρ に関して期待値をとると、共分散行列 C の時間発展も同様に

$$\frac{d}{dt} C = 4i(Z^T C + C Z + Y) \quad (4.28)$$

で与えられる。定常状態の共分散行列を C_{ss} とすると、 $\frac{d}{dt} C_{\text{ss}} = 0$ を満たすため、 C_{ss} は

$$Z^T C_{\text{ss}} + C_{\text{ss}} Z = -Y \quad (4.29)$$

を満たす。(4.29) 式は Z がゼロ固有値を有さない場合に一意な解を持つ。この時、定常状態の共分散行列との差分を $C'(t) := C(t) - C_{\text{ss}}$ と書くと、 C' は

$$\frac{d}{dt} C'(t) = 4i(Z^T C' + C' Z) \quad (4.30)$$

表 4.1: 対称性による固有値の制限。記号 (a, b) は、固有値 a が存在する場合には必ず固有値 b も存在することを表す。時間反転対称性・粒子正孔対称性は TRS, PHS, 非エルミート時間反転対称性・非エルミート粒子正孔対称性は TRS[†], PHS[†], カイラル対称性・副格子対称性は CS, SLS と略記した。

対称性	TRS	TRS [†]	PHS	PHS [†]	CS	SLS
制約	(λ, λ^*)	なし	$(\lambda, -\lambda)$	$(\lambda, -\lambda^*)$	$(\lambda, -\lambda^*)$	$(\lambda, -\lambda)$
Z が対称性を有しうるか	×	○	×	○	○	×

に従って時間発展する。(4.30) 式の形式解は

$$C'(t) = e^{4iZ^T t} C'(0) e^{4iZt} \quad (4.31)$$

と求められる。共分散行列による描像でも、 Z の固有値を調べることで過渡期の時間発展がわかり、定常状態は Y にも依存して決まるが見て取れる。

4.3 リンドブラディアンに対する副格子対称性

前節では、一体リンドブラディアンのスペクトルが (4.21) 式で定義される非エルミート行列 Z により完全に決定されることを示した。非エルミート行列 Z に対して 3.3 節で説明した非エルミート・トポロジカル相の理論を適用することにより、リンドブラディアンのスペクトルをトポロジカルに分類することが可能となる。しかし、リンドブラディアンの固有値の虚部が 0 以下になることを反映して、 Z の固有値の虚部は 0 以上になる必要がある。この制約により、 Z の取りうる対称性クラスの種類も制限を受ける。例えば、 Z が時間反転対称性を有するとすると、 $[Z, T] = 0$ を満たす反ユニタリ演算子 T が存在する。この時に Z の固有値方程式

$$Z|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \quad (4.32)$$

を考え、左から T を作用させると、対称性の関係式から、

$$Z(T|\psi\rangle) = \lambda^*(T|\psi\rangle) \quad (4.33)$$

が得られる。(4.33) 式から、 Z が時間反転対称性を有すると、 Z は複素共役対称なスペクトルを有することがわかる。しかしこの場合には、 Z が必ず負の虚部を持つ固有値を有することになり、上述した制約と矛盾してしまう。そのため、 Z に対して (3.15) 式の時間反転対称性は成立しない。他の対称性に関しても同様に固有値の関係を調べることができる。その結果を表 4.1 に示す。表 4.1 より、行列 Z が有しうる対称性は AZ[†] クラスのものに限られることがわかる。このことから、先行研究 [60] では、一体リンドブラディアンのスペクトルは AZ[†] クラスによりトポロジカルに分類できると報告した。

これに対して、本研究では一体リンドブラディアンの特クトルを記述する行列 Z に対して副格子対称性とトポロジカルに同値な対称性を定義した。その対称性は Z のトレースに関与しない項

$$Z' := Z - iaI, a := \frac{\text{tr}[Z]}{i\text{tr}[I]} \quad (4.34)$$

に対して、実空間では

$$Z' = -SZ'S^\dagger, S^2 = I, \quad (4.35)$$

運動量空間では

$$Z'(\mathbf{k}) = -S^\dagger Z'(\mathbf{k})S, S^2 = I, \quad (4.36)$$

と定義される。(4.35),(4.36) 式の対称性を、シフトした副格子対称性と呼ぶ。 a は Z' がトレース 0 になるように一意に定まり、(4.3) 式より \tilde{H} がトレース 0 となり、 M が正定値行列であることを用いると、

$$a = \frac{i\text{tr}[\text{Re}M]}{i\text{tr}I} = \frac{\text{tr}[M]}{\text{tr}[I]} \geq 0 \quad (4.37)$$

を常に満たす。これより、(4.34) 式は Z の固有ベクトルを変化させずに、特クトルを虚軸の負の方向に a だけずらす操作に対応することがわかる。 Z がシフトした副格子対称性を有する時、 Z の固有値は $\pm\lambda + ia$ のペアで現れる。従って、 $|\text{Im}\lambda| \leq a$ が常に満たされるモデルであれば、 Z の全ての固有値は 0 以上の虚部を有し、リンドブラディアンの特クトルに対する制約と矛盾せず、 Z はシフトした副格子対称性を有することができる。更に、シフトした副格子対称性は、通常副格子対称性に実線ギャップを保ったまま連続変形することができる。実際、パラメータ $t \in [0, 1]$ に対して $Z(t) = Z - iatI$ とすると、 $Z(t)$ が $Z(0) = Z$ から $Z(1) = Z'$ への連続変形を定める。これにより、トポロジカルな分類に関しては、通常副格子対称性とシフトした副格子対称性を同一視することができ、リンドブラディアン (Z) に関しても副格子対称性が付加された AZ^\dagger クラスを考えることが可能となる。従って、先行研究 [60] の結果とは異なり、リンドブラディアンは孤立平衡系に対応物のない実線ギャップのトポロジカル相を有する。表 4.1 に示したように、 AZ^\dagger クラスの対称性は虚部が等しくなるように固有値のペアが形成されるため、これらの対称性は (4.34) 式の定数シフトにより不変に保たれる。そのため、 Z の対称性クラスを調べる代わりに、トレースレスな項 Z' の対称性クラスを調べるのが正当化される。また、トポロジカル相の分類において副格子対称性と同等の役割を果たす擬エルミート性も、固有値のシフトを組み合わせることでリンドブラディアンに対して拡張することができる。行列 Z に対する擬エルミート性は、(4.34) 式の Z' を用いて

$$Z' = \eta Z'^\dagger \eta^\dagger, \eta^2 = I \quad (4.38)$$

と定義される。

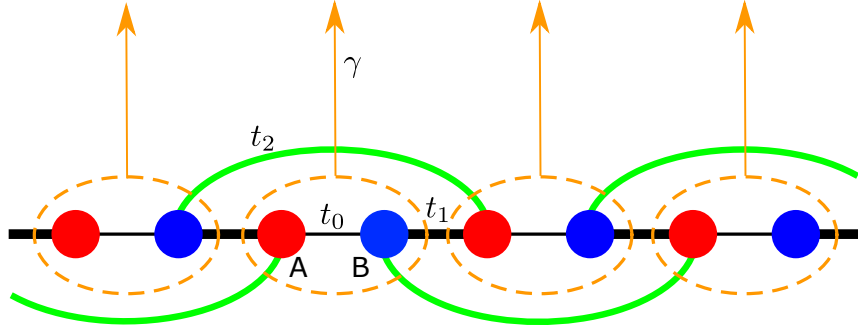


図 4.1: 副格子内散逸のある SSH モデルの概念図。黒細線は副格子内、黒太線は隣り合った副格子間、緑太線は 2 個隣の副格子間のホッピングを表す。橙色の矢印は (4.40) 式で記述される散逸を表す。

4.4 散逸的 SSH モデルにおける副格子対称性に保護されたエッジ状態

4.4.1 モデルの対称性とトポロジカル不変量

本節では、前節で定義したシフトした副格子対称性を有するリンドブラディアンを調べる。モデルとして、一次元トポロジカル絶縁体の代表例である SSH モデルに粒子の散逸を取り入れたものを考える。ハミルトニアンは

$$H = \sum_x \sum_{j=0}^2 (t_j c_{x,B}^\dagger c_{x+j,A} + \text{H.c.}), t_j \in \mathbb{R} \quad (4.39)$$

で与えられる。 $c_{x,s}$ は位置 x , 副格子 $s \in \{A, B\}$ のフェルミオンの消滅演算子である。散逸としては、副格子内のフェルミオンに作用する一体ロス

$$L_x = \gamma(c_{x,A} + c_{x,B}) \quad (4.40)$$

を考える。今回のモデルでは、散逸の強さはフェルミオンの位置や副格子に依存しない。このモデルの概念図を図 4.1 に示す。本節ではマヨラナ演算子 w の添字を $w_{x,s,\alpha} := c_{x,s} + c_{x,s}^\dagger$, $w_{x,s,\beta} := i(c_{x,s} - c_{x,s}^\dagger)$ と定義することになると、電子の生成・消滅演算子は

$$c_{x,s} = \frac{w_{x,s,\alpha} + iw_{x,s,\beta}}{2}, c_{x,s}^\dagger = \frac{w_{x,s,\alpha} - iw_{x,s,\beta}}{2} \quad (4.41)$$

と書き表すことができる。(4.41) 式を (4.39), (4.40) 式に代入することで、ハミルトニアンやジャンプ演算子を (4.3), (4.4) 式の形に書き直せ、行列 \tilde{H} やベクトル \mathbf{l}_x を得ることができる。計算を行うと、マヨラナ演算子で表示した際の一粒子ハミルトニアン \tilde{H} は

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_{\text{kit}} & 0 \\ 0 & -\tilde{H}_{\text{kit}} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

となり、ブロック対角化することができる。 \tilde{H}_{kit} は一次元トポロジカル超伝導体の代表的なモデルであるキタエフ鎖 [90] に次近接ホッピングを加えたモデルの一粒子ハミルトニアンで

$$\tilde{H}_{\text{kit}} = \sum_x \sum_{j=0}^2 \left(\frac{i}{4} t_j |x, u\rangle \langle x+j, \bar{u}| + \text{H.c.} \right) \quad (4.43)$$

と与えられる。ここで、(4.42) 式の基底は、上は $\{|xA\beta\rangle, |xB\alpha\rangle\}$ 、下は $\{|xA\alpha\rangle, |xB\beta\rangle\}$ で張られている。(4.43) 式内の u は上のブロックでは $u = A\beta$ 、下のブロックでは $u = A\alpha$ であり、 \bar{u} は u の二つの指数を反転させたものを表す。また、散逸を特徴づける (4.22) 式で定義された行列 M は、(4.42) 式の基底の下で

$$M = \frac{\gamma^2}{4} \sum_x |x\rangle \langle x| \otimes \begin{pmatrix} I - \sigma_y & \sigma_x + i\sigma_z \\ \sigma_x - i\sigma_z & I + \sigma_y \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

と表せる。これより、リンドブラディアンの特値を特徴づける行列 Z は

$$\begin{aligned} Z &= \tilde{H} + i\text{Re}M \\ &= \begin{pmatrix} H^{\text{kit}} & 0 \\ 0 & -H^{\text{kit}} \end{pmatrix} + \frac{i\gamma^2}{4} \sum_x |x\rangle \langle x| \otimes \begin{pmatrix} I_2 & \sigma_x \\ \sigma_x & I_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.45)$$

と求められる。散逸がない場合にはキタエフ鎖が二本独立に並んでいるようなモデルであったが、散逸により二本のキタエフ鎖の間に反エルミートなホッピングが生じる。従って、今回調べる散逸的な SSH モデルの特値は、非エルミートなホッピングのあるはしご型キタエフ鎖の特値と等価となる。

このモデルに周期境界条件を課すと、リンドブラディアンは並進対称性を有するため、フーリエ変換

$$Z(k) = \sum_x e^{-ikx} Z(x) \quad (4.46)$$

を行うことで、運動量空間での行列 Z を

$$Z(k) = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \gamma^2 & -t_k^* & 0 & \gamma^2 \\ t_k & \gamma^2 & \gamma^2 & 0 \\ 0 & \gamma^2 & \gamma^2 & t_k^* \\ \gamma^2 & 0 & -t_k & \gamma^2 \end{pmatrix}, t_k = \sum_{j=0}^2 e^{ikj} t_j \quad (4.47)$$

と得ることができる。 $Z(k)$ を対角化することでバルク状態の特値を得ることができ、

$$\lambda_{p,q}(k) = \frac{i\gamma^2}{4} + \frac{(-1)^q}{4} \sqrt{|t_k|^2 - \gamma^4 + (-1)^{p+1} 2i\gamma^2 \text{Re}t_k}, \quad p, q \in \{0, 1\} \quad (4.48)$$

となる。(4.48) 式の特値を複素平面上にプロットした結果を図 4.2 に示す。図 4.2(a) に示したように、 $Z(k)$ は実線ギャップを有する。(4.48) 式より、 $\text{Re}t_k = 0$ かつ $|t_k|^2 \leq \gamma^4$ となる波数 k が存在する場合に実線ギャップが閉じる。図 4.2(b) のパラメータでは上の条件が達成され、実線ギャップが閉じる。

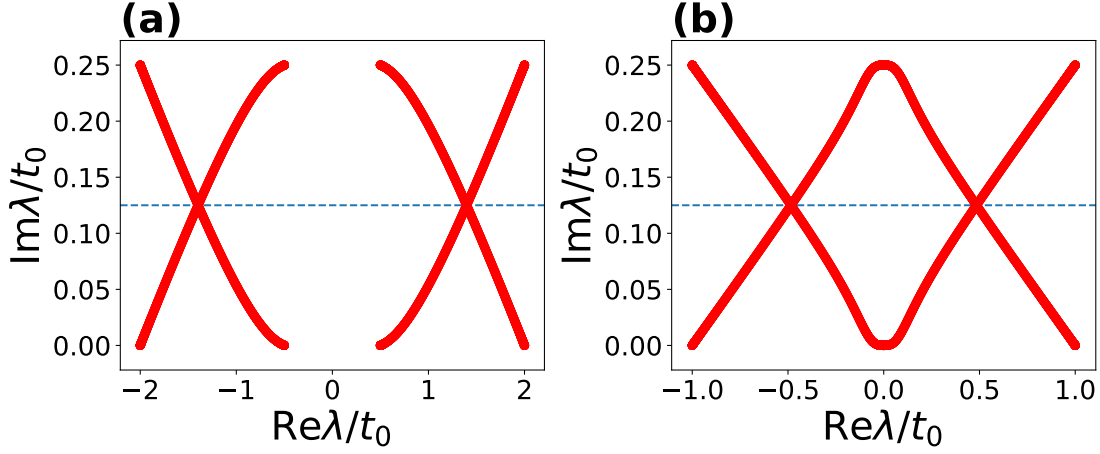


図 4.2: 周期境界条件下での $Z(k)$ のスペクトル。点線は $\frac{ia}{t_0} = \frac{\gamma^2}{4t_0}$ を表す。(a) $t_1 = 5t_0$, $t_2 = 2t_0$, $\gamma^2 = 0.5t_0$ の場合。(b) $t_1 = 2t_0$, $t_2 = t_0$, $\gamma^2 = 0.5t_0$ の場合。

次に、このモデルの対称性を調べる。前節の議論より、 Z のトレースに寄与しない項

$$Z'(k) := Z(k) - \frac{i\gamma^2}{4} I_4 \quad (4.49)$$

の対称性を調べれば良い。対称性を調べると、 $Z'(k)$ は AZ^\dagger クラスの全ての対称性を有する:

$$Z'(k) = T_{\text{NH}} Z'^\dagger(-k) T_{\text{NH}}^\dagger, \quad T = (\sigma_x \otimes I_2) \mathcal{K}, \quad (4.50)$$

$$Z'(k) = -\Xi_{\text{NH}} Z'(-k) \Xi_{\text{NH}}^\dagger, \quad \Xi_{\text{NH}} = \mathcal{K} \quad (4.51)$$

$$Z'(k) = -\Gamma Z'^\dagger(k) \Gamma^\dagger, \quad \Gamma = \sigma_x \otimes I_2. \quad (4.52)$$

更に、このモデルはシフトした副格子対称性

$$Z'(k) = -S Z'(k) S^{-1}, \quad S = I_2 \otimes \sigma_z \quad (4.53)$$

を有する。 S と T, Ξ は交換するため、このモデルの対称性クラスは $\text{BDI} + \mathcal{S}_{++}$ に分類される。先行研究 [60] では副格子対称性の付加された対称性クラスは考慮されていなかったため、このモデルの対称性クラスは本研究で定義したシフトした副格子対称性を用いることで初めて取り扱えるようになる。分類表 3.3 より、このモデルのトポロジカル相は二つの整数値トポロジカル不変量により特徴づけられることがわかる。

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ トポロジカル不変量を計算するためには、何らかの方法で系を二つのセクターに分割する必要がある。その方法は先行研究 [47] で提案されている。 $Z'(k)$ はカイラル対称性と副格子対称性を有するため、これらの組合せにより $Z'(k)$ は擬エルミート性

$$Z'(k) = \eta Z'^\dagger(k) \eta^\dagger, \quad \eta = \Gamma S = \sigma_x \otimes \sigma_z. \quad (4.54)$$

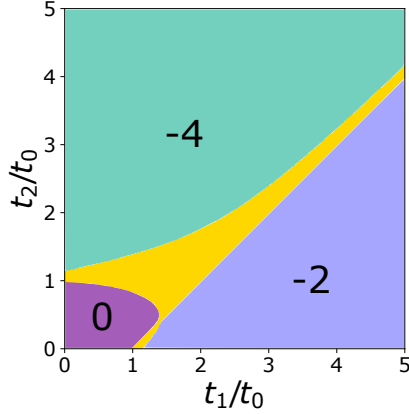


図 4.3: 散逸的な SSH モデルにおけるトポロジカル不変量 w の相図。散逸の強さは $\gamma^2 = 0.5t_0$ で固定した。黄色の領域では実線ギャップが閉じ、トポロジカル不変量は定義されない。

を有する。詳細な手続きは付録 B で述べるが、擬エルミート性の下で

$$\eta |\phi_n^\pm\rangle = \pm |\phi_n^\pm\rangle \quad (4.55)$$

となる正規双直交ベクトルを構成することができ、(4.55) 式の符号の正負でヒルベルト空間を分割すると、 $Z'(k) = Z'_+(k) \oplus Z'_-(k)$ とブロック対角化することができる。それぞれのセクターに対しても副格子対称性 $Z'_\pm(k) = -S_\pm Z'(k) S_\pm^\dagger$ が保たれるため、各セクターでトポロジカル不変量である巻き付き数

$$w_\pm := \frac{1}{4\pi i} \int_{\text{BZ}} dk \text{tr} \left[S_\pm Z'^{-1}_\pm(k) \frac{dZ'_\pm(k)}{dk} \right] \quad (4.56)$$

を計算することができる。計算の結果、今回のモデルでは二つのトポロジカル不変量が一致し、トポロジカル相は一つの巻き付き数

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{BZ}} dk \left[\frac{d}{dk} \log(t_k^* - i\gamma^2) + \frac{d}{dk} \log(t_k^* + i\gamma^2) \right]. \quad (4.57)$$

で特徴づけられることがわかった。巻き付き数 w は二つの複素関数 $t_k^* \pm i\gamma^2$ の複素平面上での回転数の和と等しくなる。 w のホッピングの強さ t_1, t_2 に対する依存性を図 4.3 に示す。

4.4.2 エッジ状態

固定端境界条件下で Z を数値的に対角化することで、エッジモードを調べた。数値的に得たスペクトルを図 4.4 に示す。図 4.4(a) のパラメータでは巻き付き数が $w = -2$ で与えられる。左右に境界があることに対応して、図 4.4(a) に示したように、四個のエッジ状態が現れることを確認した。これらのエッジ状態は図 4.4(b) に示すように、境界に局在した状態となる。 Z' のエッジ状態の固有値は、副格子対称性から 0 となるため、 Z のエッジ状態の固有値は全て $i\gamma^2/4$ となる。シフトした副格子対称性を

