HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ナッシュ均衡の計算
Author(s)	田中, 嘉浩
Citation	經濟學研究, 73(1), 1-7
Issue Date	2023-06-08
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/89765
Type	bulletin (article)
File Information	ES_73(1)_001.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

経 済 学 研 究 *73－1*
北 海 道 大 学 2023.6

ナッシュ均衡の計算

田 中 嘉 浩

1. はじめに

ナッシュ均衡は戦略形ゲームでの戦略決定の指針や説明として重要なばかりでなく，協調の可能性や繰り返しゲームのフォーク定理に繋がる重要な概念になっており，その計算は大いに意義が有る。

定和 2 人ゲームの様に利得行列の構造の有る場合，ナッシュ均衡を求める問題は線形計画問題として定式化されることを第 2 節で示す。

一般の非ゼロ和 2 人ゲームのナッシュ均衡を求める問題は計算複雑度の理論では PPAD 完全というクラスに属している。PPAD（Polynomial Parity Argument for Directed graphs の略であり，Papadimitriou からではない）は，「有向グラフで与えられたアンバランス（入次数と出次数が違う）な点から有向パスで繋がる他のアンバランスな点を求める探索問題（END OF THE LINE）に帰着できるクラス」であり，握手補題から必ず解が有ることは判っている問題であるがパス長は入力サイズの多項式で抑えられない。NP で SAT を使う NP 完全の定義と同様に，逆に END OF THE LINE から元問題に帰着できるときに PPAD 完全という。一般の非ゼロ和 2 人ゲームのナッシュ均衡が存在することは Nash［10］から知られている。ナッシュ均衡を求める問題の計算複雑度が，NASH → BROUWER → END OF THE LINE と帰着できることと，3 人以上で逆方向の帰着もできることを示すことで，PPAD 完全であることが証明され［2］，2 人の場合でさえ PPAD 完全であることが証明されている［1］。

ところで，非ゼロ和 2 人ゲームは，プレイヤー 1，プレイヤー 2 の利得行列を A, B を $m\times n$ 行列とすると，ナッシュ均衡は，「1 人で違う戦略に変えてもより得をすることがない」という定義なので，

$$
\begin{aligned}
{x^*}^T A y^* &\geq x^T A y^*, \quad \forall x \in \Delta^{m-1} \\
{x^*}^T B y^* &\geq {x^*}^T B y, \quad \forall y \in \Delta^{n-1}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

を満たす $(x^*, y^*) \in \Delta^{m-1}\times\Delta^{n-1}$（但し Δ^d は d 単体）と定義される。これは $s={x^*}^T A y^*$，$t={x^*}^T B y^*$ と置くと，前から x^*, x，次式は y^*, y を掛けることを考えると，

$$
\begin{aligned}
&Ay^*+u^*=s\mathbf{1}_m,\ B^T x^*+v^*=t\mathbf{1}_n \\
&{x^*}^T u^*={y^*}^T v^*=0,\ u^*\geq 0,\ v^*\geq 0
\end{aligned}
$$

と同値である。

よって，ナッシュ均衡を求める問題は，

$$
\begin{aligned}
&(A \quad I_m)\binom{y}{u}=\mathbf{1}_m,\ (I_n \quad B^T)\binom{v}{x}=\mathbf{1}_n \\
&x^T u=y^T v=0,\ x,y,u,v\geq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

という線形相補性系（linear complementary system）に定式化することができる。標準的な解法としては，Lemke-Howson アルゴリズム［7］等が知られているが，ピボット演算を繰り返す方法であり，多項式時間アルゴリズムでないことが知られている［13］。

Knight and Campbell［6］は一般の非ゼロ和 2 人ゲームの Nash 均衡を求める Python ライブラリとして Nashpy を提案している。第 3 節

ではこの使いやすい Nashpy を紹介する。

第 4 節ではナッシュ均衡の計算に関する更なる話題に触れる。

2. 定和 2 人ゲームのナッシュ均衡

ゼロ和 2 人ゲームを含む定和 2 人ゲームでは以下のように線形計画問題として正式化できるので，多項式時間で解くことができる。

定和（和 c）2 人ゲームではプレイヤー 1 とプレイヤー 2 の利得行列の全ての要素で $c/2$ を引いてゼロ和 2 人ゲームの A を作る（この時に $B=-A$ となる）。
プレイヤー 1 とプレイヤー 2 の混合戦略を x, y, $\mathbf{1}=(1,\dots,1)^T$ とする。
ゼロ和 2 人ゲームでは時代が前なので Nash 均衡は均衡ともいう。
ゼロ和では $B=-A$ であるから，
プレイヤー 1 のマキシミン戦略は，

$$\begin{aligned}&\underset{x,\ v_1}{\text{maximize}} \quad v_1\\&\text{subject to}\ \ A^T x \geq v_1 \mathbf{1}_n \qquad (3)\\&\qquad \textstyle\sum_{i=1}^m x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i=1,\dots,m.\end{aligned}$$