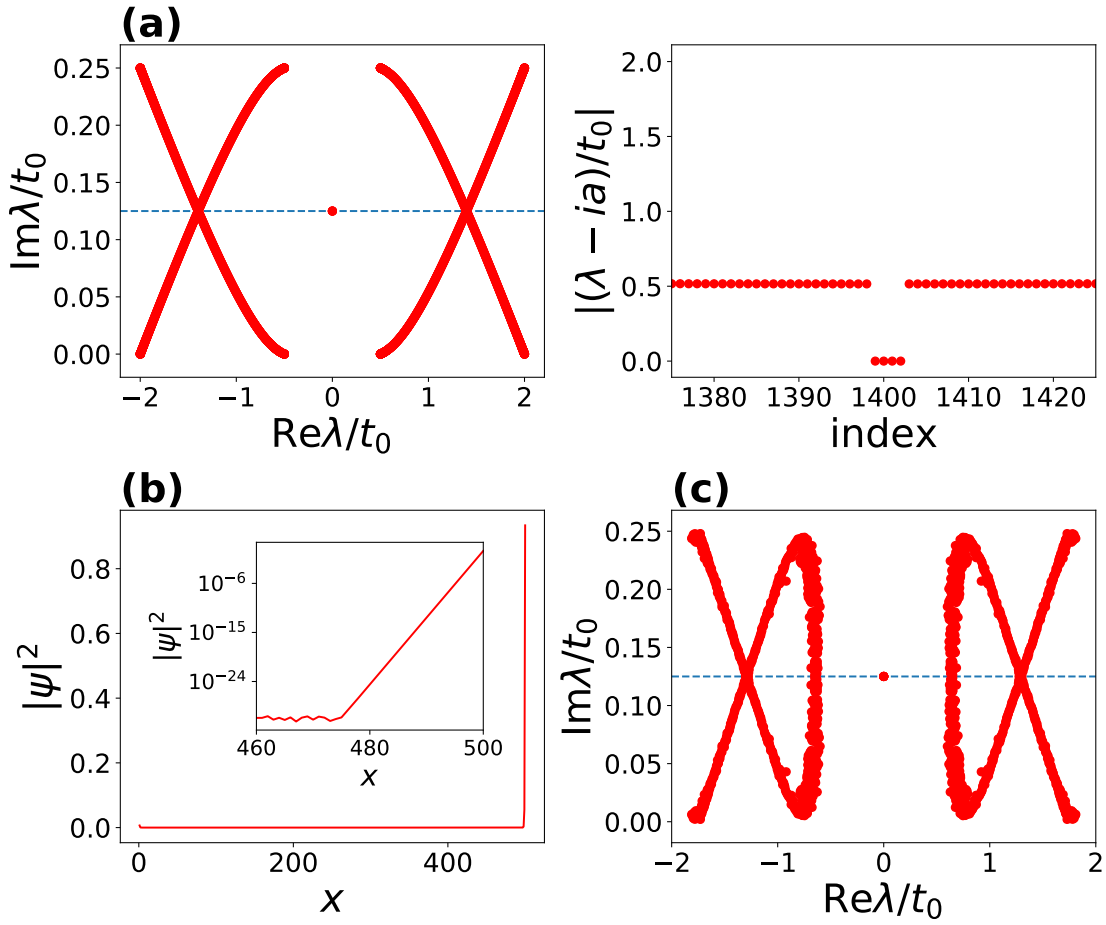


図 4.4: ((a) 固定端境界条件下での Z のスペクトル。各種パラメータは $N = 500$, $t_1 = 5t_0$, $t_2 = 2t_0$, $\gamma^2 = 0.5t_0$ とした。左:複素平面上でのスペクトル。右: $ia = i\gamma^2/4$ 付近でのスペクトルの絶対値。横軸は固有値のラベルを表し、 $\lambda = i\gamma^2/4$ に固有値が四重縮退している。(b) エッジ状態の空間分布。ここで $|\psi_x|^2 := \sum_{s=A,B} \sum_{\mu=\alpha,\beta} |\psi_{x,s,\mu}|^2$ とした。挿入図は $x = 500$ 近辺での片対数プロットを表す。(c) 固定端境界条件下でホッピング振幅が空間的に乱れた場合の Z のスペクトル。 $\bar{t}_1 = 2t_0$, $\bar{t}_2 = 4t_0$, $\gamma^2 = 0.5t_0$ とした。(a),(c) の点線は $ia/t_0 = \gamma^2/4t_0$ を表す。

有する系では一般に、同様の機構によって複数のエッジ状態の固有値は縮退し、その固有値は ia で与えられる。更に、網羅的に数値計算を行った結果、図 4.3 に示した全てのパラメータ領域で、エッジ状態数が $2|w|$ と等しくなることを確認した。

また、エッジ状態のトポロジカルな安定性も調べるために、空間的な乱れが存在する場合のスペクトルの数値計算も行った。ハミルトニアンホッピング振幅が空間的に乱れている状況を考え、 (x, B) と $(x + j, A)$ の間のホッピング振幅を

$$t_{x,j} = \bar{t}_j + \delta t_{x,j} \quad (4.58)$$

とした。 \bar{t}_j はホッピング振幅の平均を表し、 $\delta t_{x,j}$ は $[-0.3t_0, 0.3t_0]$ の範囲に値を持つ空間的に無相関な一様乱数である。ホッピング振幅の空間的な乱れは、シフトした副格子対称性を含む、 Z の対称性を破らないため、エッジ状態はこの摂動に対して安定だと予想される。空間的な乱れを課した場合のスペクトルの数値計算結果を図 4.4(c) に示す。図 4.4(c) に示したように、バルク状態は摂動により乱されているが、エッジ状態は安定に存在し、その固有値は $i\gamma^2/4$ に保たれる。従って、シフトした副格子対称性に保護されたエッジ状態はトポロジカルに安定であるとわかった。摂動の取り入れ方として、散逸の強さ γ の空間的な乱れも考えられるが、この摂動は AZ^\dagger 対称性は破らないが、シフトした副格子対称性を破る。そのため、散逸の空間的な乱れに対しては、エッジ状態は頑強ではない。

4.4.3 局所占有数の時間発展

前項までで、リンドブラディアンにエッジ状態に対応する固有値が現れることを明らかにした。本項では

$$n_{x,s}(t) := \text{tr}[\rho(t)c_{x,s}^\dagger c_{x,s}] \quad (4.59)$$

で定義される局所占有数の時間発展を調べ、エッジ状態の与える影響を調べた。局所占有数はマヨラナ演算子を用いて

$$n_{x,s}(t) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \text{tr}[\rho(t)w_{x,s,\alpha}w_{x,s,\beta}] \quad (4.60)$$

と書き直せるため、4.2 節で導入した共分散行列を解析すれば良い。定常状態の局所占有数 $n_{x,s}^{\text{ss}} := \text{tr}[\rho^{\text{ss}}c_{x,s}^\dagger c_{x,s}]$ との差分を考えると、

$$\begin{aligned} n_{x,s}(t) - n_{x,s}^{\text{ss}} &= -\frac{i}{2} \text{tr}[\rho(t)w_{x,s,\alpha}w_{x,s,\beta}] + \frac{i}{2} \text{tr}[\rho^{\text{ss}}w_{x,s,\alpha}w_{x,s,\beta}] \\ &= -\frac{i}{2} [\tilde{C}(t)]_{x\alpha, x\beta}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

と書ける。 \tilde{C} の形式解は (4.31) 式で与えられているため、局所占有数の緩和過程は (4.61) 式で調べることができる。特に、 $\rho(t) - \rho^{\text{ss}}$ がリンドブラディアンの固有値 $\tilde{\lambda}$, $-\tilde{\lambda}^*$ の固有状態の線形和で近似できる場合には、局所占有数は

$$n_{x,s}(t) - n_{x,s}^{\text{ss}} \propto e^{-8\text{Im}\tilde{\lambda}t} \quad (4.62)$$

のように時間発展する。

局所占有数の時間発展を計算した結果を図 4.5 に示す。エッジ状態は境界付近に局在した状態となるため、エッジ状態が存在するなら、系の境界に局在した初期状態 ρ_{in} はエッジ状態により近似できる。そのため $\tilde{\lambda} = i\gamma^2/4$ となり、境界での局所占有数は

$$n_{\text{edge}}(t) - n_{x,s}^{\text{ss}} \propto e^{-2\gamma^2 t} \quad (4.63)$$

に従って減衰すると予想される。特に、シフトした副格子対称性により全てのエッジ状態の固有値が等しくなっていることから、(4.63) 式はトポロジカル不変量の詳細な値や、考えている境界の位置に依存

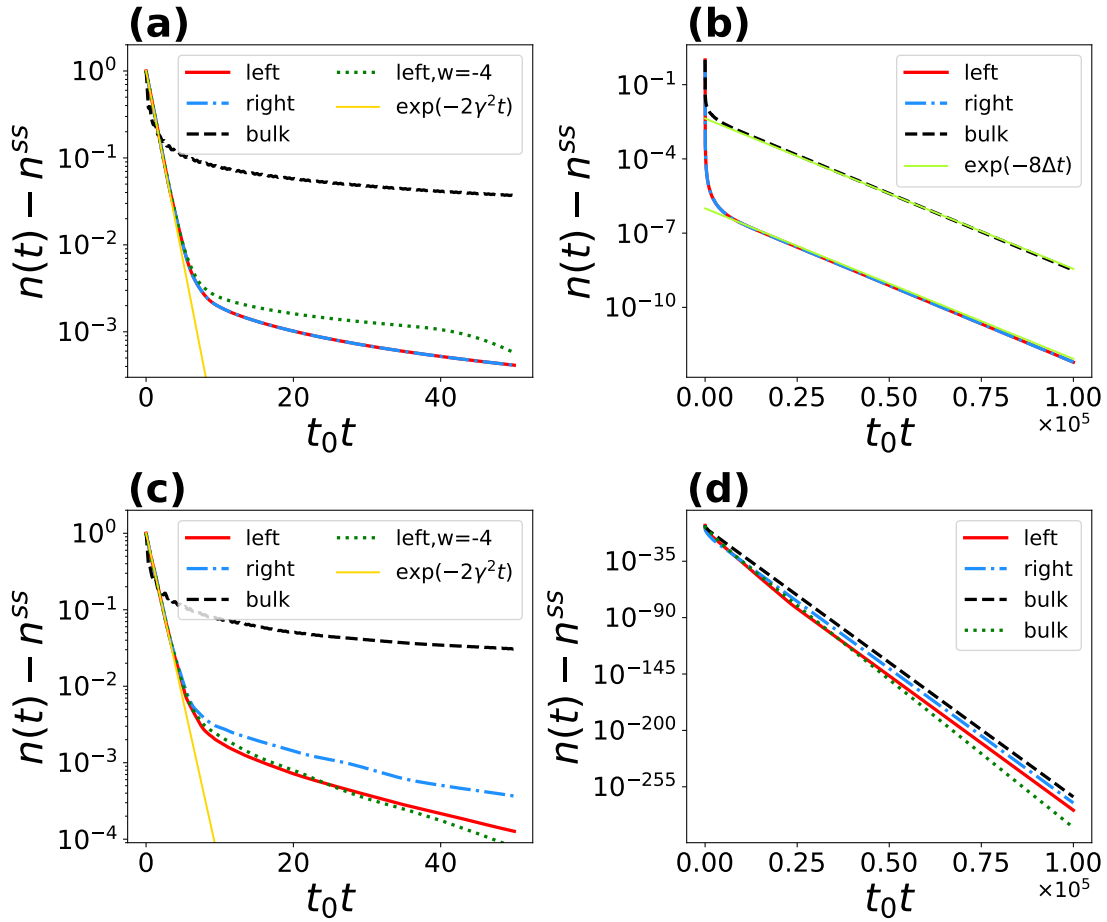


図 4.5: 局所占占有数 $n_{x,s}(t)$ の時間発展。ラベル left, right, bulk はそれぞれ、 $(x, s) = (1, A), (N, B), (\frac{N}{2}, A)$ での局所占占有数を表す。各種パラメータは $N = 100, t_1 = 5t_0, t_2 = 2t_0, \gamma^2 = 0.5t_0$ ($w = -2$) として計算を行った。ただし、(a),(c) 内の”left, $w = -4$ ”は $t_1 = 2t_0, t_2 = 4t_0$ ($w = -4$) とした。また、初期状態は $\rho_{\text{in}} = |x, s\rangle\langle x, s|$, $|x, s\rangle := c_{x,s}|\text{vac}\rangle$ とした。(a) 短時間の時間発展。(b) 長時間の時間発展。スペクトルギャップは $\Delta = 1.8 \times 10^{-5}t_0$ である。(c) 乱れがある場合の短時間の時間発展。(d) 乱れがある場合の長時間の時間発展。緑点線と黒線の結果は乱れが異なる場合の結果を表す。(c),(d) において、乱れは 4.4.2 項と同様に、ホッピングの空間的乱れを考えた。

せずに成立すると考えられる。図 4.5(a) の結果はこの予想を支持しており、時刻 t が小さい場合には、境界での局所占占有数の時間発展は (4.63) 式 [図 4.5(a) 黄線] で良く近似できる。一方で、エッジ状態が十分減衰しきった場合には $\rho(t)$ がエッジ状態で近似できなくなり、(4.63) 式が成立しなくなる。十分時間が経った後には最長寿命の固有状態のみが減衰しきらずに残ると考えられるため、その減衰率はスペクトルギャップ

$$\text{Im}\tilde{\lambda} = \Delta := \min_i \text{Im}\lambda_i \quad (4.64)$$

で決定される。この時には任意の位置で $\rho(t) - \rho^{\text{ss}}$ が最長寿命の固有状態の線形結合で表されるため、局所占有数の減衰率はどの位置でも Δ により与えられる。図 4.5(b) は局所占有数の長時間の時間発展を示しており、上述した予想どおり、系の境界・内部のどちらでも局所占有数が

$$n_{\text{edge}}(t) - n_{\text{edge}}^{\text{ss}} \propto e^{-8\Delta t} \quad (4.65)$$

に従って減衰する。また、今回のモデルでは $n_{x,s}^{\text{ss}} = 0$ となり、定常状態はトポロジカルに自明な状態となる。

前項で、エッジ状態の固有値はホッピングの空間的な乱れに対して安定であることを示した。これを反映して、境界での局所占有数の減衰率も対称性を破らない摂動に対して安定となる。ホッピングの空間的な乱れを課した場合の局所占有数の時間発展を図 4.5(c) に示す。図 4.5(c) に示されたように、摂動がある場合でも、短時間領域での局所占有数は (4.63) 式に従い、減衰率は摂動に対して安定となる。一方で、長時間の時間発展を特徴づける (4.64) 式のスペクトルギャップはトポロジカルに保護されていないため、摂動により値が変化する。各種パラメータは同じで、乱れのみが異なる場合の計算結果を図 4.5(d) の緑点線と黒線に示す。この時スペクトルギャップはそれぞれ $\Delta = 7.5 \times 10^{-4}t_0$, $5.8 \times 10^{-4}t_0$ となり、異なる値をとる。従って、エッジ状態が支配的な短時間の時間発展では減衰率がトポロジカルに保護されていたのに対して、長時間の時間発展の減衰率は摂動に対して頑強ではない。

今回取り扱った散逸的な SSH モデルでは、境界での局所占有数の短時間領域での減衰率が γ のみの関数となり、ホッピング振幅の詳細な値に依存しないことを示した。一般に、シフトした副格子対称性を有するトポロジカルに非自明な開放量子系では、境界での局所占有数の短時間領域での減衰率が散逸のパラメータのみに依存することを示せる。(4.37) 式から、エッジ状態の固有値は $ia = i\text{tr}[M]/\text{tr}[I]$ となる。 M はジャンプ演算子のみから決まる行列であるため、 a もジャンプ演算子のみに依存する値となり、エッジ状態の固有値はジャンプ演算子のパラメータのみに依存する。

4.5 シフトした副格子対称性を有するためにジャンプ演算子が満たす条件

本節では、1次元の開放量子系がシフトした副格子対称性を有する十分条件を求める。初めに Z のエルミート成分に着目すると、マヨラナ表示での一体ハミルトニアン \tilde{H} は副格子対称性 $\tilde{H}(k) = -S\tilde{H}(k)S^\dagger$ を満たす必要がある。本節では二つの副格子から構成される副格子対称な 1次元ハミルトニアンを考えると、この場合、適当なユニタリ変換を組み合わせることにより、一般性を損なうことなく、対称性演算子を $S = I_2 \otimes \sigma_z$ と取ることができる。

Z の反エルミート成分に着目すると、シフトした副格子対称性を有する場合、反エルミート成分は

$$\text{Re}M(k) - a(k)I = -S[\text{Re}M(k) - a(k)I]S^\dagger \quad (4.66)$$

を満たす。\$S = I_2 \otimes \sigma_z\$ を代入すると、(4.66) 式は

$$\text{Re}M(k) - a(k)I = A(k) \otimes \sigma_x + B(k) \otimes \sigma_y \quad (4.67)$$

と書き換えられる。ここで、\$A(k), B(k)\$ は \$2 \times 2\$ 行列である。更に、ジャンプ演算子が並進対称性を有し、単位格子内のみに作用することを仮定する。この場合、ジャンプ演算子は

$$L_x = \sum_{s=A,B} \sum_{\omega=\alpha,\beta} l_{s,\omega} w_{x,s,\omega}. \quad (4.68)$$

と表される。このジャンプ演算子を用いて行列 \$M\$ を計算すると、\$M\$ は運動量依存性を持たず、

$$M(k) = \tilde{M}, \quad \tilde{M}_{s\omega, s'\omega'} := l_{s,\omega} l_{s',\omega'}^* \quad (4.69)$$

となる。(4.69) 式を (4.67) 式に代入すると、\$\tilde{M}\$ の対角成分が \$s, \omega\$ に依存せず、\$\tilde{M}_{s\alpha, s\beta}\$ が純虚数になる場合に (4.67) 式が満たされることがわかる。これらの条件は

$$|l_{s,\omega}| = \gamma, \quad s = A, B, \quad \omega = \alpha, \beta, \quad (4.70)$$

$$\arg l_{s,\alpha} = \theta_s, \quad \arg l_{s,\beta} = \theta_s + \left(n_s - \frac{1}{2}\right) \pi \quad (\theta_s \in \mathbb{R}, \quad n_s \in \mathbb{Z}) \quad (4.71)$$

と書き換えることができる。(4.70),(4.71) 式を (4.68) 式に代入すると、シフトした副格子対称性を満たすジャンプ演算子

$$L_x = \gamma e^{i\theta_A} [w_{x,A,\alpha} + (-1)^{n_A+1} i w_{x,A,\beta}] + \gamma e^{i\theta_B} [w_{x,B,\alpha} + (-1)^{n_B+1} i w_{x,B,\beta}]. \quad (4.72)$$

を得る。電子の生成・消滅演算子がマヨラナ演算子を用いて \$c_{x,s} = (w_{x,s,\alpha} + i w_{x,s,\beta})/2\$, \$c_{x,s}^\dagger = (w_{x,s,\alpha} - i w_{x,s,\beta})/2\$ と書かれることを考慮すると、ジャンプ演算子内に同じ電子の生成演算子か消滅演算子のどちらかのみが含まれる場合に、リンドブラディアンがシフトした副格子対称性を有する。前節で取り扱った (4.40) 式の散逸的な SSH モデルのジャンプ演算子はこの条件を満たすため、シフトした副格子対称性を有する。更に、一体の原子散逸だけでなく、電子に対するコヒーレントな散逸と増幅 \$L_x = \gamma(c_{x,A} + c_{x,B}^\dagger)\$ も (4.72) 式の表式を満たすため、シフトした副格子対称性を有することができる。一方で、マヨラナ演算子に比例する散逸 \$L_x = \gamma \sum_{s=A,B} w_{x,s,\alpha} = \gamma \sum_{s=A,B} (c_{x,s} + c_{x,s}^\dagger)\$ はジャンプ演算子内に同じ電子の生成演算子と消滅演算子が同時に含まれるため、シフトした副格子対称性を有することができない。