プレイヤー 2 のミニマックス戦略は，

$$\begin{aligned}&\underset{y,\ v_2}{\text{minimize}} \quad v_2\\&\text{subject to}\ \ Ay \leq v_2 \mathbf{1}_m \qquad (4)\\&\qquad \textstyle\sum_{i=1}^n y_i = 1,\ y_i \geq 0,\ i=1,\dots,n.\end{aligned}$$

という $(x,v_1),(y,v_2)$ を変数にする線形計画問題を解いて得られる。

定理 1. 定和 2 人ゲームのナッシュ均衡は存在して，線形計画問題（3），（4）の解 (x^*,y^*) となり，m,n の多項式時間で求まる。

［証明］ まず (3) の解 (x^*,v_1^*),（4）の解 (y^*,v_2^*) が存在することを示す。
(3) は，

$$\begin{aligned}&\underset{x,\xi_1,\xi_2}{\text{minimize}} \quad -(\xi_1-\xi_2)\\&\text{subject to}\ \ A^T x-(\xi_1-\xi_2)\mathbf{1}_n \geq 0 \qquad (5)\\&\qquad \mathbf{1}_m{}^T x \geq 1\\&\qquad -\mathbf{1}_m{}^T x \geq -1\\&\qquad x_i \geq 0,\ i=1,\dots,m,\ \ \xi_1,\xi_2 \geq 0.\end{aligned}$$

と書き換えれるが，この双対問題は，

$$\begin{aligned}&\underset{y,\eta_1,\eta_2}{\text{maximize}} \quad \eta_1-\eta_2\\&\text{subject to}\ \ Ay+(\eta_1-\eta_2)\mathbf{1}_m \leq 0 \qquad (6)\\&\qquad -\mathbf{1}_n{}^T y \leq -1\\&\qquad \mathbf{1}_n{}^T y \leq 1\\&\qquad y_i \geq 0,\ i=1,\dots,n,\ \ \eta_1,\eta_2 \geq 0.\end{aligned}$$

となる。
$v_2=-(\eta_1-\eta_2)$ と考えることにより，（4）は（3）の双対問題にもなる。（5）は $x\in\Delta^{m-1}$ なので有界な最適解が有ることが明らかである。よって線形計画の強双対定理から有界な解 (x^*,ξ^*), (y^*,η^*) が存在して $-v_1^*=-(\xi_1-\xi_2)=\eta_1-\eta_2=-v_2^*$, 即ち $v_1^*=v_2^*$ となる。
ここで，$E=(1_{ij})$ とすると，

$$x^T\left(\frac{c}{2}E\right)y=\frac{c}{2},\quad \forall x\in\Delta^{m-1},\forall y\in\Delta^{n-1}$$

となるので，
プレイヤー 1 について，（1）の

$$x^{*T}Ay^* \geq x^T A y^*,\quad \forall x\in\Delta^{m-1}$$

は，

$$x^{*T}\left(A-\frac{c}{2}E\right)y^* \geq x^T\left(A-\frac{c}{2}E\right)y^*,\quad \forall x\in\Delta^{m-1}$$

（$(A-\frac{c}{2}E)$ はゼロ和 2 人ゲームの A）

と同じ問題であり，プレイヤー 2 に関しても同じ議論が成立する。
よって，線形計画問題は多項式時間の解法

（e.g.［9］）が存在するので，題意は成立して，定和２人ゲームの Nash 均衡は (x^*, y^*) となる。

□

2 節の方法は線形計画問題なので理論的には多項式時間の解法が有る問題だが，高速な汎用ライブラリ（例えば Python の PuLP）が多く有り，戦略数が数万でも解けるという長所が有る。

3. 非ゼロ和２人ゲームのナッシュ均衡

Knight and Campbell［6］は一般の非ゼロ和２人ゲーム（双行列ゲームであり，定和２人ゲームを含む）の Nash 均衡を求める Python ライブラリとして Nashpy を提案している。使いやすいライブラリなので簡単に紹介する。