ハミルトニアンに対する副格子対称性の対称性演算子が \$S \neq I_2 \otimes \sigma_z\$ となる場合、適切なユニタリ変換 \$U\$ を選ぶことにより、\$S' = USU^\dagger = I_2 \otimes \sigma_z\$ のように、対称性演算子を \$I_2 \otimes \sigma_z\$ に変換することができる。この変換の下で、散逸を特徴づける行列 \$\tilde{M}\$ も同様に \$\tilde{M}' = U\tilde{M}U^\dagger\$ と変換される。\$\tilde{M}'\$ の行列要素は

$$\tilde{M}'_{s\omega, s'\omega'} = l'_{s,\omega} l'^*_{s',\omega'}, \quad l'_{s,\omega} := \sum_{s',\omega'} U_{s\omega, s'\omega'} l_{s',\omega'} \quad (4.73)$$

と求められ、(4.69) 式の $l_{s,\omega}$ が $l'_{s,\omega}$ に置き換えた形となる。(4.73) 式の \tilde{M}' に対してシフトした副格子対称性を有する条件を求めると、

$$|l'_{s,\omega}| = \gamma', \quad s = A, B, \quad \omega = \alpha, \beta, \quad (4.74)$$

$$\arg l'_{s,\alpha} = \theta'_s, \quad \arg l'_{s,\beta} = \theta'_s + \left(n'_s - \frac{1}{2}\right) \pi \quad (\theta'_s \in \mathbb{R}, \quad n'_s \in \mathbb{Z}) \quad (4.75)$$

を得る。ユニタリ変換前のジャンプ演算子の係数 $l_{s,\omega}$ は

$$l_{s,\omega} = \sum_{s',\omega'} U_{s'\omega',s\omega}^* l'_{s',\omega'} \quad (4.76)$$

によって得られるため、 $S \neq I_2 \otimes \sigma_z$ となる場合でも、シフトした副格子対称性を有する条件を求めることができる。

4.6 結論

本章では、開放量子系の時間発展を特徴づけるリンドブラディアンに対するトポロジカルな分類の拡張を試みた。そのために、リンドブラディアンに対して成立し得る対称性であるシフトした副格子対称性を定義した。その結果、先行研究では考えられていなかった対称性クラスである、シフトした副格子対称性が付加された AZ^\dagger 対称性クラスがリンドブラディアンでも実現可能であり、対称性クラスの数が増加することを示した。シフトした副格子対称性を有する具体的なモデルとして散逸的な SSH モデルを考え、シフトした副格子対称性によりエッジ状態やその固有値が保護されることを示した。また、シフトした副格子対称性を反映して、境界での局所占占有数の減衰率がジャンプ演算子から定まり、左右どちらの境界でも一致することを示した。1次元開放量子系がシフトした副格子対称性を有する条件に関しても議論し、対称性演算子が $S = I_2 \otimes \sigma_z$ と書ける場合には、ジャンプ演算子内に電子の生成演算子か消滅演算子のどちらかのみが含まれる場合に、系がシフトした副格子対称性を有しうることを示した。

第 5 章

PT 対称性を有する開放量子系のトポロジカル相

5.1 序論

開放系における重要な対称性の一つに、(3.47) 式で定義される、非エルミート系に対する PT 対称性がある。PT 対称な系では、固有状態の PT 対称性の破れに伴う固有値の実-複素転移が存在し、PT 対称性の破れに伴う開放系特有の物理現象が調べられている。PT 対称なハミルトニアンは、増幅と減衰が釣り合った古典光学系で実現することができ、PT 対称性の破れを用いたレーザー発信やセンシングへの応用も考えられている。量子光学系においても、事後測定を行うことで非エルミートな時間発展を実現することができ、実効的に PT 対称性を有する時間発展が実装される。特に、一光子系において光子の流出効果を取り入れ、系に光子が残る場合のみを事後測定することにより、PT 対称性を伴った量子ウォークという離散的な時間発展が先行研究 [40] により実現された。先行研究 [40] では PT 対称性を伴うトポロジカル相が実験的に調べられ、エッジ状態が PT 対称性を破ることにより、バルク状態に比べて指数関数的に振幅が増大することを示した。

開放量子系に対する PT 対称性の拡張も考えられている。PT 対称性を有する行列の固有値が複素数となる場合、その複素共役も固有値として存在するため、前章での議論と同様に、リンドブラディアンに対して (3.47) 式で PT 対称性を定義することはできない。しかし、副格子対称性の場合と同様に、固有値のシフトを組み合わせることにより、リンドブラディアンのトレースレス項に対して PT 対称性を定義することができる [91]。これにより、開放量子系でも PT 対称性の破れに伴うエッジ状態の長寿命化が起こると考えられるが、そのような研究は行われていない。

そこで、本章では PT 対称性を有する開放量子系のトポロジカル相を考え、PT 対称性の破れに伴うエッジ状態の長寿命化が起こるかを調べた [76]。一次元トポロジカル超伝導体のモデルであるキタエフ鎖に PT 対称な散逸を加えたモデルを考え、散逸が弱い場合には全てのバルク状態が PT 対称性を保

ち、固有値の虚部が全て等しくなることを示した。更に、エッジ状態が PT 対称性を破り、そのうちの一つの固有値はゼロとなることを示した。また、これらの振る舞いが SSH モデルにおいても再現されることを確認した。

本章の構成は以下ようになる。5.2 節ではリンドブラディアンに対する PT 対称性について説明する。5.3 節では PT 対称なキタエフ鎖のトポロジカル相を解析する。5.4 節では、5.3 節の結果の拡張として、PT 対称な SSH モデルのトポロジカル相を解析する。

5.2 リンドブラディアンの PT 対称性

前章に引き続いて本章では一体リンドブラディアンを考えるため、4.2 節で導入した第三量子化を適用することができる。そのため、リンドブラディアンに対する PT 対称性を考える際には、(4.21) 式で定義された、リンドブラディアンのスペクトルを決定する行列 Z の PT 対称性を考えることとする。3.3 節で説明したように、 Z が PT 対称性

$$PTZ(PT)^\dagger = Z, PTi(PT)^\dagger = -i \quad (5.1)$$

を有する場合、 Z の固有ベクトルが PT 対称性を保つ場合には対応する固有値が実になり、保たない場合には固有値が複素共役のペアで現れる。従って、 Z の全ての固有ベクトルが PT 対称性を保たない限り Z は虚部が負となる固有値を有することになり、行列 Z が満たすべき制約と矛盾するため、 Z は (5.1) 式の PT 対称性を有することができない。この問題は 4.3 節でリンドブラディアンに対して副格子対称性を定義する際にも現れたが、この問題はスペクトルの虚軸方向へのシフトにより解決することができた。リンドブラディアンに対して PT 対称性を定義する際にも同様に、スペクトルのシフトを組み込むことで”シフトした”PT 対称性を定義することが可能となる。定義より Z は常に非エルミート粒子正孔対称性 $Z^* = -Z$ を有するため、 Z が PT 対称性を有すると必ず Z のトレースはゼロとなる。そのため、副格子対称性の場合と同様に、(4.34) 式で定義した Z のトレースレス項 \tilde{Z} に対して PT 対称性

$$PT\tilde{Z}(PT)^\dagger = \tilde{Z}, PTi(PT)^\dagger = -i \quad (5.2)$$

を定義できる [91]。リンドブラディアンの PT 対称性は \tilde{Z} を介して定義されるため、固有値に対する関係式も修正が必要になる。非エルミート系の場合と同様に、PT 対称な行列 Z の固有ベクトルを $|\psi\rangle$ とした時に、 $|\psi\rangle$ が対称性演算子 PT の同時固有ベクトルとなる場合、固有ベクトル $|\psi\rangle$ は PT 対称性を保つと言う。 $|\psi\rangle$ が PT 対称性を保たない場合、固有ベクトル $|\psi\rangle$ は PT 対称性を破ると言う。固有ベクトル $|\psi\rangle$ が PT 対称性を保つ場合には \tilde{Z} の固有値が実になるため、 Z の固有値は $\lambda' + ia$, $\lambda' \in \mathbb{R}$ と表示でき、虚部は常に固有値のシフト $a = \text{tr}[Z]/i\text{tr}[I]$ で与えられる。一方で、固有ベクトル $|\psi\rangle$ が PT 対称性を破る場合には、二つの線形独立な固有ベクトル $|\psi\rangle, PT|\psi\rangle$ が現れ、それぞれの固有値が $\lambda' + ia, \lambda'^* + ia$ と表される。対応して、PT 対称な行列 Z の固有値は複素平面上で虚部が一定の値 a

となる直線に対して対称に分布する。

リンドブラディアンに対する PT 対称性は異なる方法でも定義されている [92, 93]。ハミルトニアンが H 、ジャンプ演算子が L_μ であるリンドブラディアンを明示的に $\hat{\mathcal{L}}[H; L_\mu]$ と書く。この時、リンドブラディアンに対する PT 対称性を

$$\hat{\mathcal{L}}[\mathbb{PT}(H); \mathbb{PT}'(L_\mu)] = \hat{\mathcal{L}}[H; L_\mu] \quad (5.3)$$

と定義する。PT, PT' は

$$\mathbb{PT}(H) := \mathcal{P}H^*\mathcal{P}^\dagger, \quad \mathbb{PT}'(L_\mu) := \mathcal{P}L_\mu^\dagger\mathcal{P}^\dagger \quad (5.4)$$

と定義される対称変換であり、 \mathcal{P} はパリティ反転を表す。この PT 対称性は本研究で用いる PT 対称性 (5.2) とは異なる対称性となる。実際、次節以降で取り扱うモデルにおいては、(5.2) 式の PT 対称性は成立するが、(5.3) 式の PT 対称性は成立しない。

5.3 PT 対称なキタエフ鎖

5.3.1 モデルと対称性

本節では PT 対称性を有するトポロジカルに非自明なリンドブラディアンとして、散逸的なキタエフ鎖を考える。キタエフ鎖のハミルトニアンはマヨラナ演算子を用いて

$$H_{\text{kit}} = \frac{it_0}{2} \sum_j (w_{j,\alpha}w_{j,\beta} - w_{j,\beta}w_{j,\alpha}) + \frac{it_1}{2} \sum_j (w_{j,\beta}w_{j+1,\alpha} - w_{j+1,\alpha}w_{j,\beta}), \quad t_0, t_1 \geq 0 \quad (5.5)$$

と書ける。散逸として、マヨラナ演算子に比例するようなジャンプ演算子

$$L_j = \gamma w_{j,\alpha}, \quad \gamma > 0. \quad (5.6)$$

を考える。(5.5),(5.6) 式から、ハミルトニアンとジャンプ演算子がそれぞれマヨラナ演算子に関して二次、線形になっているため、第三量子化を適用できる。今回のモデルではジャンプ演算子の係数ベクトル $l_{\mu,j}$ が常に実となるため、散逸を特徴づける行列 M も実となる。従って、(4.21) 式で定義された、定常状態に寄与する行列 Y は 0 となり、リンドブラディアンを

$$\hat{\mathcal{L}} = 4\hat{c}^\dagger \tilde{Z} \hat{c}, \quad \tilde{Z} = \tilde{H} - i\text{Re}M = -Z^T \quad (5.7)$$

と表示できる。つまり、(5.6) 式のジャンプ演算子の場合には、リンドブラディアンを一粒子ハミルトニアンが $4\tilde{Z}$ である一体非エルミートハミルトニアンと見なすことができる。周期境界条件を課した際の行列 \tilde{Z} は

$$\tilde{Z}(k) = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -2\gamma^2 & -t(k)^* \\ t(k) & 0 \end{pmatrix}, \quad t(k) := t_0 + t_1 e^{ik}. \quad (5.8)$$

と与えられる。

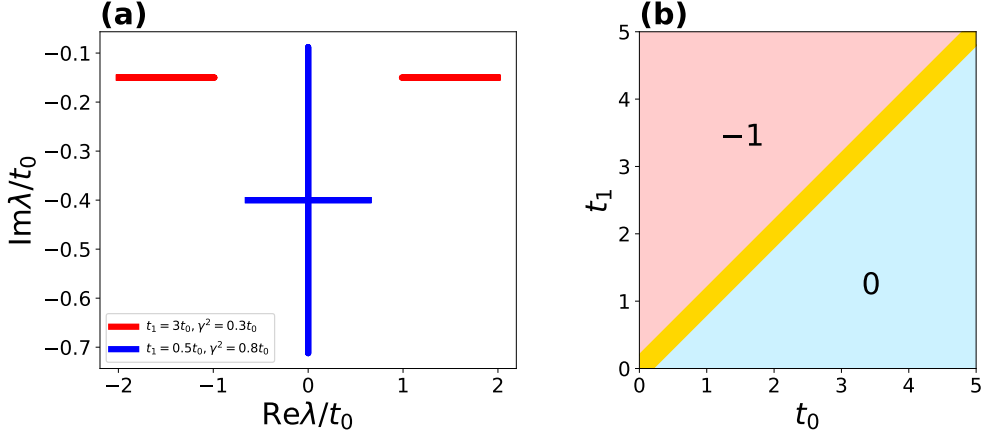


図 5.1: (a) 周期境界条件下での \tilde{Z} の固有値。赤線と青線はそれぞれ $t_1 = 3t_0, \gamma^2 = 0.3t_0$ (全ての固有ベクトルが PT 対称性を保つ)、 $t_1 = 0.5t_0, \gamma^2 = 0.8t_0$ (PT 対称性を破る固有ベクトルが存在する) とした場合の結果を表す。(b) $\gamma^2 = 0.2t_0$ とした際のトポロジカル不変量の相図。黄色の領域では PT 対称性の破れにより実線ギャップが閉じ、巻き付き数が定義されない。

\tilde{Z} の対称性を調べると、AZ[†] クラスの対称性を全て有し、BDI[†] クラスに属することがわかる:

$$\tilde{Z}(k) = T_{\text{NH}} \tilde{Z}^\dagger(-k) T_{\text{NH}}^\dagger, \quad T_{\text{NH}} = \sigma_z \mathcal{K}, \quad (5.9)$$

$$\tilde{Z}(k) = -\Xi_{\text{NH}} \tilde{Z}(-k) \Xi_{\text{NH}}^\dagger, \quad \Xi_{\text{NH}} = \mathcal{K}, \quad (5.10)$$

$$\tilde{Z}(k) = -\Gamma \tilde{Z}^\dagger(k) \Gamma^\dagger, \quad \Gamma = \sigma_z. \quad (5.11)$$

更に、 \tilde{Z} は PT 対称性

$$\tilde{Z}(k) + \frac{i\gamma^2}{2} I = (\mathcal{PT}) \left[\tilde{Z}(k) + \frac{i\gamma^2}{2} I \right] (\mathcal{PT})^{-1}, \quad \mathcal{PT} = \sigma_x \mathcal{K} \quad (5.12)$$

を有する。リンドブラディアンが $\tilde{Z} = -Z^T$ で特徴づけられているため、(5.2) 式とは固有値のシフトの符号が逆転する。

$\tilde{Z}(k)$ を対角化することにより、バルクのスペクトルが

$$\lambda_\pm = \pm \frac{1}{2} \sqrt{|t(k)|^2 - \gamma^4} - \frac{i\gamma^2}{2} \quad (5.13)$$

と得られる。(5.13) 式のスペクトルを複素平面上に図示したものを図 5.1(a) に示す。任意の k に対して $|t(k)|^2 > \gamma^4$ となる場合には $\tilde{Z}(k)$ の全ての固有ベクトルが PT 対称性を保ち、図 5.1(a) 内の赤線のように、全ての固有値の虚部が一定値 $-i\gamma^2/2$ をとる。 $|t(k)|^2 < \gamma^4$ となる波数 k が存在する場合には、いくつかの固有ベクトルが PT 対称性を破り、図 5.1(a) 内の青縦線に示したように、実線ギャップが閉じて固有値の虚部が一定ではなくなる。 $\tilde{Z}(k)$ の左右固有ベクトルは

$$\langle\langle \psi_\pm | = \frac{1}{N_\pm} (\pm \sqrt{|t(k)|^2 - \gamma^4} - i\gamma^2, -it(k)^*), \quad |\psi_\pm\rangle = \frac{1}{N_\pm} \begin{pmatrix} \pm \sqrt{|t(k)|^2 - \gamma^4} - i\gamma^2 \\ it(k) \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

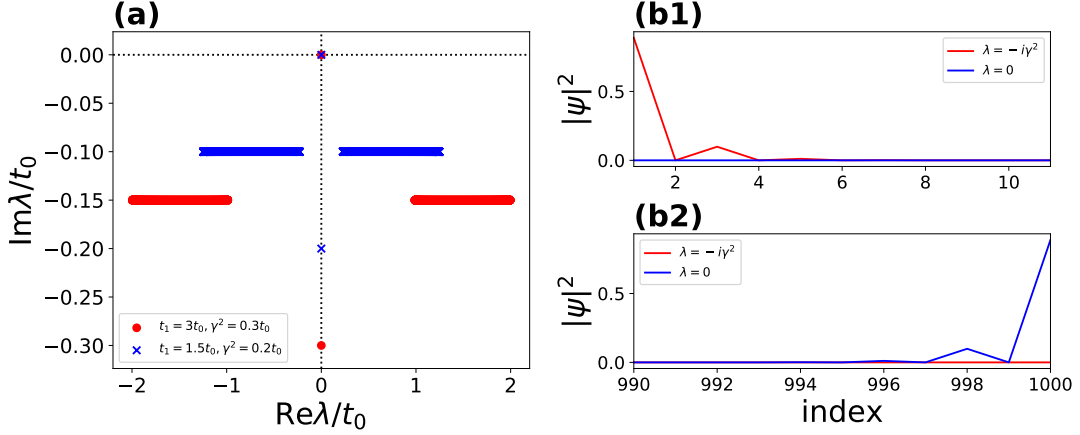


図 5.2: (a) 固定端境界条件下での \tilde{Z} のスペクトル。赤点は $t_1 = 3t_0, \gamma^2 = 0.3t_0$ の場合、青十字は $t_1 = 1.5t_0, \gamma^2 = 0.2t_0$ の場合の結果を表す。(b) $t_1 = 3t_0, \gamma^2 = 0.3t_0$ の場合のエッジ状態の空間分布。系のサイズは $n = 500$ とした。index が奇数 (偶数) の場合には、対応するマヨラナ粒子の flavor は α (β) である。(b1) 左端付近でのエッジ状態。(b2) 右端付近でのエッジ状態。

と求められる。ここで N_{\pm} は規格化定数で $N_{\pm}^2 = 2\sqrt{|t(k)|^2 - \gamma^4}(\sqrt{|t(k)|^2 - \gamma^4} \mp i\gamma^2)$ である。

5.3.2 トポロジカル相

本項では PT 対称なキタエフ鎖のトポロジカル相を調べる。PT 対称なキタエフ鎖は BDI^{\dagger} クラスに属するため、そのトポロジカル相は整数値のトポロジカル不変量である巻き付き数

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{BZ}} q^{-1} \frac{dq}{dk} dk \quad (5.15)$$

で特徴づけられる。 q は平坦化行列 Q から求められる量であり、

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ q^{\dagger} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q := I - (|\psi_{-}\rangle \langle\langle\psi_{-}| + |\psi_{-}\rangle \langle\psi_{-}|). \quad (5.16)$$

と定義される。(5.14) 式の固有ベクトルを (5.16) 式に代入すると、巻き付き数は $t_0 > t_1 + \gamma^2$ の場合に 0、 $t_1 > t_0 + \gamma^2$ の場合に -1 の値をとることがわかる。トポロジカル不変量の相関を図 5.1(b) に示す。

巻き付き数が非自明な値を持つパラメータでハミルトニアンに固定端境界条件を課して \tilde{Z} を対角化することにより、エッジ状態を調べた。固定端境界条件下での \tilde{Z} のスペクトルを図 5.2 に示す。トポロジカル不変量が非自明な値を取ることを反映して、固定端境界条件下では二つのエッジ状態が現れることを確認した。図 5.2(a) に示したように、全てのバルク状態は PT 対称性を保ち、固有値の虚部は共通の虚部 $-i\gamma^2/2$ を有する。対して、二つのエッジ状態は図 5.2(b) に示したように境界に局在した状態となるため、PT 対称性を破り固有値の虚部がバルク状態と異なる値をとる。これらのエッジ状態の固有値

は 0 か $-i\gamma^2$ となることが図 5.2(a) から確認できる。これらのエッジ状態の固有値は解析的に求めることもできる。 \tilde{Z} の固有ベクトルを $(A_1, B_1, \dots, A_n, B_n)^T$ と書くと、 \tilde{Z} の固有値方程式は、バルクでは

$$-t_1 B_{j-1} - 2\gamma^2 A_j + t_0 B_j = \frac{2}{i} \lambda A_j, \quad (5.17)$$

$$-t_0 A_j + t_1 A_{j+1} = \frac{2}{i} \lambda B_j, \quad (5.18)$$

境界では

$$-2\gamma^2 A_1 + t_0 B_1 = \frac{2}{i} \lambda A_1, \quad (5.19)$$

$$-t_0 A_n = \frac{2}{i} \lambda B_n \quad (5.20)$$

と書ける。 $\gamma = 0$ の場合には上の固有値方程式は (5.5) 式のキタエフ鎖のハミルトニアンに対する固有値方程式と等しくなる。 $t_1 > t_0$ の場合には、キタエフ鎖のエネルギー 0 のエッジ状態 $A_j = 0$, $B_j/B_{j-1} = t_1/t_0$ は $n \rightarrow \infty$ とした (5.17)-(5.20) 式の \tilde{Z} の固有値方程式も満たし、固有値は $\lambda = 0$ となる。エッジ状態は図 5.2(b2) に示したように、 $j = n$ 付近に指数的に局在した状態となる。今回のモデルでは散逸が α の flavor を持つマヨラナ粒子にのみ作用していることから、 β の flavor のみに振幅を有するエッジ状態には影響を与えず、固有値が散逸により変化を受けないと解釈できる。一方で、反対側の境界 $j = 1$ 付近に局在する、キタエフ鎖のもう一つのエネルギー 0 のエッジ状態 $A_j/A_{j+1} = t_1/t_0$, $B_j = 0$ は α のみに振幅を有するため、散逸の影響を最も受けやすい状態となる。これを反映して、このエッジ状態は $n \rightarrow \infty$ とした (5.17)-(5.20) 式の \tilde{Z} の固有値方程式を固有値 $\lambda = -i\gamma^2$ で満たす。数値的対角化で得た $j = 1$ 付近に局在するエッジ状態の空間分布は図 5.2(b1) に示すようになり、解析計算と整合した分布となる。これら二個のエッジ状態は PT 対称性の破れを引き起こすペアになるため、実空間での対称性演算子

$$\mathcal{PT} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \dots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \mathcal{K} \quad (5.21)$$

を $\lambda = 0$ の固有ベクトルに作用させることにより、 $\lambda = -i\gamma^2$ の固有ベクトルを得ることができる。また、 $w = 0$ となるパラメータ領域ではエッジ状態が出現しないことも確認した。

最後に、キタエフ鎖の定常状態に関して言及する。このモデルのジャンプ演算子はエルミートであるため、無限温度状態 $\rho_{\text{inf}} \propto I$ が定常状態 $\hat{\mathcal{L}}[\rho_{\text{inf}}] = 0$ となる。 Z は更に 0 固有値を有するが、これは二つ目の定常状態を意味しない ([57, 89] も参照)。4.2 節で言及した通り、一体リンドブラディアンは粒子数のパリティを保存するため、リンドブラディアンの固有状態は ρ_{inf} に固有モードの生成超演算子 \hat{b}' が偶数個作用した形で書かれる。特に、複数個の定常状態を有するためには、0 固有値に対応する生成超演算子が二個以上存在する必要がある。しかし、今回のモデルでは 0 固有値の固有ベクトルは一個の

みである。そのため、0 固有値のリンドブラディアン固有演算子を構成することができるが、それは密度演算子にはならず、定常状態にはならない。

5.4 PT 対称な SSH モデル

前節の問題点を解消するため、複数個の 0 固有値を有する PT 対称な開放量子系のモデルを構築した。ハミルトニアンは 4.4 節でも取り扱った SSH モデル

$$H_{\text{SSH}} = \sum_x (t_0 c_{x,B}^\dagger c_{x,A} + t_1 c_{x,B}^\dagger c_{x+1,A} + \text{H.c.}), t_0, t_1 \in \mathbb{R} \quad (5.22)$$

を考える。このハミルトニアンのマヨラナ表示した一粒子ハミルトニアンを求めると (4.42) 式と同様に、(5.5) 式のキタエフ鎖のマヨラナ表示した一粒子ハミルトニアンを用いて

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{H}_{\text{kit}} & 0 \\ 0 & -\tilde{H}_{\text{kit}} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

と書くことができる。つまり、マヨラナ表示の下では、SSH モデルは二本の独立なキタエフ鎖が並んだモデルとみなせる。従って、それぞれのキタエフ鎖に対して PT 対称性を有するような散逸を加えることにより、複数個の 0 固有値を誘起できると考えられる。そのような散逸として、キタエフ鎖の場合と同様に、マヨラナ演算子に比例するジャンプ演算子

$$L_{x,\alpha} = \gamma_\alpha w_{x,B,\alpha} = \gamma_\alpha (c_{x,B} + c_{x,B}^\dagger), L_{x,\beta} = \gamma_\beta w_{x,B,\beta} = i\gamma_\beta (c_{x,B}^\dagger - c_{x,B}) \quad (5.24)$$

を考える。この場合にもジャンプ演算子はエルミートであるために行列 Y は 0 となり、リンドブラディアンは (5.7) 式の形で表示できる。行列 \tilde{Z} は運動量空間で

$$\tilde{Z}_{\text{SSH}}(k) = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & -t(k)^* & 0 & 0 \\ t(k) & -4\gamma_\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t(k)^* \\ 0 & 0 & -t(k) & -4\gamma_\alpha^2 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

と書かれる。 \tilde{Z}_{SSH} 内の二つのブロックは (5.8) 式と類似した構造を有しており、PT 対称性を有する。このことから、バルク状態が PT 対称性を破らない場合には、バルク状態の固有値の虚部は $-\gamma_\alpha^2/2$ か $-\gamma_\beta^2/2$ のどちらかになり、PT 対称性を破るエッジ状態の固有値が $0, -i\gamma_\alpha^2, -i\gamma_\beta^2$ となることが予想される。 $\gamma_\alpha \neq \gamma_\beta$ の場合には、 \tilde{Z}_{SSH} は PT 対称性を有さないことに注意する。

固定端境界条件を課した場合の \tilde{Z}_{SSH} を数値的に対角化し、得たスペクトルを図 5.3 に示す。図 5.3 では、それぞれのブロックのキタエフ鎖がトポロジカルに非自明となり、全てのバルク状態が PT 対称性を保つパラメータで計算を行った。図 5.3(a) に示すように、それぞれのブロックが有する PT 対称性に起因して、バルク状態の固有値の虚部が $-\gamma_\alpha^2/2$ か $-\gamma_\beta^2/2$ となることを確認した。エッジ状態はそれぞれのブロックで PT 対称性を破り、その固有値は 0 が二つ、 $-i\gamma_\alpha^2, -i\gamma_\beta^2$ が一つずつ現れる。従っ

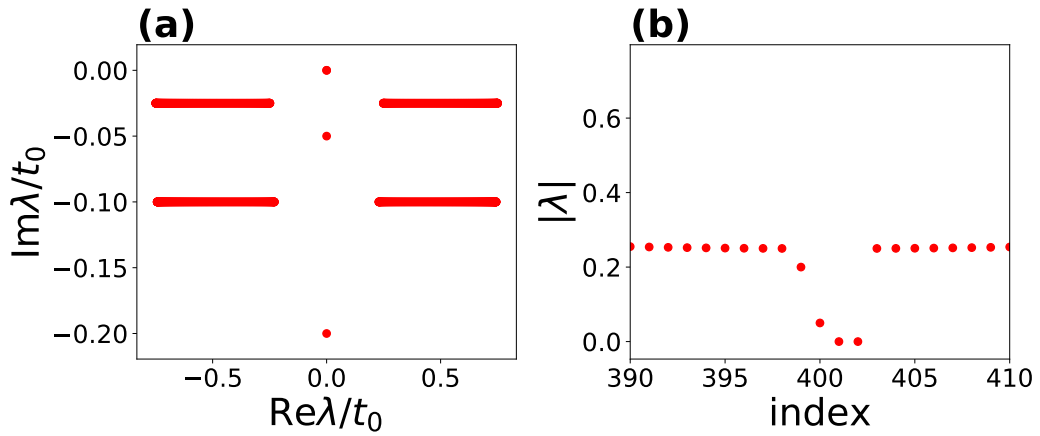


図 5.3: (a) 固定端境界条件下での \tilde{Z}_{SSH} のスペクトル。 $t_1 = 2t_0$, $\gamma_\alpha = 2\gamma_\beta = \gamma$, $\gamma^2 = 0.2t_0$ とした。
 (b) $\lambda = 0$ 付近でのスペクトルの絶対値。

て、二つの 0 固有値に対応する固有ベクトルから生成超演算子 \hat{b}'_1, \hat{b}'_2 を構成でき、 $\hat{b}'_1 \hat{b}'_2 [\rho_{\text{inf}}]$ がリンドブラディアンの二個目の定常状態となる。

5.5 結論

本章では PT 対称性を有するリンドブラディアンのトポロジカル相を調べた。固有値のシフトを組合せて PT 対称性を定義することにより、非エルミート系の場合と同様に、PT 対称性の破れに起因してエッジ状態の減衰率がバルク状態と変化することを明らかにした。本章では PT 対称なキタエフ鎖と SSH モデルを調べ、どちらの場合でも PT 対称性を破ったエッジ状態が 0 固有値を有することを示した。

第6章

多重エッジ状態に起因した非エルミート系におけるバルク-エッジ対応の破れ

6.1 序論

2章では、開放量子系に事後測定を課すことにより、非エルミート・シュレディンガー方程式を導出した。しかし、非エルミート・シュレディンガー方程式は量子系のみならず、古典系でも実現することができる。例えば電磁波の波動方程式に近軸近似を行うと、その方程式は非エルミート・シュレディンガー方程式と同型となり、非エルミート性は光の増幅や減衰に対応する。そのため、非エルミート系の物理を理論的に調べることで、外界と相互作用する量子系・古典系の物理を系統的に理解することが可能となる。

3章で説明したように、非エルミート性がハミルトニアンを取りうる対称性クラスを変化させるため、非エルミート系のトポロジカル相に注目が集まっている。非エルミート系では対称性クラス数の増加によりトポロジカル相が多様化するだけでなく、トポロジカル現象の指導原理となっていたバルク-エッジ対応が破れることが知られている。孤立平衡系では、周期境界条件を課した場合のバルク状態から計算されるトポロジカル不変量が、固定端境界条件を課した場合のエッジ状態数と対応していた。しかし、非エルミート系ではバルク状態が境界条件に依存して変化し得るため、周期境界条件を課した場合と固定端境界条件を課した場合で、バルク状態から計算されるトポロジカル不変量の値が一般には等しくならない。そのため、前述した意味でのバルク-エッジ対応が非エルミート系では破れる場合がある。非エルミート系のトポロジカル相を調べる上で、どのような場合にバルク-エッジ対応が破れるのかを明らかにすることは非常に重要な問題であるが、これまでの研究の殆どはバルク状態が境界条件に対して鋭敏な場合について調べられてきた。一方で、バルク状態が境界条件に対して鋭敏でない場合にもバルク-エッジ対応が破れうるのかは明らかになっていない。

本章では、バルク状態が境界条件に対して鋭敏でない場合でも、非エルミート系ではバルク-エッジ

対応が破れることを、具体的なモデルを構成して示した。多重エッジ状態が出現するモデルを考え、摂動を加えることで、 \mathbb{Z}_2 トポロジカル不変量で特徴づけられるトポロジカル相へと相転移させる。エルミート系では摂動の強さに関わらずエッジ状態は有限エネルギーを有するが、非エルミート系では有限の強さの摂動まではエッジ状態がゼロエネルギーに保たれることを明らかにした。対称性クラスから予測されるトポロジカル不変量は \mathbb{Z}_2 であるのに対して、エッジ状態は複数個存在するため、この結果は新たなバルク-エッジ対応の破れの一例となる。モデルとして、非エルミート系のトポロジカル相を調べる際によく用いられる量子ウォークを考える。

本章の構成は以下ようになる。6.2 節では、本章で取り扱う量子ウォークと、量子ウォークに対する対称性を説明する。6.3 節では、本研究で提案する新たなバルク-エッジ対応を示すモデルを導入し、数値計算によりバルク-エッジ対応の破れを実証する。

6.2 量子ウォークのトポロジカル相

6.2.1 量子ウォークと対称性

前章までは連続時間での時間発展を考え、その生成子であるハミルトニアンやリンドブラディアンを解析することにより、トポロジカル相を調べた。しかし、例えば量子力学における時間発展演算子 U とハミルトニアン H は

$$U = e^{-iHt} \quad (6.1)$$

で関係づくため、時間発展演算子を直接解析することによってもトポロジカル相を調べることができる。この手法の利点として、連続時間での時間発展のみならず、周期駆動系等の離散的な時間発展も取り扱えることが挙げられる。本節で紹介する量子ウォークは離散的な時間発展をするモデルの一つである。

量子ウォークはランダムウォークの量子力学版ともとれるモデルであり、一次元格子点を運動する粒子の離散的な時間発展を表す。典型的には粒子は二つの内部自由度 $|L\rangle, |R\rangle$ を有し、その時間発展演算子 U はコイン演算子 C とシフト演算子 S と呼ばれる二種類のユニタリ演算子から構成される。これらの演算子は

$$C := \sum_x (|x\rangle \langle x| \otimes \tilde{C}_x), \quad \tilde{C}_x \in \text{U}(2), \quad (6.2)$$

$$S := \sum_x (|x-1\rangle \langle x| \otimes |L\rangle \langle L| + |x+1\rangle \langle x| \otimes |R\rangle \langle R|) \quad (6.3)$$

と書かれる。コイン演算子 C は粒子の内部自由度を変換し、シフト演算子 S は粒子の内部自由度に応じて粒子の位置を一つ隣の格子点に移動させる。更に、振幅の増幅・減衰効果を導入することにより、量子ウォークにおいて非ユニタリな時間発展を考えることができる。時間発展演算子の非ユニタリ性はハミルトニアンの非エルミート性と等価となるため、量子ウォークを用いることでも非エルミート系を

調べることができる。典型的に用いられる非ユニタリ演算子として、以下の演算子

$$G = \sum_x |x\rangle \langle x| \otimes (e^\gamma |L\rangle \langle L| + e^{-\gamma} |R\rangle \langle R|) \quad (6.4)$$

がある。 G は粒子の内部状態が $|L\rangle$ の場合には振幅を増幅させ、 $|R\rangle$ の場合には振幅を減衰させる操作を表す。 $\gamma \neq 0$ の場合には G は非ユニタリとなり、 γ は非ユニタリ性の強さを表すパラメータとなる。

時間発展演算子の固有値方程式

$$U |\psi_j\rangle = \lambda_j |\psi_j\rangle \quad (6.5)$$

を考えると、 U がユニタリである場合には $|\lambda| = 1$ となり、時間発展演算子の固有値は複素平面上の単位円上に乗る。 U が非ユニタリになると $|\lambda| \neq 1$ となり、単位円から外れた固有値が出現する。(6.1) 式のハミルトニアンとの関係性から、

$$\varepsilon := i \log \lambda \quad (6.6)$$

とすると、 ε はエネルギーと同等の役割をすることがわかる。 ε は擬エネルギーと呼ばれ、複素数の偏角が 2π の周期性を有することを反映して、擬エネルギーの実部も 2π の周期性を有する。上述した $|\lambda| = 1$ と $|\lambda| \neq 1$ の状況は、擬エネルギーが実・複素になる状況と対応する。

連続時間での時間発展は、その生成子を対称性により分類することでトポロジカル相を調べていた。離散的な時間発展の場合も同様に、時間発展演算子を対称性により分類し、トポロジカル相を調べることが出来る。例えば時間反転対称性 $T^\dagger H T = H$ を考えると、(6.1) 式から、

$$\begin{aligned} T^\dagger U T &= e^{i(T^\dagger H T)t} \\ &= e^{iHt} = U^{-1} \end{aligned} \quad (6.7)$$

となり、ハミルトニアンに対する対称性と整合するためには、時間発展演算子に対する時間反転対称性は $T^\dagger U T = U^{-1}$ と定義される必要がある。他の内部対称性に関しても同様の方法で時間発展演算子に対する拡張を考えることができ、以下のようになる:

$$\text{PHS} : \Xi^\dagger U \Xi = (U^\dagger)^{-1}, \quad (6.8)$$

$$\text{CS} : \Gamma^\dagger U \Gamma = U^\dagger, \quad (6.9)$$

$$\text{TRS}^\dagger : T_{\text{NH}}^\dagger U T_{\text{NH}} = U^\dagger, \quad (6.10)$$

$$\text{PHS}^\dagger : \Xi_{\text{NH}}^\dagger U \Xi_{\text{NH}} = U, \quad (6.11)$$

$$\text{SLS} : S^\dagger U S = U^{-1}. \quad (6.12)$$

従って、量子ウォークに対しても対称性クラスを同定することができ、そのトポロジカル相を調べることができる。

6.2.2 周期駆動系のトポロジカル不変量

量子ウォークを含む周期駆動系では、時間発展演算子からトポロジカル不変量を計算することができるが、その計算には注意が必要である。系がカイラル対称性を有する場合、連続的な時間発展の場合では、カイラル対称性から 0 エネルギーでギャップが開き、トポロジカル不変量を定義できた。しかし、量子ウォークなどの周期駆動系の場合には擬エネルギーのギャップ構造を考える必要がある。擬エネルギーの実部が 2π の周期性を有することを反映して、時間発展演算子では $\text{Re}\varepsilon = 0, \pi$ の二箇所擬エネルギーのギャップが開く。それに伴い、トポロジカル不変量もそれぞれのギャップに対して定義され、量子ウォークでは二種類のトポロジカル不変量 ν_0, ν_π を考える必要がある。本項ではこれらのトポロジカル不変量の計算方法 [44] を紹介する。

時間発展演算子 U' が

$$U' = AB \quad (6.13)$$

と分解でき、 A, B が

$$\Gamma B \Gamma^\dagger = A^\dagger \quad (6.14)$$

を満たす状況を考える。この時、 U' は (6.9) 式のカイラル対称性を満たす他、カイラル対称性を満たすもう一つの時間発展演算子

$$U'' = BA \quad (6.15)$$

を考えることができる。 U' と U'' は相似 $A^{-1}U'A = U''$ であるため、その固有値は等しくなる。そのため、 U', U'' の固有値方程式は

$$U' |\phi'_\varepsilon\rangle = e^{-i\varepsilon} |\phi'_\varepsilon\rangle, (U')^\dagger |\phi'_\varepsilon\rangle = e^{i\varepsilon^*} |\phi'_\varepsilon\rangle, \quad (6.16)$$

$$U'' |\phi''_\varepsilon\rangle = e^{-i\varepsilon} |\phi''_\varepsilon\rangle, (U'')^\dagger |\phi''_\varepsilon\rangle = e^{i\varepsilon^*} |\phi''_\varepsilon\rangle, \quad (6.17)$$

と書かれる。(6.9) 式のカイラル対称性から、左右固有ベクトルは

$$\Gamma |\phi'_\varepsilon\rangle = \kappa'_\varepsilon |\phi'_{-\varepsilon^*}\rangle, \Gamma |\phi''_\varepsilon\rangle = \kappa''_\varepsilon |\phi''_{-\varepsilon^*}\rangle \quad (6.18)$$

と関係づけられる。特に、 $\text{Re}\varepsilon = 0, \pi$ の場合には $\varepsilon = -\varepsilon^*$ となり、

$$\Gamma |\phi'_\varepsilon\rangle = \kappa'_\varepsilon |\phi'_{-\varepsilon}\rangle, \Gamma |\phi''_\varepsilon\rangle = \kappa''_\varepsilon |\phi''_{-\varepsilon}\rangle \quad (6.19)$$