例．タカ－ハト・ゲーム（Chicken）

P1 ＼ P2	ハ　ト	タ　カ
ハ　ト	(2, 2)	(0, 4)
タ　カ	(4, 0)	(-2, -2)

まず，理論的に解く。
プレイヤー２が混合戦略 $(y, 1-y)$，
$0 \le y \le 1$，を取るとすると，
プレイヤー１の期待利得は，
ハトを選択すると，$2y$
タカを選択すると，

$$4y - 2(1-y) = 6y - 2$$

となる。
よって，プレイヤー１の最適応答は，

$$BR_1(y) = \begin{cases} \{1\}, & 0 \le y < \frac{1}{2} \\ [0,1], & y = \frac{1}{2} \\ \{0\}, & \frac{1}{2} < y \le 1 \end{cases}$$

同様にして，
プレイヤー１が混合戦略 $(x, 1-x)$ を取るとすると，プレイヤー２の最適応答は，

$$BR_2(x) = \begin{cases} \{1\}, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ [0,1], & x = \frac{1}{2} \\ \{0\}, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

となる。
よって，Nash 均衡 $\{(x^*, 1-x^*), (y^*, 1-y^*)\}$ の

$$(x^*, y^*) \in BR_1(y^*) \times BR_2(x^*)$$

となるから，

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

となる。

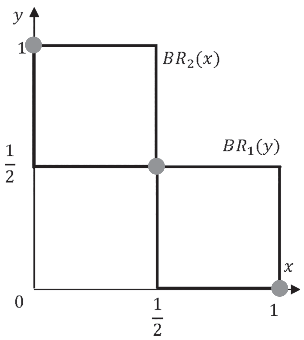

図１　プレイヤー毎の最適反応対応

Nashpy を使うために

```
$ python -m pip install nashpy
```

で Nashpy をインストールする。
Python プログラムは，上の例では，

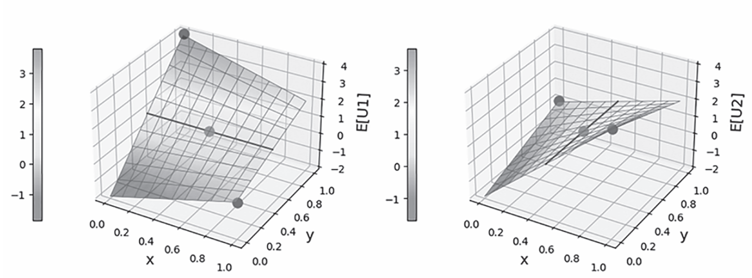

図 2．プレイヤー毎の期待利得

```
import numpy as np
import nashpy as nash

P1 = np.array([[2, 0], [4, -2]]) # P1 is the row player
P2 = np.array([[2, 4], [0, -2]]) # P2 is the column player
chicken = nash.Game(P1, P2)

equilibria = chicken.support_enumeration()
for eq in equilibria:
    print(eq)
```

を実行することによって，

```
(array([1., 0.]), array([0., 1.]))
(array([0., 1.]), array([1., 0.]))
(array([0.5, 0.5]), array([0.5, 0.5]))
```

という答が出てくるが，上から順に，

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right),\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$$

という答に対応している。

ナッシュ均衡の安定性を調べる為に，Python の matplotlib を使って，プレイヤー 1，2 の期待利得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[U_1] &= 2xy + 4(1-x)y - 2(1-x)(1-y)\\ &= -4xy + 2x + 6y - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[U_2] &= 2xy + 4x(1-y) - 2(1-x)(1-y)\\ &= -4xy + 6x + 2y - 2\end{aligned}$$

の 3D プロットを描くと図 2 の様になる。図 2 では双曲放物面になる様子は見て取れるが，まだ各ナッシュ均衡の安定性は判りにくい。

そこで，

$$\begin{pmatrix}\nabla_x \mathrm{E}[U_1]_1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\\nabla_y \mathrm{E}[U_2]_2\end{pmatrix}$$

をプロットしたものが図 3 である。

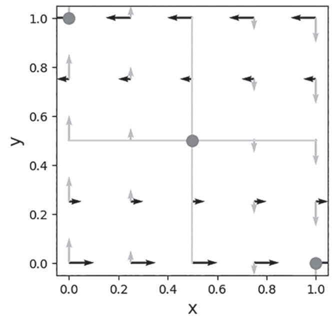

図 3．プレイヤー毎の勾配方向

これはプレイヤー 2 の戦略が一定の時にプレイヤー 1 の向かうべき方向（濃い矢印），プレイヤー 1 の戦略が一定の時にプレイヤー 2 の向かうべき方向（淡い矢印）を示しているが，この図からは，通常の意味では，