となる。ここで、 $\kappa'_\varepsilon, \kappa''_\varepsilon \in \mathbb{R}$ である。比例係数の符号 $\text{sgn}(\kappa'_\varepsilon), \text{sgn}(\kappa''_\varepsilon)$ はカイラリティと呼ばれ、擬エネルギーが $0, \pi$ の状態を特徴づける量となる。

時間発展演算子 U', U'' はカイラル対称性を有するため、トポロジカル不変量として (3.58) 式の巻き付き数を計算することができる。しかし、計算された巻き付き数 ν', ν'' は $\text{Re}\varepsilon = 0, \pi$ 双方の情報を含

むため、正確なバルク-エッジ対応の情報を与えない。 ν' , ν'' はエッジ状態の個数の情報を含んでいるとし、トポロジカル不変量が ν'_R と ν'_L の系、 ν''_R と ν''_L の系を接合した際に

$$\nu'_L - \nu'_R = n'_{0+} + n'_{\pi+} - n'_{0-} - n'_{\pi-}, \quad (6.20)$$

$$\nu''_L - \nu''_R = n''_{0+} + n''_{\pi+} - n''_{0-} - n''_{\pi-} \quad (6.21)$$

が成立することを仮定する。 $n'_{\text{Re}\varepsilon\pm}$, $n''_{\text{Re}\varepsilon\pm}$ は、 U' , U'' の擬エネルギーが $\text{Re}\varepsilon$, カイラリティが \pm のエッジ状態の個数を表す。カイラル対称性の下では、擬エネルギーの実部が有限である状態は、異なるカイラリティを有する状態の重ね合わせとなる。そのため、トポロジカルに保護されたエッジ状態の個数は、それぞれのカイラリティを有するギャップレスな状態数の差で与えられる。また、求めたいトポロジカル不変量 ν_0, ν_π は

$$\nu_{\varepsilon,L} - \nu_{\varepsilon,R} = n'_{\varepsilon+} - n'_{\varepsilon-}, \quad \varepsilon = 0, \pi \quad (6.22)$$

を満たす必要がある。

U' の右固有値方程式 (6.16) に左から B を作用させると、

$$U''(B|\phi'_\varepsilon\rangle) = e^{-i\varepsilon}(B|\phi'_\varepsilon\rangle) \quad (6.23)$$

となるため、 $B|\phi'_\varepsilon\rangle$ は U'' の右固有ベクトルとなり、

$$B|\phi'_\varepsilon\rangle = b|\phi''_\varepsilon\rangle, \quad b \in \mathbb{C} \quad (6.24)$$

を満たす。左固有ベクトルに関しても同様に、

$$A^\dagger|\phi'_\varepsilon\rangle = a|\phi''_\varepsilon\rangle, \quad a \in \mathbb{C} \quad (6.25)$$

を得る。固有ベクトルの正規双直交性から、 $ab^* = e^{i\varepsilon^*}$ を満たす。 U'' の左右固有ベクトルは、(6.14),(6.24),(6.25) 式より、

$$\Gamma|\phi''_\varepsilon\rangle = \frac{a}{b}\kappa'_\varepsilon|\phi''_\varepsilon\rangle \quad (6.26)$$

と関係づく。従って、 κ'_ε と κ''_ε は

$$\kappa''_\varepsilon = e^{i\varepsilon^*}|b|^{-2}\kappa'_\varepsilon \quad (6.27)$$

を満たす。これより、 $\text{Re}\varepsilon = 0$ の場合には U' と U'' のカイラリティは等しくなり、 $\text{Re}\varepsilon = \pi$ の場合には逆符号になるため、

$$n'_{0+} = n''_{0+}, \quad n'_{\pi+} = n''_{\pi-}, \quad n'_{0-} = n''_{0-}, \quad n'_{\pi-} = n''_{\pi+} \quad (6.28)$$

を得る。(6.28) 式を (6.20),(6.21) 式に代入して整理すると、最終的に

$$\nu_0 = \frac{\nu' + \nu''}{2}, \quad \nu_\pi = \frac{\nu' - \nu''}{2} \quad (6.29)$$

とトポロジカル不変量が得られる。

6.3 非エルミート性によるエッジ状態の頑強性の増強

本節では多重エッジ状態を有する量子ウォークのモデルを提案し、対称性を壊す摂動を加えた際にバルク-エッジ対応が破れることを示す。モデルとして、非ユニタリ 3 ステップ量子ウォーク

$$U := G^{-1}SC[\theta_2(x)]SC[\theta_2(x) + \delta]GSC[\theta_1(x)] \quad (6.30)$$

を考える。コイン演算子 C は

$$C[\theta(x)] := \sum_x \left[|x\rangle \langle x| \otimes \begin{pmatrix} \cos \theta(x) & -\sin \theta(x) \\ \sin \theta(x) & \cos \theta(x) \end{pmatrix} \right] \quad (6.31)$$

と選んだ。 δ が摂動の強さを表すパラメータである。 $\delta = 0$ の場合、このモデルは BDI^\dagger クラスに属する:

$$T_{\text{NH}}^\dagger U'^\dagger T_{\text{NH}}^\dagger = U', \quad T_{\text{NH}} = (I \otimes \sigma_x) \mathcal{K}, \quad (6.32)$$

$$\Xi_{\text{NH}}^\dagger U' \Xi_{\text{NH}} = U', \quad \Xi_{\text{NH}} = \mathcal{K}, \quad (6.33)$$

$$\Gamma^\dagger U' \Gamma = U', \quad \Gamma = I \otimes \sigma_x. \quad (6.34)$$

ここで U' は $U' = C[\theta_1(x)/2]UC[\theta_1(x)/2]^\dagger$ で定義される。そのため、このモデルのトポロジカル相は整数値のトポロジカル不変量で特徴づけられる。更に、コイン演算子の回転角 θ が原点に対して対称

$$\theta_j(-x) = \theta_j(x), \quad j = 1, 2 \quad (6.35)$$

ならば、このモデルは PT 対称性

$$(\mathcal{PT})^\dagger U (\mathcal{PT}) = U^{-1}, \quad \mathcal{PT} = \left(\sum_x | -x \rangle \langle x | \otimes \sigma_x \right) \mathcal{K} \quad (6.36)$$

を有する。詳細な計算は付録 C で行うが、3 ステップ量子ウォークのトポロジカル不変量を求めることができ、その相図を図 6.1(a) に示す。時間発展演算子 U は奇数 (偶数) サイトの状態を偶数 (奇数) サイトに移動させるため、基底を適切に並び替えることにより、

$$U = \begin{pmatrix} 0 & U_e^o \\ U_o^e & 0 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

と表示できる。この基底で $\tau := I \oplus (-I)$ とすると、 U は

$$\tau U \tau = -U \quad (6.38)$$

を満たす。(6.38) 式より、 U が擬エネルギー ε の固有状態を有する時、必ず擬エネルギー $\varepsilon + \pi$ の固有状態がペアで出現する。特に、 $\text{Re} \varepsilon = 0$ と $\text{Re} \varepsilon = \pi$ の固有状態数が等しくなるため、時間発展演算子に対する二つのトポロジカル不変量 ν_0, ν_π が一致する。本モデルではこれら二つをまとめて ν と書く

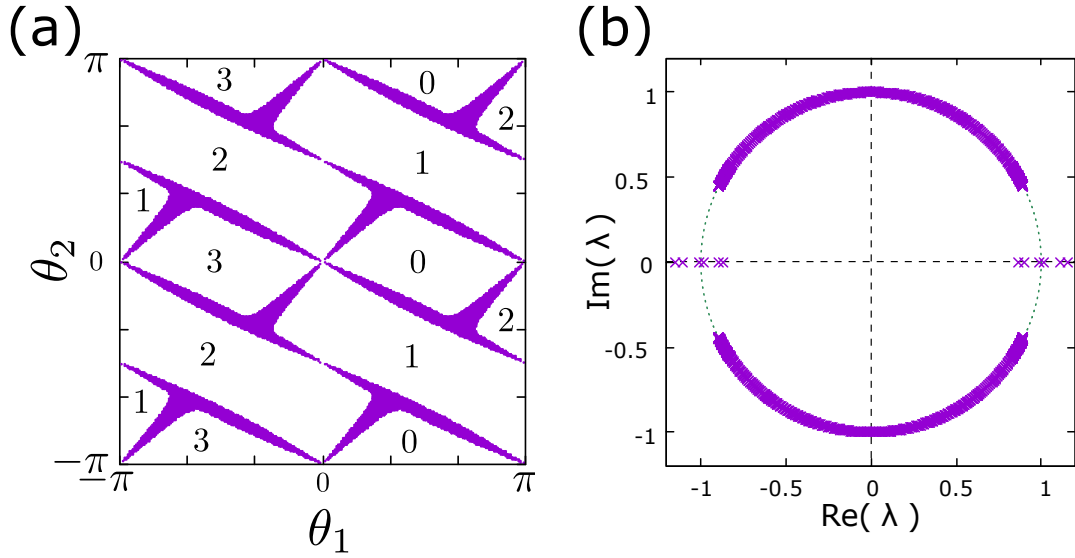


図 6.1: (a) トポロジカル不変量の θ_1, θ_2 依存性。紫色の領域ではバルク状態が PT 対称性を破り、実線ギャップが閉じ、トポロジカル不変量が定義されない。(b) 時間発展演算子 U のスペクトル。コイン演算子のパラメータは $|x| < L$ ($|x| \geq L$) で $\theta(x) = \theta^i$ (θ^o) とし、 $\theta_1^i/\pi = 2/5$, $\theta_2^i/\pi = 1/10$ ($\nu^i = 0$), $\theta_1^o/\pi = -3/5$, $\theta_2^o/\pi = 1/5$ ($\nu^o = 3$) とした。

こととする。 ν の値は最大で 3 となるため、多重エッジ状態が存在し得る。図 6.1(b) に、系内でトポロジカル不変量が増加する場合の時間発展演算子を数値的に対角化して得たスペクトルを示す。PT 対称性を保つために、トポロジカル不変量は二箇所 $x = \pm L$ で空間的に変化する。このことを反映して、 $\text{Re} \varepsilon = 0, \pi$ の双方で $2\nu = 6$ 個のエッジ状態が出現する。

一方で、 $\delta \neq 0$ の場合には非エルミート時間反転対称性、カイラル対称性、PT 対称性が破れ、対称性クラスは D^\dagger へと変化する。 D^\dagger クラスのトポロジカル相は \mathbb{Z}_2 トポロジカル不変量で特徴づけられるため、複数のエッジ状態が出現することが許されない。摂動がある場合のトポロジカル不変量は $\nu \bmod 2$ となることが予想される。このような摂動の下でのエッジ状態の安定性を議論したい。 $\nu = 1$ の場合にはトポロジカル不変量の値が摂動により変化しないため、エッジ状態は安定に保たれる。 $\nu \geq 2$ の場合には、摂動によりトポロジカル不変量が増加すると考えられるため、多重エッジ状態も摂動から影響を受けることが予測される。非エルミート粒子正孔対称性により時間発展演算子の固有値は複素共役対称に現れるため、時間発展がユニタリな場合には、摂動によって対称性クラスが変化すると、2 個のエッジ状態の擬エネルギーが有限の値になり、エッジ状態がトポロジカルに保護されなくなる。しかし、時間発展が非ユニタリである場合には、有限の δ に対してもエッジ状態の擬エネルギーの実部は即座に有限の値をとらない。(6.33) 式の時間発展演算子に対する非エルミート粒子正孔対称性は、非エル

ミートハミルトニアンに対する時間反転対称性

$$T^\dagger H T = H \quad (6.39)$$

と同じ式となる。あるいは、時間発展演算子は反線形対称性を有している。(6.39)式に対してPT対称性と同様の議論を行うことができ、時間発展演算子の固有状態が対称性演算子 T の同時固有状態となるかどうかで固有値の実-複素転移が起こる。これらの状況を固有状態が反線形対称性を保つ、あるいは破れると呼ぶこととする。摂動 δ が弱い場合にはエッジ状態は反線形対称性を保ち、 δ を変化させてもその固有値は実部に保たれる。摂動が強くなると、ある特定の δ で二つのエッジ状態が実軸上で縮退し、更に摂動を強くすることでエッジ状態は反線形対称性を破り、固有値が有限の虚部を有するようになる。言い換えると、反線形対称性が保たれるパラメータ領域では常に擬エネルギーの実部は0のまま保たれる。従って、時間発展演算子の反線形対称性が保たれる程度に摂動が弱い場合には、トポロジカル不変量は \mathbb{Z}_2 であるにも関わらず、複数個のエッジ状態が安定に保たれ、バルク-エッジ対応が破れることがわかる。このバルク-エッジ対応の破れは多重エッジ状態が有限の虚部を有していることが必要であり、これまで提案されていたバルク-エッジ対応の破れとは異なり、バルク状態が境界条件に対して鋭敏である必要がない。

上述したバルク-エッジ対応の破れを、3ステップ量子ウォークでの数値計算により実証した。摂動 δ がある場合の時間発展演算子のスペクトルを図6.2に示す。図6.2上列の $\nu = 1$ の場合には、 γ の値に関わらず、エッジ状態は摂動に対して安定である。図6.2下列の $\nu = 2$ の場合には、(a)の時間発展がユニタリな場合には、摂動によりエッジ状態が有限の擬エネルギー状態となる。一方で、時間発展が非ユニタリである場合には、図6.2(a)の場合と摂動の強さが同じであっても、図6.2(b)に示すように、エッジ状態の擬エネルギーの実部は0のまま保たれ、エッジ状態が摂動に対して安定に存在する。時間発展演算子の対称性クラスは D^\dagger であり、そのトポロジカル不変量は \mathbb{Z}_2 となるため、この結果はバルク-エッジ対応が破れていることを表す。摂動を強くしていくと、図6.2(c)に示すように、実軸上でエッジ状態の固有値が縮退する。更に摂動を強くすると図6.2(d)に示すように、エッジ状態が反線形対称性を破り、擬エネルギーの実部が有限の値を有するようになる。従って、図6.2の結果から、上述した新しいタイプのバルク-エッジ対応の破れが実証された。

また、バルク-エッジ対応を破る多重エッジ状態の頑強性も調べた。コイン演算子のパラメータ θ が空間的な乱れを含む場合を考える。この時、乱れを含んだパラメータ $\tilde{\theta}$ は

$$\tilde{\theta}(x) = \theta(x) + \delta\theta(x) \quad (6.40)$$

と書かれる。 θ は乱れない場合のパラメータを表し、 $\delta\theta(x)$ は $[-\theta_r, \theta_r]$ の範囲に値を取る一様乱数である。空間的な乱れがある場合でも、時間発展演算子 $\tilde{U} = G^{-1}SC[\tilde{\theta}_2(x)]SC[\tilde{\theta}_2(x) + \delta]GSC[\tilde{\theta}_1(x)]$ は非エルミート粒子正孔対称性を有する。図6.3に、空間的な乱れがある場合の時間発展演算子のスペク

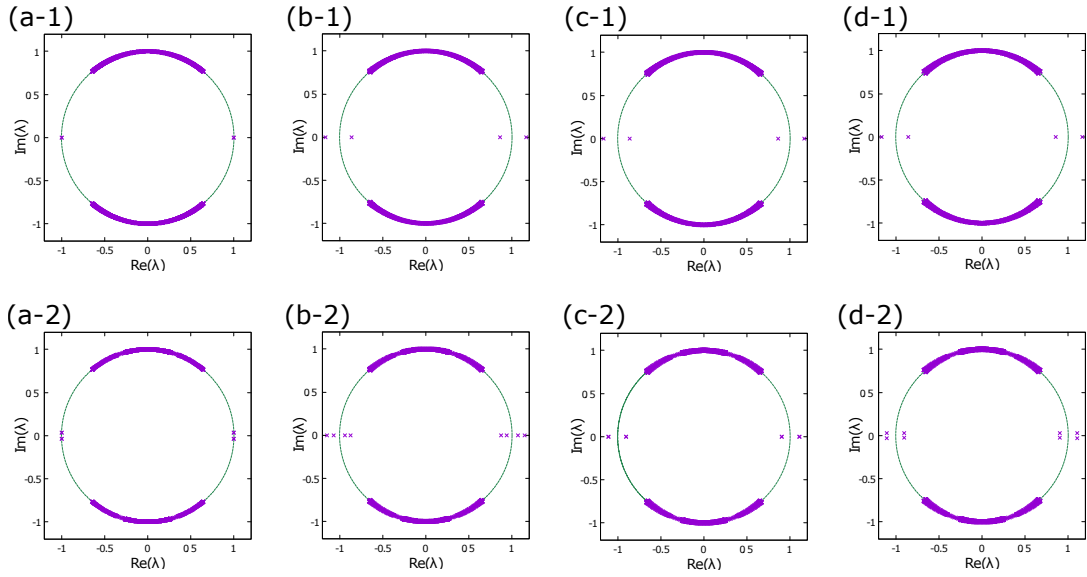


図 6.2: 摂動 δ が存在する場合の時間発展演算子 U のスペクトル。コイン演算子のパラメータは $|x| < L$ ($|x| \geq L$) で $\theta(x) = \theta^i$ (θ^o) とし、全ての場合で $\theta_1^i/\pi = 2/5$, $\theta_2^i/\pi = 1/10$ ($\nu^i = 0$) とした。上列では $\theta_1^o/\pi = 9/10$, $\theta_2^o/\pi = 1/5$ ($\nu^o = 1$), 下列では $\theta_1^o/\pi = -1/5$, $\theta_2^o/\pi = 3/10$ ($\nu^o = 2$) とした。また、(a) 以外では非ユニタリ度は $\gamma = 0.1$ とした。(a) $\delta = 0.05$, $\gamma = 0$ の場合。(b) $\delta = 0.05$ の場合。(c) $\delta = 0.0696$ の場合。(d) $\delta = 0.08$ の場合。

トルを示す。 $\nu = 1$ の場合には摂動によりトポロジカル不変量が変わらないため、図 6.3(a) に示すように、エッジ状態は空間的な乱れに対して安定である。一方で、 $\nu = 2$ の場合には摂動でトポロジカル不変量が変わり、時間発展がユニタリである場合 (図 6.3 上列) はエッジ状態がトポロジカルに保護されておらず、空間的な乱れが弱い場合でもその擬エネルギーは有限となる。時間発展が非ユニタリである場合 (図 6.3 下列) には、前述したようにバルク-エッジ対応の破れが発生するため、これらの多重エッジ状態は反線形対称性により保護されている。これを反映して、図 6.3(b-2) に示すように、空間的な乱れが弱い場合にはエッジ状態は反線形対称性を保ち、擬エネルギーの実部は 0 に保たれ、エッジ状態が残る。図 6.3(c-2) に示すように、空間的な乱れが強い場合にはエッジ状態が反線形対称性を破り、擬エネルギーの実部が有限の値を持つようになる。これらの結果から、エッジ状態が反線形対称性を保つ範囲内で、エッジ状態は頑強であることがわかる。

このバルク-エッジ対応の破れは $\nu = 3$ の場合にも発生する。この場合は摂動によりトポロジカル不変量が 1 へと変化するため、一つのエッジ状態は非エルミート粒子正孔対称性に保護され、頑強に存在する。残り二つのエッジ状態はバルク-エッジ対応を破り、上述した $\nu = 2$ の場合と同様に、非エルミート粒子正孔対称性に起因した反線形対称性に保護される。これらの結果についても数値計算で確認した。