$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$，$\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ は安定だが，

$\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$ は安定かは不明（方向に依る）

である。

次に Maynard Smith and Price［8］による進化的に安定な戦略 ESS（evolutionarily stable strategy）を考える。この場合は全体でのハト型の比率を x と考えることにより，
ハト型の適応度は $2x$
タカ型の適応度は $4x-2(1-x)=6x-2$
となるので，ハト型の比率による適応度の変化は図 4 の様になる。

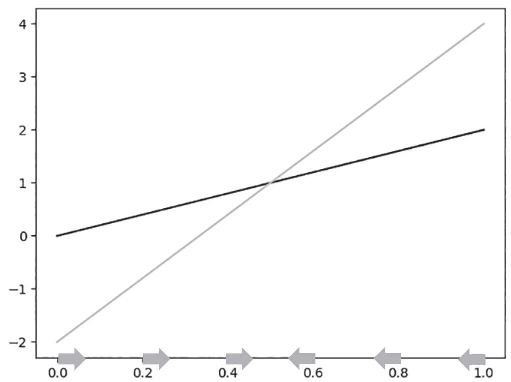

図 4　タカーハト・ゲームでの行動の変化

図 4 からは，ハト型（濃い直線）の比率が 50% より大きい場合にはタカ型（淡い直線）の方が環境に適応するのでハト型の比率が減少することと，ハト型の比率が 50% より小さい場合にはハト型の方が環境に適応するのでハト型の比率が増加することを考えると，ハト型の比率が 50% に収束，つまり集団としてはナッシュ均衡 $\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$ に収束していくことが判る。

定理 2［12］． s^* を ESS とすると，(s^*, s^*) はナッシュ均衡である。 □

混合戦略 $s^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T$ に関してプレイヤー 1 の期待利得は，

$$u(s^*,s^*)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 0\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{2}\times(-2)\right)=1$$

突然変異を $t=(p,1-p), p\neq\frac{1}{2}$ とすると，

$$u(t,s^*)=p\times\left(\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 0\right)+(1-p)\times\left(\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{2}\times(-2)\right)=1$$

よって，s^* が進化的に安定

$$u(s^*,(1-\varepsilon)s^*+\varepsilon t)>u(t,(1-\varepsilon)s^*+\varepsilon t)$$

であるためには，

$$u(s^*,t)>u(t,t)$$

ならばよい。

$$u(t,s^*)-u(t,t)=4p^2-4p+1=4\left(p-\frac{1}{2}\right)^2>0$$

なので，$s^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T$ は ESS であることが確かめられた。

期待利得だけを考えた場合と ESS を考える場合で安定に関して少し異なったように思える結果になったのは，前者は多人数の 2 集団が各々別集団との戦略の組に依る利得を考える方法論だが，ESS の場合は，多人数の 1 集団の進化を考えて突然変異で逸脱する小さい集団の利得を考える方法論である違いが有るからである。

最後に 2 節に関連するが，じゃんけんの利得行列（アメリカ式に Rock, Paper, Scissors の順）に 1 ずつ加えた次の利得行列

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (0,2) & (2,0) \\ (2,0) & (1,1) & (0,2) \\ (0,2) & (2,0) & (1,1) \end{pmatrix}$$

の定和2人ゲーム（和は2）を Nashpy で解くと，

```
import numpy as np
import nashpy as nash

P1 = np.array([[1, 0, 2], [2, 1, 0], [0, 2, 1]])
# P1 is the row player
P2 = np.array([[1, 2, 0], [0, 1, 2], [2, 0, 1]])
# P2 is the column player
const = nash.Game(P1, P2)

equilibria = const.support_enumeration()
for eq in equilibria:
    print(eq)
```

```
(array([0.33333333, 0.33333333, 0.33333333]), array([0.33333333, 0.33333333, 0.33333333]))
```

つまり，

$$(x^*, y^*) = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right)$$

という正解が得られている。

4. 更なる話題

一般の非ゼロ和2人ゲームは，2節の様に特殊な構造の有る場合でなければ，一般には純戦略数の多項式時間の解法は知られていない。そこで考えられているのが，ε-ナッシュ均衡であり，

$$x^T Ay \geq e_i^T Ay - \varepsilon, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$
$$x^T By \geq x^T Be_j - \varepsilon, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

で定義される (x, y) である（同じ戦略数を仮定する）。ε-ナッシュ均衡は，ナッシュ均衡の緩和であり，「1人で何か純戦略に変えても ε より得をすることがない」ということである。

定理3［4］. 利得行列 A, B の要素がすべて $[-1, 1]$ に入っており，$A+B$ の非ゼロの要素が高々 s 個以内の時に，ε-ナッシュ均衡は $O(n^{\frac{\log(\max(s,4))}{\varepsilon^2}})$ 時間以内に計算できる。 □

定理3から「ゼロ和2人ゲームに近い非ゼロの要素数 s が小さい（特に $s \leq n$）時に，多項式時間で ε-ナッシュ均衡は求まる」ことが分る。

非ゼロ和3人ゲームに関しては，プレイヤー3の戦略毎に別の利得行列を扱う問題になり，ずっと複雑になるが，1節に述べたように PPAD 完全のクラスであることが判っている（後に非ゼロ和2人ゲームさえ PPAD 完全であることが判明した［1］）。ところが，3人ゲームの混合ナッシュ均衡の解集合は実代数多様体（代数方程式系の解集合）と同型である［3］ことが判っており，解に無理数を含む可能性もある［11］。非ゼロ和 r $(r > 3)$ 人ゲームを3人ゲームに写像してナッシュ均衡を元問題に全射する理論はあるものの，特に3人以上のプレイヤーの高速な解法は前途多難と思われる。

ナッシュ均衡ではなく，Aumann によって提案された相関均衡（correlated equilibrium）は存在して有限個の線形不等式系で表せれることが判っており，相関均衡に関する判定問題の殆どが，ナッシュ均衡で対応する判定問題と対照的に，多項式時間で解けるという結果［5］は興味深い。

5. おわりに

本稿では，ナッシュ均衡の解法に対してその現状を紹介し，定和２人ゲームが線形計画問題に定式化できるので多項式時間で解けることを示した。

一般には非ゼロ和２人ゲームでさえ PPAD 完全のクラスになるので高速解法は知られていないが，Nashpy は使いやすく，教育や軽い実務で大きな効果が有ることが期待できる。

参考文献

［1］Chen, X., Deng, X.,“Setting the complexity of 2-player Nash-equilibrium,” *ECCC*, TR05-140, 2005.

［2］Daskalakis, C., Goldberg, P.W., Papadimitriou, C.H., “The complexity of computing a Nash equilibrium,” *Communications of the ACM* 52（2）,（2009）89—97.

［3］Datta, R.S.,“Universality of Nash equilibria,” *Mathematics of Operations Research* 28（3），（2003）424—432.

［4］De Loera, J.A., Goaoc, X., Meunier, F., and Mustafa, N.H.,“The discrete yet ubiquitous theorems of Carathéodory, Helly, Sperner, Tucker, and Tverberg,” *Bulletin of the American Mathematical Society* 56（3），（2019）415—511.

［5］Gilboa, I., Zemel, E.,“Nash and correlated equilibria: some complexity considerations,” *Games and Economic Behavior* 1（1）,（1989）80—93.

［6］Knight, V. and Campbell, J.,“Nashpy: A Python library for the computation of Nash equilibria,” *Journal of Open Source Software* 3（30），（2018）904.

［7］Lemke, C.E. and Howson, Jr., J.T.,“Equilibrium points in bimatrix games,” *Journal of SIAM* 12（2），（1964）413—423.

［8］Maynard Smith, J., Price, G.R.,“The logic of animal conflict,” *Nature* 246,（1973）5—18.

［9］Mehrotra, S.,“On the implementation of a primal-dual interior point method,” *SIAM Journal on Optimization* 2（4）,（1992）575—601.

［10］Nash, J.F.,“Equilibrium points in n-person games,” *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36（1），（1950）48—49.

［11］Nash, J.F.,“Non-cooperative games,” *Annals of Mathematics* 54（2）,（1951）286—295.

［12］岡田　章,『ゲーム理論・入門（新版）』有斐閣, 2014.

［13］Savani, R. and von Stengel, B.,“Hard-to-solve bimatrix games,” *Econometrica* 74（2），（2006）397—429.（著者 WEB 上に Erratum 有）