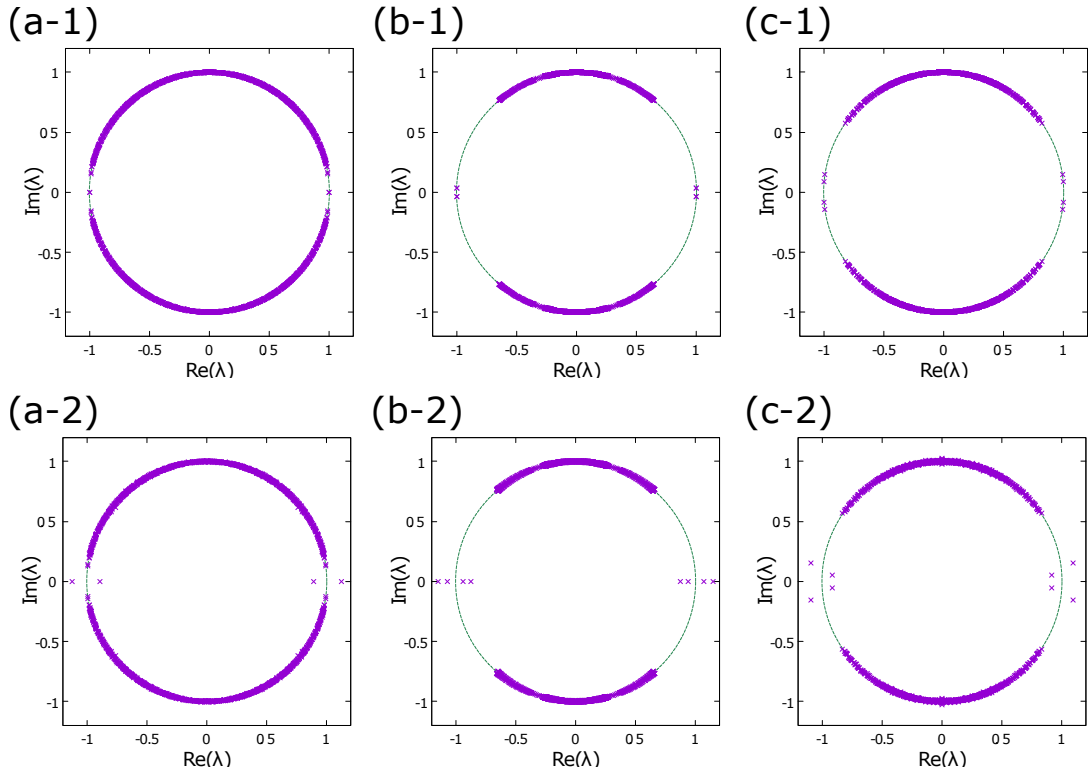


図 6.3: 空間的な乱れが存在する場合の時間発展演算子 \tilde{U} のスペクトル。全てのケースで $\delta = 0.05$, $\theta_1^i/\pi = 2/5$, $\theta_2^i/\pi = 1/10$ ($\nu^i = 0$) とした。上列は時間発展演算子がユニタリ ($\gamma = 0$) である場合、下列は非ユニタリ ($\gamma = 0.1$) の場合の結果を表す。(a) $\theta_1^o/\pi = 9/10$, $\theta_2^o/\pi = 1/5$ ($\nu^o = 1$), $\theta_r = 0.1$ の場合。(b) $\theta_1^o/\pi = -1/5$, $\theta_2^o/\pi = 3/10$ ($\nu^o = 2$), $\theta_r = 0.001$ の場合。(c) コイン演算子のパラメータは (b) と同じで、 $\theta_r = 0.1$ の場合。

また、今回のバルク-エッジ対応の破れは離散的な時間発展をする量子ウォークで提案したが、非エルミートハミルトニアンで記述される連続的な時間発展の場合にも成立すると考えられる。BDI[†] クラスに属し、多重エッジ状態を有する非エルミートハミルトニアン H を考える。カイラル対称性が存在するため、エッジ状態は実線ギャップを閉じるよう、ゼロエネルギーで現れる。この時、非エルミート粒子正孔対称性

$$\Xi_{\text{NH}}^\dagger H \Xi_{\text{NH}} = -H \quad (6.41)$$

のみを保つ摂動をハミルトニアンに加え、その対称性クラスを D[†] へと変化させる。ハミルトニアンを複素平面上で回転させ、 $H = iH'$ と書くと、 H に対する非エルミート粒子正孔対称性は、 H' に対する反線形対称性

$$\Xi_{\text{NH}}^\dagger H' \Xi_{\text{NH}} = H \quad (6.42)$$

と等価になる。従って、摂動の強さを強くしていくと、 H のエッジ状態は反線形対称性を持つため、そ

の固有値は虚軸上を動き、縮退した後に実部が有限の値をとる。これより、エッジ状態が反線形対称性を保つ範囲内では、連続時間での時間発展であってもバルク-エッジ対応が破れることがわかる。

6.4 結論

本章では、非エルミート系における新たなバルク-エッジ対応の破れの機構を提案した。非エルミート粒子正孔対称性のみを保つような摂動を印加して系の対称性クラスを変化させることにより、エッジ状態が反線形対称性を保つ範囲内ではバルク-エッジ対応が破れることを明らかとした。具体的なモデルとして離散的な時間発展である量子ウォークを考え、実際にバルク-エッジ対応の破れが発生することを数値的に示した。バルク-エッジ対応を破るエッジ状態の頑強性も調べ、エッジ状態が反線形対称性を保つ範囲内では、エッジ状態が頑強であることも示した。

第7章

まとめ

本研究では、開放量子系及び非エルミート系の新奇トポロジカル相を明らかとすることを目的としていた。そのために、開放量子系の時間発展を特徴づけるリンドブラディアンの特異性やトポロジカルな分類を調べた他、非エルミート系におけるバルク-エッジ対応の破れに関して研究を行った。

第4章では、開放量子系の時間発展方程式である GKSL 方程式の生成子であるリンドブラディアンの有する対称性を調べ、リンドブラディアンが属する対称性クラスを調べた [75]。その結果、先行研究 [60] では、リンドブラディアンは非エルミート時間反転対称性、非エルミート粒子正孔対称性、カイラル対称性の三種類の内部対称性しか有することができないと考えられていたが、固有値のシフト操作を組み合わせることにより、シフトした副格子対称性がリンドブラディアンに対しても定義可能であることを示した。シフトした副格子対称性は副格子対称性へと連続変形できるため、先行研究 [60] では棄却されていた、副格子対称性が付加された対称性クラスにリンドブラディアンが属することを明らかとした。更に、シフトした副格子対称性を有する具体的なモデルとして散逸的な SSH モデルを構築し、エッジ状態やその固有値がシフトした副格子対称性に保護されていることを数値的に示した。可観測量である局所占数時間の時間発展を計算することにより、短時間領域での境界での局所占数の減衰率は散逸のパラメータのみから決定されることを明らかにした。また、一次元の開放量子系がシフトした副格子対称性を有する十分条件を示した。本研究の結果は、リンドブラディアンの対称性クラスやトポロジカル相が従来考えられていたものよりも複雑であることを示唆しており、開放量子系に特有の物性を明らかにする上で有用であると考えられる。

第5章では、非エルミート系で重要な対称性である PT 対称性をリンドブラディアンに対しても拡張し、PT 対称な開放量子系のトポロジカル相を調べた [76]。その結果、PT 対称性の破れに伴ってバルク状態の固有値の虚部が一定値となる相から様々な値をとる相へと転移することを示した。非エルミート系の場合と同様に、開放量子系においてもエッジ状態は PT 対称性を破り、バルク状態とは異なる固有値の虚部を有することを示した。具体的なモデルとして PT 対称なキタエフ鎖と PT 対称な SSH モデルを考え、PT 対称性を破ったエッジ状態の固有値が 0 となり、無減衰な固有演算子を構成できるこ

とを明らかとした。特に、PT 対称な SSH モデルの場合には、エッジ状態が定常状態として実現可能であることも示した。開放量子系のトポロジカル相は、近年では第 4 章と同様に、その緩和過程に注目して研究が行われていた。定常状態のトポロジカル相も考えられていたが、系に散逸のみが作用するという限られた状況を扱っていた。本研究で提案した PT 対称性を伴う定常エッジ状態の実現は、定常状態とトポロジカル相を組み合わせた研究に寄与すると期待される。

第 6 章では、非エルミート系の顕著なトポロジカル現象であるバルク-エッジ対応の破れについて調べた。その結果、従来提案されていたバルク-エッジ対応ではバルク状態が境界条件依存性を有することが不可欠であったが、バルク状態の境界条件依存性を必要としない新たなバルク-エッジ対応の破れの機構を提案した [77]。BDI[†] クラスに属する非エルミート系に摂動を加え、D[†] クラスへと相転移させることを考えると、トポロジカル不変量は \mathbb{Z}_2 へと変化する。しかし、非エルミート粒子正孔対称性を反線形対称性で見なすことができ、反線形対称性が保たれている範囲内では、多重エッジ状態が頑強に存在し、 \mathbb{Z}_2 トポロジカル不変量と整合せず、バルク-エッジ対応が破れる。上述の機構は 3 ステップ量子ウォークで確認し、時間発展がユニタリである場合にはエッジ状態が壊れるような摂動の強度であっても、時間発展が非ユニタリの場合にはエッジ状態が反線形対称性に保護され、その擬エネルギーの実部が 0 のまま保たれることを数値的に示した。反線形対称性に保護されたエッジ状態の空間的な乱れに対する頑強性も調べ、エッジ状態が反線形対称性を有する範囲内では、エッジ状態が頑強に存在することも示した。本研究で提案するバルク-エッジ対応の破れは、従来機構とは異なり、バルク状態が境界条件に依存することを要請しないため、新たな機構によるバルク-エッジ対応の破れとなる。新たな機構のバルク-エッジ対応に関しても理解を進めることで、非エルミート系の新奇トポロジカル現象を明らかとすることが期待される。

今後の課題として、リンドブラディアンに属する対称性クラスの完全な同定が挙げられる。固有値のシフトを組み合わせることによって時間反転対称性や粒子正孔対称性もリンドブラディアンに対して定義可能だと考えられるが、本研究の後に公開された研究 [73] では、リンドブラディアンに属する対称性クラスの数は非エルミート行列に比べて少なくなると主張されている。一般的な非エルミート行列とリンドブラディアンの違いを対称性の観点から調べることにより、開放量子系特有のトポロジカル相や新奇物性を明らかとすることが期待される。また、量子情報への応用などから、エッジ状態を開放量子系の定常状態として実現することは重要な課題となる。本研究ではキタエフ鎖と SSH モデルという具体例についてのみ、エッジ状態が定常状態として実現可能であることを示した。散逸下でエッジ状態が 0 固有値を有するためには、エッジ状態の振幅がある副格子点のみに存在することが本質的であったが、この構造はハミルトニアンのカイラル対称性から保証される。本研究で提案した手法を更に拡張することにより、カイラル対称性に保護されたエッジ状態を常に定常状態とするようなジャンプ演算子の構成方法を提案できると考えている。この構成方法については今後の課題としたい。最後に、従来機構

でのバルク-エッジ対応の破れに関しては、固定端境界条件を課すことによるバルク状態の変化を取り入れたトポロジカル不変量が提案されており、そのトポロジカル不変量を用いることでバルク-エッジ対応を回復することができる。本研究で提案したバルク-エッジ対応の破れに関しても、バルク-エッジ対応を回復させるような、新たなトポロジカル不変量を提案することが課題となる。

謝辞

本研究を進める上で、至る場面で丁寧なご指導を頂いた小布施秀明准教授に深く感謝致します。また、共同研究者である望月健氏、川上則雄氏にも多くのご助力を頂きました。心より感謝致します。その他、矢久保考介教授、浅野泰寛准教授、事務補佐員の富樫杏子様には本研究の遂行にあたり様々な場面で大変お世話になりました。最後に、これまでの研究生生活を楽しく過ごさせて頂いた、数理物理学研究室の皆様にもお世話になりました。数理物理学研究室で学んだことを活かし、今後も精進してまいります。

付録

A 副格子対称性・擬エルミート性を含んだ非エルミートハミルトニアンの対称性クラス

本付録では、非エルミート粒子ハミルトニアンの対称性クラスについてより詳細な説明を行う。3.3.2 項では、 $\text{DIII}^\dagger + \mathcal{S}_{++}$ クラスが $\text{CI} + \mathcal{S}_{++}$ クラスと等しいことを説明した。他の対称性クラスに関しても、3.3.2 項の場合と同様に、副格子対称性が付加された AZ^\dagger クラスを副格子対称性が付加された AZ クラスに対応させることができる。例えば $\text{DIII}^\dagger + \mathcal{S}_{\pm\pm}$ クラスを考えると、対称性

$$T_{\text{NH}} \tilde{H}^\dagger(\mathbf{k}) T_{\text{NH}}^\dagger = \tilde{H}(-\mathbf{k}), T_{\text{NH}}^2 = -I, \quad (\text{A.1})$$

$$\Xi_{\text{NH}} \tilde{H}(\mathbf{k}) \Xi_{\text{NH}}^\dagger = \tilde{H}(-\mathbf{k}), \Xi_{\text{NH}}^2 = -I, \quad (\text{A.2})$$

$$S \tilde{H}(\mathbf{k}) S^\dagger = -\tilde{H}(\mathbf{k}), S^2 = I \quad (\text{A.3})$$

を有する他、これらは一般に交換するとは限らず、反交換する場合もある：

$$S T_{\text{NH}} = \varepsilon_t T_{\text{NH}} S, S \Xi_{\text{NH}} = \varepsilon_p \Xi_{\text{NH}} S. \quad (\text{A.4})$$

この時、 $T = S \Xi_{\text{NH}}$ とすると、 T は時間反転対称性の対称性演算子となり、

$$T \tilde{H}(\mathbf{k}) T^\dagger = -S \tilde{H}(-\mathbf{k}) S^\dagger = \tilde{H}(-\mathbf{k}), \quad (\text{A.5})$$

$$T^2 = \varepsilon_p I, ST = \varepsilon_p TS. \quad (\text{A.6})$$

を満たす。(A.6) 式より、 Ξ_{NH} と S の交換/反交換に応じて時間反転対称性の性質が変化することがわかる。同様に、 ε_t と ε_p が同符号の場合には $\Xi = S T_{\text{NH}}$ 、異符号の場合には $\Xi = i S T_{\text{NH}}$ とすると、 Ξ は粒子正孔対称性の対称性演算子となり、

$$\Xi \tilde{H}^\dagger(\mathbf{k}) \Xi^\dagger = -\tilde{H}(-\mathbf{k}), \quad (\text{A.7})$$

$$\Xi^2 = -\varepsilon_t I, S \Xi \varepsilon_t = \Xi S. \quad (\text{A.8})$$

を満たす。 T, Ξ の定義より、これらは交換する。従って、 $\varepsilon_t, \varepsilon_p$ の符号に応じて、 $\text{DIII}^\dagger + \mathcal{S}_{\pm\pm}$ クラスは副格子対称性が付加された AZ クラスに対応させることができる。副格子対称性が付加された AZ^\dagger

表 A.1: 副格子対称性が付加された AZ^\dagger クラスと副格子対称性が付加された AZ クラスの対応関係 [47]。クラス名の \mathcal{S}_\pm の下添え字は、時間反転対称性または粒子正孔対称性と副格子対称性が交換する場合には +, 反交換する場合には - とした。時間反転対称性と粒子正孔対称性の双方を含む対称性クラスの場合には、 $\mathcal{S}_{\pm\pm'}$ のように下添え字を二つ書き、一つ目が時間反転対称性との、二つ目が粒子正孔対称性との交換/反交換関係の符号を表す。

AZ^\dagger クラス	\mathcal{S}_+	\mathcal{S}_-	\mathcal{S}_{++}	\mathcal{S}_{+-}	\mathcal{S}_{-+}	\mathcal{S}_{--}
AI^\dagger	$D+\mathcal{S}_+$	$C+\mathcal{S}_-$				
BDI^\dagger			$BDI+\mathcal{S}_{++}$	$DIII+\mathcal{S}_{-+}$	$CI+\mathcal{S}_{+-}$	$CII+\mathcal{S}_{--}$
D^\dagger	$AI+\mathcal{S}_+$	$AII+\mathcal{S}_-$				
$DIII^\dagger$			$CI+\mathcal{S}_{++}$	$CII+\mathcal{S}_{-+}$	$BDI+\mathcal{S}_{+-}$	$DIII+\mathcal{S}_{--}$
AII^\dagger	$C+\mathcal{S}_+$	$D+\mathcal{S}_-$				
CII^\dagger			$CII+\mathcal{S}_{++}$	$CI+\mathcal{S}_{-+}$	$DIII+\mathcal{S}_{+-}$	$BDI+\mathcal{S}_{--}$
C^\dagger	$AII+\mathcal{S}_+$	$AI+\mathcal{S}_-$				
CI^\dagger			$DIII+\mathcal{S}_{++}$	$BDI+\mathcal{S}_{-+}$	$CII+\mathcal{S}_{+-}$	$CI+\mathcal{S}_{--}$

クラスに属する他の対称性クラスも、同様の手順により副格子対称性が付加された AZ クラスに対応させることができる。この対応をまとめた表を表 A.1 に示す。

続いて、擬エルミート性

$$\eta\tilde{H}^\dagger(\mathbf{k})\eta^\dagger = \tilde{H}(\mathbf{k}), \quad \eta^2 = I \quad (\text{A.9})$$

が付加された AZ クラスを考える。DIII クラスを考えると、ハミルトニアンは

$$T\tilde{H}(\mathbf{k})T^\dagger = \tilde{H}(-\mathbf{k}), \quad T^2 = -I, \quad TiT^\dagger = -i, \quad (\text{A.10})$$

$$\Xi\tilde{H}^\dagger(\mathbf{k})\Xi^\dagger = -\tilde{H}(-\mathbf{k}), \quad \Xi^2 = I, \quad \Xi i\Xi^\dagger = -i, \quad (\text{A.11})$$

を満たす。更に、 $\Gamma = i\Xi T$ とすると、 Γ はカイラル対称性の対称性演算子になり、

$$\Gamma\tilde{H}^\dagger(\mathbf{k})\Gamma^\dagger = -\tilde{H}(\mathbf{k}), \quad \Gamma^2 = I \quad (\text{A.12})$$

となる。この対称性クラスに擬エルミート性を付加することを考えると、副格子対称性の場合と同様に、他対称性との交換/反交換関係を考える必要がある:

$$\eta T = \varepsilon_t T \eta, \quad \eta \Xi = \varepsilon_p \Xi \eta. \quad (\text{A.13})$$

ε_t と ε_p が同符号の場合に $S = \eta\Gamma$, 異符号の場合に $S = i\eta\Gamma$ とすると、 S は副格子対称性の対称性演算子となることがわかる。他対称性との関係は、 ε_t と ε_p が同符号の場合には

$$ST = -\varepsilon_t TS, \quad S\Xi = -\varepsilon_p \Xi S, \quad (\text{A.14})$$

異符号の場合には

$$ST = \varepsilon_t TS, \quad S\Xi = \varepsilon_p \Xi S, \quad (\text{A.15})$$

を満たす。従って、カイラル対称性が存在する場合には、カイラル対称性と擬エルミート性から副格子対称性の対称性演算子を構成することができる。カイラル対称性が存在しない場合には、 $\tilde{H} \rightarrow i\tilde{H}$ と連続変形を行うことで、擬エルミート性は

$$\eta(i\tilde{H}(\mathbf{k}))^\dagger \eta^\dagger = -i\tilde{H}(\mathbf{k}) \quad (\text{A.16})$$

となり、カイラル対称性に変換できる。従って、実線ギャップを有する擬エルミートハミルトニアンは、 $\text{Re}E = 0$ に線ギャップを有するカイラル対称なハミルトニアンに変換できる。 $\text{Re}E = 0$ に線ギャップを有する非エルミートハミルトニアンは、ギャップや対称性を変えずに反エルミートなハミルトニアンに連続変形することができる [47] ため、この反エルミートハミルトニアンをトポロジカルに分類することで、擬エルミート性の付加された対称性クラスを分類することが可能となる。これらの対応関係をまとめた表を表 A.2 に示す。

表 A.2: 擬エルミート性が付加された AZ クラスと副格子対称性が付加された AZ クラスの対応関係。 η の下添え字は、副格子対称性の場合と同様に、時間反転対称性や粒子正孔対称性との交換/反交換の符号を表す。

AZ クラス	η	η_+	η_-	η_{++}	η_{+-}	η_{-+}	η_{--}
A	AIII						
AII		AIII+S ₊	AIII+S ₋				
AI		BDI [†]	DIII [†]				
BDI				BDI+S ₊₊	BDI+S ₋₊	BDI+S ₊₋	BDI+S ₋₋
D		BDI	DIII				
DIII				DIII+S ₋₋	DIII+S ₊₋	DIII+S ₋₊	DIII+S ₊₊
AII		CII [†]	CI [†]				
CII				CII+S ₊₊	CII+S ₋₊	CII+S ₊₋	CII+S ₋₋
C		CII	CI				
CI				CI+S ₊₊	CI+S ₋₊	CI+S ₊₋	CI+S ₋₋

B 散逸的 SSH モデルにおける $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ トポロジカル不変量の計算

本付録では、(4.49) 式の Z' から計算される $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ トポロジカル不変量の計算を行う。(4.54) 式の擬エルミート性を有する Z' の固有値方程式を

$$Z'(k) |\psi_n\rangle = \lambda_n |\psi_n\rangle, \quad Z'^{\dagger}(k) |\psi_n\rangle = \lambda_n^* |\psi_n\rangle, \quad (\text{B.17})$$

と書く。これらの固有ベクトルで基底を張ることができるため、左右固有ベクトルは

$$\eta |\psi_n\rangle = \sum_m A_{mn} |\psi_m\rangle \quad (\text{B.18})$$

の関係を満たす。 η がエルミート行列であることから $A = [A_{mn}] = [\langle\langle \psi_m | \eta | \psi_n \rangle\rangle]$ もエルミート行列となるため、ユニタリ行列 G により対角化することができる、

$$G^{\dagger} A G = \text{diag}\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}, \quad \xi_i \in \mathbb{R} \quad (\text{B.19})$$

となる。行列 G を用いて、新たな正規双直交ベクトル $|\phi_n^{\pm}\rangle, |\phi_n^{\pm}\rangle$ を

$$|\phi_n\rangle := \sum_m \sqrt{|\xi_n|} G_{mn} |\psi_m\rangle, \quad (\text{B.20})$$

$$|\phi_n\rangle\rangle := \sum_m \frac{G_{mn}}{\sqrt{|\xi_n|}} |\psi_m\rangle\rangle. \quad (\text{B.21})$$

と構成できる。この時、

$$\eta |\phi_n\rangle\rangle = \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{|\xi_n|}} G_{jn} A_{ij} |\psi_i\rangle \quad (\text{B.22})$$

となるため、(B.19) 式の成分表示 $\sum_{i,j} G_{im}^* A_{ij} G_{jn} = \xi_n \delta_{nm}$ を用いると、

$$\begin{aligned} \langle\langle \phi_m | \eta | \phi_n \rangle\rangle &= \sum_{i,j,k} \frac{1}{\sqrt{|\xi_m \xi_n|}} G_{km}^* A_{ij} G_{jn} \langle\langle \psi_k | \psi_i \rangle\rangle \\ &= \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{|\xi_m \xi_n|}} G_{im}^* A_{ij} G_{jn} \\ &= \frac{\xi_n}{\sqrt{|\xi_m \xi_n|}} \delta_{nm} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

となる。従って、最終的に ξ_n の符号に応じて

$$\eta |\phi_n\rangle\rangle = \text{sgn}(\xi_n) |\phi_n\rangle \quad (\text{B.24})$$

となる。 η を作用させた際に正符号がつくベクトルを $|\phi_n^+\rangle, |\phi_n^+\rangle\rangle$, 負符号がつくベクトルを $|\phi_n^-\rangle, |\phi_n^-\rangle\rangle$ と書くと、ヒルベルト空間は $\{|\phi_n^+\rangle\}$ で張られる部分空間と $\{|\phi_n^-\rangle\}$ で張られる部分空間に分割することができる。それぞれの部分空間へ射影された Z' を Z'_{\pm} と書くと、 Z'_{\pm} も副格子対称性を有するため、それぞれのセクターから整数値のトポロジカル不変量である巻き付き数を計算することができる。

以降では具体的な計算を行う。 $Z'(k)$ の左右固有ベクトルは

$$|\psi_{p,q}(k)\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{(-1)^q}{\lambda'_p} [(-1)^{p+1} t_k^* + i\gamma^2] \\ (-1)^{p+1} i \\ \frac{(-1)^q}{\lambda'_p} [i t_k^* + (-1)^p \gamma^2] \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.25})$$

$$|\psi_{p,q}(k)\rangle\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{(-1)^q}{\lambda'_{p^*}} [(-1)^{p+1} t_k^* - i\gamma^2] \\ (-1)^{p+1} i \\ \frac{(-1)^q}{\lambda'_{p^*}} [i t_k^* + (-1)^{p+1} \gamma^2] \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.26})$$

$$\lambda'_p := \sqrt{|t_k|^2 - \gamma^4 + (-1)^{p+1} 2i\gamma^2 \text{Re}t_k}. \quad (\text{B.27})$$

と求められる ($p, q \in \{0, 1\}$)。これらから $|\phi_n^\pm(k)\rangle, |\phi_n^\pm(k)\rangle\rangle$ ($n \in \{0, 1\}$) を計算すると、

$$|\phi_n^+(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_{0,n}(k)\rangle + i |\psi_{1,n}(k)\rangle), \quad (\text{B.28})$$

$$|\phi_n^+(k)\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_{0,n}(k)\rangle\rangle + i |\psi_{1,n}(k)\rangle\rangle), \quad (\text{B.29})$$

$$|\phi_n^-(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\psi_{0,n}(k)\rangle + i |\psi_{1,n}(k)\rangle), \quad (\text{B.30})$$

$$|\phi_n^-(k)\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\psi_{0,n}(k)\rangle\rangle + i |\psi_{1,n}(k)\rangle\rangle). \quad (\text{B.31})$$

が得られる。それぞれのセクターへの射影演算子を

$$P^\pm(k) := \sum_n |\phi_n^\pm(k)\rangle \langle\langle \phi_n^\pm(k) | \quad (\text{B.32})$$

とすると、 Z'_\pm は

$$\begin{aligned} Z'_\pm(k) &:= P^\pm(k) Z'(k) P^\pm(k) \\ &= \pm \frac{2\lambda_{0,0}(k) + 2\lambda_{1,0}(k) - i\gamma^2}{4} \\ &\quad \times (|\phi_0^\pm(k)\rangle \langle\langle \phi_0^\pm(k) | - |\phi_1^\pm(k)\rangle \langle\langle \phi_1^\pm(k) |), \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

と計算される。ここで $\lambda_{p,q}(k)$ は (4.48) 式で与えられる Z の固有値である。 Z'_\pm は副格子対称性

$$Z'_\pm(k) = -S_\pm Z'_\pm(k) S_\pm^\dagger, \quad S_\pm = I \otimes \sigma_z \quad (\text{B.34})$$

を有するため、それぞれのセクターに対して (4.56) 式の巻き付き数を計算することができる。(4.56) 式内のトレース部分に関しては

$$\begin{aligned} &\text{tr} \left[S_\pm Z'^{-1}_\pm(k) \frac{dZ'_\pm(k)}{dk} \right] \\ &= -2 \left(\langle\langle \phi_1^\pm(k) | \frac{d\phi_0^\pm(k)}{dk} \rangle\rangle - \langle\langle \phi_0^\pm(k) | \frac{d\phi_1^\pm(k)}{dk} \rangle\rangle \right) \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

と計算される。(B.25)~(B.31) 式を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left[\mathcal{S}_+ Z_+'^{-1}(k) \frac{dZ_+'(k)}{dk} \right] &= \operatorname{tr} \left[\mathcal{S}_- Z_-'^{-1}(k) \frac{dZ_-'(k)}{dk} \right] \\ &= \frac{d}{dk} \left[\log(t_k^* - i\gamma^2) + \log(t_k^* + i\gamma^2) - \log \lambda'_0 - \log \lambda_0'^* \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

を得る。このモデルでは λ'_0 は巻き付き数を持たないため、 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\text{BZ}} dk \frac{d}{dk} \log \lambda'_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{BZ}} dk \frac{d}{dk} \log \lambda_0'^* = 0$ が成立する。従って $w_+ = w_-$ となり、二つのセクターから計算されるトポロジカル不変量が等しくなり、それらは

$$w_{\pm} = \frac{1}{4\pi i} \int_{\text{BZ}} dk \left[\frac{d}{dk} \log(t_k^* - i\gamma^2) + \frac{d}{dk} \log(t_k^* + i\gamma^2) \right]. \quad (\text{B.37})$$

で与えられる。結果として、 Z のトポロジカル不変量は $w = w_+ + w_-$ となり、(4.57) 式で与えられる。

C 摂動がない場合の3ステップ量子ウォークの \mathbb{Z} トポロジカル相

本付録では、(6.30)式で定義された非ユニタリ3ステップ量子ウォークの、摂動がない($\delta = 0$)場合のトポロジカル相に関してまとめる。C.1節では、 $\delta = 0$ の場合の \mathbb{Z} トポロジカル不変量である巻き付き数を求める。C.2節では、時間発展演算子を数値的に対角化することにより、多重エッジ状態が出現することを確認する。

C.1 トポロジカル不変量の計算

$\delta = 0$ の場合、時間発展演算子 U はユニタリ変換 $U' = C[\theta_1(x)/2]UC[\theta_1(x)/2]^\dagger$ を行うことで(6.32)-(6.34)式の対称性を満たすため、モデルは BDI^\dagger クラスに属する。また、 U は(6.38)式を満たすため、そのスペクトルは複素平面上で原点に対して点対称となり、特に二つのトポロジカル不変量 ν_0 と ν_π が常に一致する。(6.29)式より $\nu'' = 0$ となるため、以降では ν' のみを計算する。 BDI^\dagger クラスに属するモデルはカイラル対称性を有するため、そのトポロジカル不変量は(3.58)式の巻き付き数で与えられる。この計算のために、(3.57)式の平坦化ハミルトニアン Q の簡便な表示を求める。カイラル対称性の対称性演算子 Γ が $\Gamma = \sigma_z$ となる場合、平坦化ハミルトニアンは

$$Q(k) = \begin{pmatrix} 0 & q(k) \\ q^*(k) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.38})$$

となり、(3.58)式の巻き付き数の表式は

$$\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{BZ}} dk \frac{1}{q(k)} \frac{d}{dk} q(k) \quad (\text{C.39})$$

と簡略化できる。コイン演算子のパラメータ θ が空間的に一様な場合には、時間発展演算子は並進対称性を有し、フーリエ変換

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\text{BZ}} dk e^{-ikx} |k\rangle \quad (\text{C.40})$$

により U' をブロック対角化できる: $U' = \int_{\text{BZ}} dk [|k\rangle \langle k| \otimes U_k(k)]$. U'_k は

$$U'_k(k) = d_0(k)I + d_1(k)\sigma_x + id_2(k)\sigma_y + id_3(k)\sigma_z, \quad (\text{C.41})$$

$$d_0(k) = -(\cos\theta_1 \sin^2\theta_2 + \sin\theta_1 \sin 2\theta_2 \cosh 2\gamma) \cos k + \cos\theta_1 \cos^2\theta_2 \cos 3k, \quad (\text{C.42})$$

$$d_1(k) = \sin 2\theta_2 \sinh 2\gamma \cos k, \quad (\text{C.43})$$

$$d_2(k) = (\sin\theta_1 \sin^2\theta_2 - \cos\theta_1 \sin 2\theta_2 \cosh 2\gamma) \cos k - \sin\theta_1 \cos^2\theta_2 \cos 3k, \quad (\text{C.44})$$

$$d_3(k) = -\sin^2\theta_2 \sin k + \cos^2\theta_2 \sin 3k \quad (\text{C.45})$$

と求められる。これらの係数は

$$d_0(k)^2 - d_1(k)^2 + d_2(k)^2 + d_3(k)^2 = 1 \quad (\text{C.46})$$

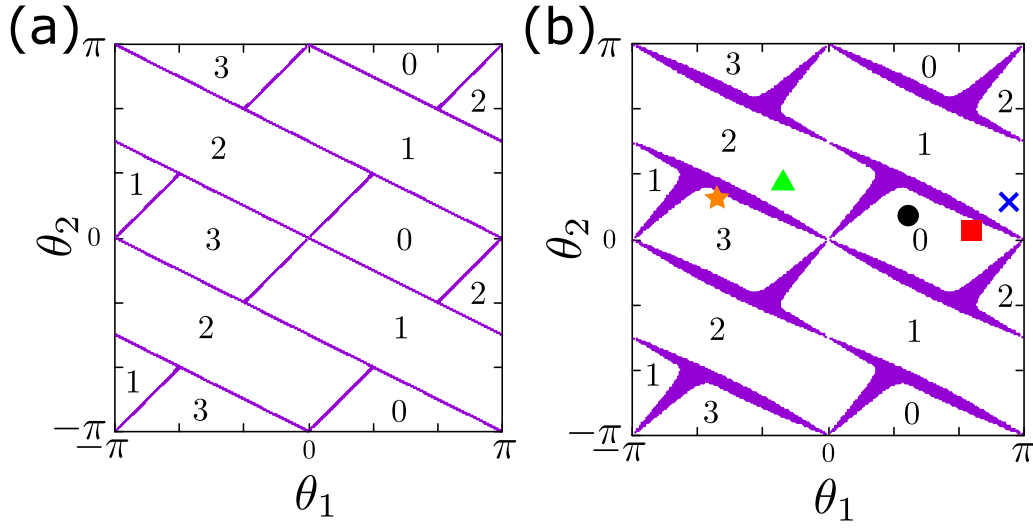


図 C.1: トポロジカル不変量 ν の θ_1, θ_2 依存性。 (θ_1, θ_2) が紫色の領域内に値をとる場合には、バルク状態が PT 対称性を破り、擬エネルギーギャップが閉じる。バルク-エッジ対応においてはトポロジカル不変量の差が重要となるため、その最小値が 0 となるように定数 $3/2$ を加えた。(a) 時間発展がユニタリ ($\gamma = 0$) の場合。(b) 時間発展が非ユニタリ ($\gamma = 0.1$) の場合。

を満たす。 U'_k をユニタリ変換

$$\begin{aligned} \tilde{U}'_k(k) &= e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_2} U'_k(k) e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_2} \\ &= d_0(k)\sigma_0 + id_3(k)\sigma_1 + id_2(k)\sigma_2 - d_1(k)\sigma_3. \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

することにより、カイラル対称性の演算子を $\Gamma = \sigma_z$ とすることができる。 \tilde{U}'_k の左右固有ベクトルは

$$|\phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 \cos 2\Omega_k}} \begin{pmatrix} e^{\pm i\Omega_k} \\ \pm i e^{\mp i\Omega_k} e^{-i\theta_k} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.48})$$

$$\langle\langle \phi_{\pm}| = \frac{1}{\sqrt{2 \cos 2\Omega_k}} (e^{\pm i\Omega_k}, \mp i e^{\mp i\Omega_k} e^{i\theta_k}), \quad (\text{C.49})$$

$$d_2(k) + id_3(k) = |d(k)| e^{i\theta_k}, \quad \sin 2\Omega_k = \frac{d_1(k)}{|d(k)|}. \quad (\text{C.50})$$

と表示できる。これらの左右固有ベクトルを用いて平坦化ハミルトニアンを求めることができ、巻き付き数を計算すると、

$$\nu' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_k}{dk} dk \quad (\text{C.51})$$

となる。つまり、 U のトポロジカル不変量は複素平面上での $d_2(k) + id_3(k)$ の原点周りでの巻き付き数と等しくなる。計算されたトポロジカル不変量の相関を図 C.1 に示す。トポロジカル不変量の値は最大で 3 となり、バルク-エッジ対応からは多重エッジ状態の存在が示唆される。

C.2 エッジ状態

エッジ状態の存在を確認するために、コイン演算子のパラメータ θ を空間的に変化させ、トポロジカル不変量が空間的に変化する場合の時間発展演算子を数値的に対角化した。PT 対称性が保たれるように θ は原点に対して対称に変化し、

$$\theta_{1(2)}(x) = \begin{cases} \theta_{1(2)}^i & (|x| < L) \\ \theta_{1(2)}^o & (|x| \geq L) \end{cases}, \quad (\text{C.52})$$

となる場合を考える。 $x = \pm L$ で θ が変化し、それに伴ってトポロジカル不変量も $x = \pm L$ で変化する。領域 $|x| < L$ を内部領域、 $|x| \geq L$ を外部領域と呼ぶ。以降の計算では $L = 50$ とし、内部領域のパラメータは $\theta_1^i/\pi = 2/5$, $\theta_2^i/\pi = 1/10$ (図 C.1(b) 内黒丸) とした。この時、内部領域のトポロジカル不変量は $\nu^i = 0$ となる。

コイン演算子のパラメータが空間的に変化する場合の時間発展演算子のスペクトルを図 C.2 に示す。図 C.2 に示すように、 $\nu^o = 0$ の場合 [図 C.2(a)] を除き、 $\text{Re}\varepsilon = 0, \pi$ のギャップを閉じるように、実軸上にエッジ状態の固有値が現れる。エッジ状態は図 C.2(f) に示したように、 $|x| \simeq L$ 付近に局在した状態となり、PT 対称性を破る。PT 対称性の破れに対応して擬エネルギーの複素化が起これ、エッジ状態の固有値 λ は単位円上から外れ、 $|\lambda| \neq 1$ となる。時間発展演算子の PT 対称性を保つためにトポロジカル不変量が二箇所 $x = \pm L$ で変化していることに対応し、擬エネルギーの実部が $0, \pi$ となるエッジ状態がそれぞれ $2\nu^o$ 個現れる。時間発展がユニタリ [図 C.2(e)] の場合、常に $|\lambda| = 1$ となるため、エッジ状態は $\lambda = \pm 1$ にそれぞれ六重縮退する。

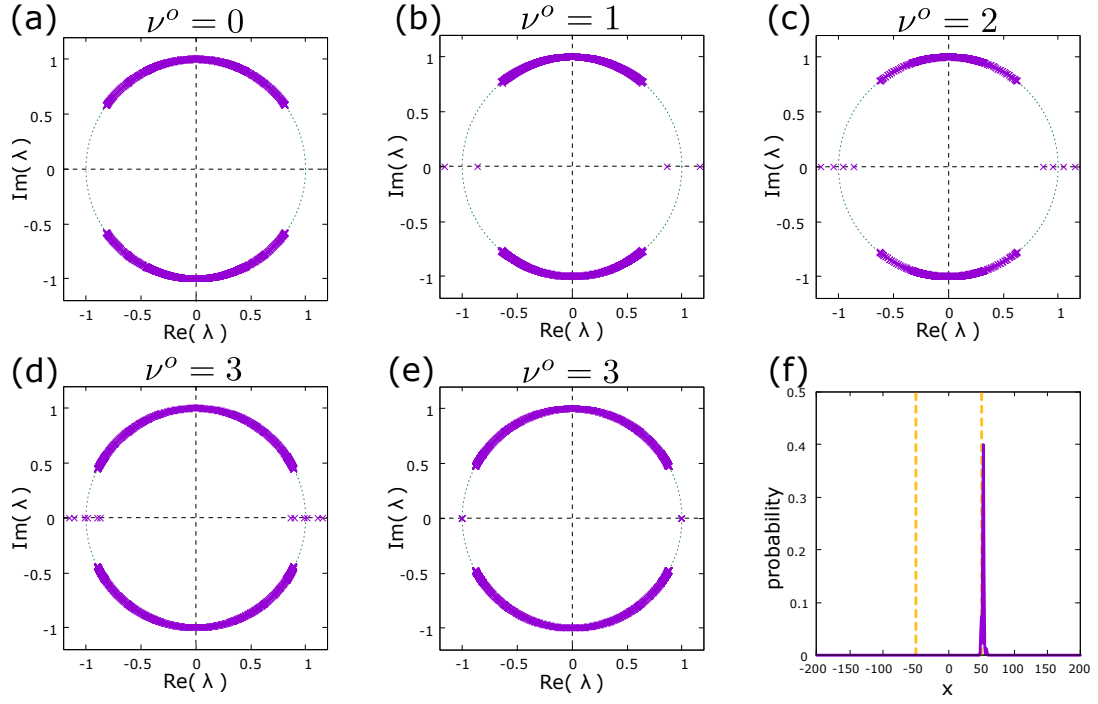


図 C.2: (a)-(d) $\gamma = 0.1$ の場合の時間発展演算子 U のスペクトル。緑点線は複素平面上の単位円を表す。 ν^o は外部領域のトポロジカル不変量の値を表す。(a) $\theta_1^o/\pi = 7/10, \theta_2^o/\pi = 1/20$ (図 C.1(b) 内赤四角) の場合。(b) $\theta_1^o/\pi = 9/10, \theta_2^o/\pi = 1/5$ (青十字) の場合。(c) $\theta_1^o/\pi = -1/5, \theta_2^o/\pi = 3/10$ (緑三角) の場合。(d) $\theta_1^o/\pi = -3/5, \theta_2^o/\pi = 1/5$ (橙星印) の場合。(e) 時間発展がユニタリ ($\gamma = 0$) である場合の U のスペクトル。 θ_1^o, θ_2^o は (d) と同じパラメータとした。(f) エッジ状態の確率分布。エッジ状態は (d) 内で実部が最小の状態を選んだ。二つの黄点線はトポロジカル不変量に変化する境界 ($x = \pm L$) を表す。これらの計算は周期境界条件を課し、系のサイズは $|x| \leq 400$ として行った。

参考文献

- [1] M Zahid Hasan and Charles L Kane. Colloquium: topological insulators. *Reviews of modern physics*, 82(4):3045, 2010.
- [2] Xiao-Liang Qi and Shou-Cheng Zhang. Topological insulators and superconductors. *Reviews of Modern Physics*, 83(4):1057, 2011.
- [3] K v Klitzing, Gerhard Dorda, and Michael Pepper. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance. *Physical review letters*, 45(6):494, 1980.
- [4] Charles L Kane and Eugene J Mele. Quantum spin Hall effect in graphene. *Physical review letters*, 95(22):226801, 2005.
- [5] Markus Konig, Steffen Wiedmann, Christoph Brune, Andreas Roth, Hartmut Buhmann, Laurens W Molenkamp, Xiao-Liang Qi, and Shou-Cheng Zhang. Quantum spin Hall insulator state in HgTe quantum wells. *Science*, 318(5851):766–770, 2007.
- [6] Alexei Kitaev. Periodic table for topological insulators and superconductors. In *AIP conference proceedings*, volume 1134, pages 22–30. American Institute of Physics, 2009.
- [7] Shinsei Ryu, Andreas P Schnyder, Akira Furusaki, and Andreas WW Ludwig. Topological insulators and superconductors: tenfold way and dimensional hierarchy. *New Journal of Physics*, 12(6):065010, 2010.
- [8] Ching-Kai Chiu, Jeffrey CY Teo, Andreas P Schnyder, and Shinsei Ryu. Classification of topological quantum matter with symmetries. *Reviews of Modern Physics*, 88(3):035005, 2016.
- [9] FDM Haldane and S Raghu. Possible realization of directional optical waveguides in photonic crystals with broken time-reversal symmetry. *Physical review letters*, 100(1):013904, 2008.
- [10] Tomoki Ozawa, Hannah M Price, Alberto Amo, Nathan Goldman, Mohammad Hafezi, Ling Lu, Mikael C Rechtsman, David Schuster, Jonathan Simon, Oded Zilberberg, et al. Topological photonics. *Reviews of Modern Physics*, 91(1):015006, 2019.

- [11] Markus Müller, Sebastian Diehl, Guido Pupillo, and Peter Zoller. Engineered open systems and quantum simulations with atoms and ions. In *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, volume 61, pages 1–80. Elsevier, 2012.
- [12] Tim Langen, Remi Geiger, and Jörg Schmiedmayer. Ultracold atoms out of equilibrium. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 6(1):201–217, 2015.
- [13] NR Cooper, J Dalibard, and IB Spielman. Topological bands for ultracold atoms. *Reviews of modern physics*, 91(1):015005, 2019.
- [14] Daniele Fausti, RI Tobey, Nicky Dean, Stefan Kaiser, A Dienst, Matthias C Hoffmann, S Pyon, T Takayama, H Takagi, and Andrea Cavalleri. Light-induced superconductivity in a stripe-ordered cuprate. *science*, 331(6014):189–191, 2011.
- [15] Frank Wilczek. Quantum time crystals. *Physical review letters*, 109(16):160401, 2012.
- [16] Jiehang Zhang, Paul W Hess, A Kyprianidis, Petra Becker, A Lee, J Smith, Gaetano Pagano, I-D Potirniche, Andrew C Potter, Ashvin Vishwanath, et al. Observation of a discrete time crystal. *Nature*, 543(7644):217–220, 2017.
- [17] Hans Keßler, Phatthamon Kongkhambut, Christoph Georges, Ludwig Mathey, Jayson G Cosme, and Andreas Hemmerich. Observation of a dissipative time crystal. *Physical Review Letters*, 127(4):043602, 2021.
- [18] Sebastian Diehl, A Micheli, Adrian Kantian, B Kraus, HP Büchler, and Peter Zoller. Quantum states and phases in driven open quantum systems with cold atoms. *Nature Physics*, 4(11):878–883, 2008.
- [19] Takafumi Tomita, Shuta Nakajima, Ippei Danshita, Yosuke Takasu, and Yoshiro Takahashi. Observation of the Mott insulator to superfluid crossover of a driven-dissipative Bose-Hubbard system. *Science advances*, 3(12):e1701513, 2017.
- [20] Masaya Nakagawa, Norio Kawakami, and Masahito Ueda. Exact liouvilian spectrum of a one-dimensional dissipative hubbard model. *Phys. Rev. Lett.*, 126(11):110404, 2021.
- [21] Naomichi Hatano and David R Nelson. Localization transitions in non-Hermitian quantum mechanics. *Physical review letters*, 77(3):570, 1996.
- [22] Brian Skinner, Jonathan Ruhman, and Adam Nahum. Measurement-induced phase transitions in the dynamics of entanglement. *Physical Review X*, 9(3):031009, 2019.
- [23] Gabriel T Landi, Dario Poletti, and Gernot Schaller. Nonequilibrium boundary-driven quantum systems: Models, methods, and properties. *Reviews of Modern Physics*, 94(4):045006, 2022.

- [24] Tomaž Prosen. Open X X Z Spin Chain: Nonequilibrium Steady State and a Strict Bound on Ballistic Transport. *Phys. Rev. Lett.*, 106(21):217206, 2011.
- [25] Fabrizio Minganti, Alberto Biella, Nicola Bartolo, and Cristiano Ciuti. Spectral theory of Liouvillians for dissipative phase transitions. *Phys. Rev. A*, 98(4):042118, 2018.
- [26] Lucas Sá, Pedro Ribeiro, and Tomaž Prosen. Complex spacing ratios: A signature of dissipative quantum chaos. *Phys. Rev. X*, 10(2):021019, 2020.
- [27] Taiki Haga, Masaya Nakagawa, Ryusuke Hamazaki, and Masahito Ueda. Liouvillian skin effect: Slowing down of relaxation processes without gap closing. *Phys. Rev. Lett.*, 127(7):070402, 2021.
- [28] Takashi Oka and Sota Kitamura. Floquet engineering of quantum materials. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 10:387–408, 2019.
- [29] Takashi Oka and Hideo Aoki. Photovoltaic Hall effect in graphene. *Physical Review B*, 79(8):081406, 2009.
- [30] Takuya Kitagawa, Erez Berg, Mark Rudner, and Eugene Demler. Topological characterization of periodically driven quantum systems. *Physical Review B*, 82(23):235114, 2010.
- [31] Takuya Kitagawa, Mark S Rudner, Erez Berg, and Eugene Demler. Exploring topological phases with quantum walks. *Physical Review A*, 82(3):033429, 2010.
- [32] Takuya Kitagawa, Matthew A Broome, Alessandro Fedrizzi, Mark S Rudner, Erez Berg, Ivan Kassal, Alán Aspuru-Guzik, Eugene Demler, and Andrew G White. Observation of topologically protected bound states in photonic quantum walks. *Nature communications*, 3(1):1–7, 2012.
- [33] Mark S Rudner, Netanel H Lindner, Erez Berg, and Michael Levin. Anomalous edge states and the bulk-edge correspondence for periodically driven two-dimensional systems. *Physical Review X*, 3(3):031005, 2013.
- [34] Mikael C Rechtsman, Julia M Zeuner, Yonatan Plotnik, Yaakov Lumer, Daniel Podolsky, Felix Dreisow, Stefan Nolte, Mordechai Segev, and Alexander Szameit. Photonic Floquet topological insulators. *Nature*, 496(7444):196–200, 2013.
- [35] Rahul Roy and Fenner Harper. Periodic table for Floquet topological insulators. *Physical Review B*, 96(15):155118, 2017.
- [36] Yuto Ashida, Zongping Gong, and Masahito Ueda. Non-hermitian physics. *Adv. Phys.*, 69(3):249–435, 2020.
- [37] Emil J Bergholtz, Jan Carl Budich, and Flore K Kunst. Exceptional topology of non-Hermitian

- systems. *Rev. Mod. Phys.*, 93(1):015005, 2021.
- [38] Kenta Esaki, Masatoshi Sato, Kazuki Hasebe, and Mahito Kohmoto. Edge states and topological phases in non-Hermitian systems. *Phys. Rev. B*, 84(20):205128, 2011.
- [39] Tony E Lee. Anomalous edge state in a non-Hermitian lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 116(13):133903, 2016.
- [40] L Xiao, X Zhan, ZH Bian, KK Wang, X Zhang, XP Wang, J Li, K Mochizuki, D Kim, N Kawakami, et al. Observation of topological edge states in parity–time-symmetric quantum walks.
- [41] Steffen Weimann, Manuel Kremer, Yonatan Plotnik, Yaakov Lumer, Stefan Nolte, Konstantinos G Makris, Mordechai Segev, Mikael C Rechtsman, and Alexander Szameit. Topologically protected bound states in photonic parity–time-symmetric crystals. *Nat. Mater.*, 16(4):433–438, 2017.
- [42] Miguel A Bandres, Steffen Wittek, Gal Harari, Midya Parto, Jinhan Ren, Mordechai Segev, Demetrios N Christodoulides, and Mercedeh Khajavikhan. Topological insulator laser: Experiments. *Science*, 359(6381), 2018.
- [43] Midya Parto, Steffen Wittek, Hossein Hodaei, Gal Harari, Miguel A Bandres, Jinhan Ren, Mikael C Rechtsman, Mordechai Segev, Demetrios N Christodoulides, and Mercedeh Khajavikhan. Edge-mode lasing in 1D topological active arrays. *Physical review letters*, 120(11):113901, 2018.
- [44] Ken Mochizuki, Dakyeong Kim, Norio Kawakami, and Hideaki Obuse. Bulk-edge correspondence in nonunitary floquet systems with chiral symmetry. *Physical Review A*, 102(6):062202, 2020.
- [45] Kazuki Sone, Yuto Ashida, and Takahiro Sagawa. Exceptional non-Hermitian topological edge mode and its application to active matter. *Nat. Commun.*, 11(1):1–11, 2020.
- [46] Zongping Gong, Yuto Ashida, Kohei Kawabata, Kazuaki Takasan, Sho Higashikawa, and Masahito Ueda. Topological phases of non-Hermitian systems. *Phys. Rev. X*, 8(3):031079, 2018.
- [47] Kohei Kawabata, Ken Shiozaki, Masahito Ueda, and Masatoshi Sato. Symmetry and topology in non-Hermitian physics. *Phys. Rev. X*, 9(4):041015, 2019.
- [48] Shunyu Yao and Zhong Wang. Edge states and topological invariants of non-Hermitian systems. *Physical review letters*, 121(8):086803, 2018.
- [49] Kazuki Yokomizo and Shuichi Murakami. Non-bloch band theory of non-Hermitian systems.

- Phys. Rev. Lett.*, 123(6):066404, 2019.
- [50] Lei Xiao, Tianshu Deng, Kunkun Wang, Gaoyan Zhu, Zhong Wang, Wei Yi, and Peng Xue. Non-Hermitian bulk–boundary correspondence in quantum dynamics. *Nature Physics*, 16(7):761–766, 2020.
- [51] Nobuyuki Okuma, Kohei Kawabata, Ken Shiozaki, and Masatoshi Sato. Topological origin of non-Hermitian skin effects. *Phys. Rev. Lett.*, 124(8):086801, 2020.
- [52] Kai Zhang, Zhesen Yang, and Chen Fang. Correspondence between winding numbers and skin modes in non-hermitian systems. *Phys. Rev. Lett.*, 125(12):126402, 2020.
- [53] Goran Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics*, 48(2):119–130, 1976.
- [54] Vittorio Gorini, Andrzej Kossakowski, and Ennackal Chandy George Sudarshan. Completely positive dynamical semigroups of N-level systems. *Journal of Mathematical Physics*, 17(5):821–825, 1976.
- [55] Heinz-Peter Breuer and Francesco Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002.
- [56] Felix Dangel, Marcel Wagner, Holger Cartarius, Jörg Main, and Günter Wunner. Topological invariants in dissipative extensions of the Su-Schrieffer-Heeger model. *Phys. Rev. A*, 98(1):013628, 2018.
- [57] Moos van Caspel, Sergio Enrique Tapias Arze, and Isaac Prez Castillo. Dynamical signatures of topological order in the driven-dissipative Kitaev chain. *SciPost Phys.*, 6:26, 2019.
- [58] Fei Song, Shunyu Yao, and Zhong Wang. Non-Hermitian skin effect and chiral damping in open quantum systems. *Phys. Rev. Lett.*, 123(17):170401, 2019.
- [59] Moshe Goldstein. Dissipation-induced topological insulators: A no-go theorem and a recipe. *SciPost Phys.*, 7(5):067, 2019.
- [60] Simon Lieu, Max McGinley, and Nigel R Cooper. Tenfold way for quadratic Lindbladians. *Phys. Rev. Lett.*, 124(4):040401, 2020.
- [61] Tsuneya Yoshida, Koji Kudo, Hosho Katsura, and Yasuhiro Hatsugai. Fate of fractional quantum Hall states in open quantum systems: Characterization of correlated topological states for the full Liouvillian. *Phys. Rev. Research*, 2(3):033428, 2020.
- [62] Yu-Wei Huang, Pei-Yun Yang, and Wei-Min Zhang. Quantum theory of dissipative topological systems. *Phys. Rev. B*, 102(16):165116, 2020.
- [63] Stefano Longhi. Unraveling the non-Hermitian skin effect in dissipative systems. *Phys. Rev.*

- B*, 102(20):201103(R), 2020.
- [64] Jian-Song Pan, Linhu Li, and Jiangbin Gong. Point-gap topology with complete bulk-boundary correspondence and anomalous amplification in the Fock space of dissipative quantum systems. *Phys. Rev. B*, 103(20):205425, 2021.
 - [65] Vincent P. Flynn, Emilio Cobanera, and Lorenza Viola. Topology by Dissipation: Majorana Bosons in Metastable Quadratic Markovian Dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 127:245701, Dec 2021.
 - [66] Sebastian Diehl, Enrique Rico, Mikhail A Baranov, and Peter Zoller. Topology by dissipation in atomic quantum wires. *Nat. Phys.*, 7(12):971–977, 2011.
 - [67] Charles-Edouard Bardyn, Mikhail A Baranov, Christina V Kraus, Enrique Rico, A İmamoğlu, Peter Zoller, and Sebastian Diehl. Topology by dissipation. *New J. Phys.*, 15(8):085001, 2013.
 - [68] A Rivas, O Viyuela, and M. A. Martin-Delgado. Density-matrix Chern insulators: Finite-temperature generalization of topological insulators. *Physical review B*, 88(15):155141, 2013.
 - [69] Jan Carl Budich, Peter Zoller, and Sebastian Diehl. Dissipative preparation of Chern insulators. *Phys. Rev. A*, 91(4):042117, 2015.
 - [70] Da-Jian Zhang and Jiangbin Gong. Topological characterization of one-dimensional open fermionic systems. *Phys. Rev. A*, 98(5):052101, 2018.
 - [71] Alexander Altland, Michael Fleischhauer, and Sebastian Diehl. Symmetry classes of open fermionic quantum matter. *Phys. Rev. X*, 11(2):021037, 2021.
 - [72] Clemens Gneiting, Akshay Koottandavida, Alexander V Rozhkov, and Franco Nori. Unraveling the topology of dissipative quantum systems. *Physical Review Research*, 4(2):023036, 2022.
 - [73] Lucas Sá, Pedro Ribeiro, and Tomaž Prosen. Symmetry Classification of Many-Body Lindbladians: Tenfold Way and Beyond. *arXiv preprint arXiv:2212.00474*, 2022.
 - [74] Kohei Kawabata, Anish Kulkarni, Jiachen Li, Tokiro Numasawa, and Shinsei Ryu. Symmetry of open quantum systems: Classification of dissipative quantum chaos. *arXiv preprint arXiv:2212.00605*, 2022.
 - [75] Makio Kawasaki, Ken Mochizuki, and Hideaki Obuse. Topological phases protected by shifted sublattice symmetry in dissipative quantum systems. *Physical Review B*, 106(3):035408, 2022.
 - [76] Makio Kawasaki and Hideaki Obuse. Topological Phases in a PT-Symmetric Dissipative Kitaev Chain. *accepted to JPSJ Conference Proceedings*.
 - [77] Makio Kawasaki, Ken Mochizuki, Norio Kawakami, and Hideaki Obuse. Bulk–edge correspon-

- dence and stability of multiple edge states of a-symmetric non-Hermitian system by using non-unitary quantum walks. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020(12):12A105, 2020.
- [78] George Gamow. Zur quantentheorie des atomkernes. *Zeitschrift für Physik*, 51(3):204–212, 1928.
- [79] Jörg Doppler, Alexei A Mailybaev, Julian Böhm, Ulrich Kuhl, Adrian Girschik, Florian Libisch, Thomas J Milburn, Peter Rabl, Nimrod Moiseyev, and Stefan Rotter. Dynamically encircling an exceptional point for asymmetric mode switching. *Nature*, 537(7618):76–79, 2016.
- [80] Weijian Chen, Şahin Kaya Özdemir, Guangming Zhao, Jan Wiersig, and Lan Yang. Exceptional points enhance sensing in an optical microcavity. *Nature*, 548(7666):192–196, 2017.
- [81] Michael A Nielsen and Isaac Chuang. Quantum computation and quantum information, 2002.
- [82] W-P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger. Soliton excitations in polyacetylene. *Phys. Rev. B*, 22(4):2099, 1980.
- [83] Alexander Altland and Martin R Zirnbauer. Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures. *Physical Review B*, 55(2):1142, 1997.
- [84] Takahiro Morimoto and Akira Furusaki. Topological classification with additional symmetries from Clifford algebras. *Physical Review B*, 88(12):125129, 2013.
- [85] Ali Mostafazadeh. Pseudo-Hermiticity versus PT-symmetry III: Equivalence of pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries. *Journal of Mathematical Physics*, 43(8):3944–3951, 2002.
- [86] Ken Shiozaki and Masatoshi Sato. Topology of crystalline insulators and superconductors. *Physical Review B*, 90(16):165114, 2014.
- [87] Tomaž Prosen. Third quantization: a general method to solve master equations for quadratic open Fermi systems. *New J. Phys.*, 10(4):043026, 2008.
- [88] Tomaž Prosen. Spectral theorem for the Lindblad equation for quadratic open fermionic systems. *J. Stat. Mech.*, 2010(07):P07020, 2010.
- [89] Thomas Barthel and Yikang Zhang. Solving quasi-free and quadratic Lindblad master equations for open fermionic and bosonic systems. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2022(11):113101, 2022.
- [90] A Yu Kitaev. Unpaired majorana fermions in quantum wires. *Phys. Usp.*, 44(10S):131, 2001.
- [91] Tomaž Prosen. PT-Symmetric Quantum Liouvillean Dynamics. *Physical Review Letters*,

109(9):090404, 2012.

- [92] Julian Huber, Peter Kirton, Stefan Rotter, and Peter Rabl. Emergence of PT-symmetry breaking in open quantum systems. *SciPost Physics*, 9(4):052, 2020.
- [93] Yuma Nakanishi and Tomohiro Sasamoto. PT phase transition in open quantum systems with Lindblad dynamics. *Physical Review A*, 105(2):022219, 2022.