Title	On stability of spatial patterns for mass-conserved reaction-diffusion systems [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	祐川, 翼
Citation	北海道大学. 博士(理学) 甲第15597号
Issue Date	2023-09-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/90739
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	theses (doctoral - abstract and summary of review)
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	Tsubasa_Sukekawa_abstract.pdf (論文内容の要旨)

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　　氏　名　　祐 川 翼

学 位 論 文 題 名

On stability of spatial patterns for mass-conserved reaction-diffusion systems
（保存量をもつ反応拡散系における安定な空間パターンについて）

反応拡散系は物理学，化学，生物学における，様々なパターン形成現象のモデル方程式として用いられている．実際の現象における定常パターンや進行波のような特徴的なパターンに対応する解の存在，また，それらの解の安定性などの解の性質を理解することは，数理モデルの観点から現象を理解する上で重要である．

近年，細胞で観測される細胞極性という現象を記述するモデル方程式として，保存量をもつ反応拡散系が用いられている．細胞極性とは細胞内の化学物質が空間的に局在化する現象であり，細胞分化や，細胞が異方的な機能を獲得するのに重要であると考えられている．本研究はこの細胞極性モデルの数学解析を主眼とする．

本研究では次の反応拡散系について考察する．

$$\partial_t u = d\,\partial_x^2 u + g(x,u,v) \quad (t>0, x\in I),$$
$$\tau\partial_t v = \partial_x^2 v - g(x,u,v) \quad (t>0, x\in I).$$

ここで，$u=u(t,x), v=v(t,x)$は未知関数であり，d,τは正定数である．Iは一次元区間であり$I \coloneqq (0,K)$と定める．Kは正定数である．gは空間変数xについて$\bar{I}$上連続でありu,vについてC^2-級の関数である．(u,v)を(E)において斉次ノイマン境界条件，または周期境界条件を課した際の古典解とすると，$\int_I (u+\tau v)dx$がtによらない保存量となる．

保存量をもつ反応拡散系における重要な問題として安定定常解の形状が挙げられる．例えば，細胞極性モデルにおいて，(E)の非定数定常解は化学物質の局在パターンに相当し，多くの細胞極性現象において，細胞の一方向に化学物質が局在することが重要とされる．これは数学的にはピークを一つだけ有する形状の定常解に対応する．よって，どのような形状の定常解が安定となるかが数学的のみならず，生物的にも興味深い問題となる．

本学位論文は二部構成になっている．各部では反応項gとして，それぞれ以下の二つの内の一方を選んだ場合の(E)における安定定常解の形状について考察する．

$$g(x,u,v) = -p(x)u + q(x)v, \qquad (1)$$
$$g(x,u,v) = f(u,v). \qquad (2)$$

ただし，$p,q\in C(\bar{I}), f\in C^2(\mathbb{R}^2)$.

第一部では反応項として(1)を選んだ方程式を扱う．以下，その方程式を保存量をもつ線形反応拡散系と呼ぶ．保存量をもつ線形反応拡散系は，本学位論文の著者が先行研究[1]において，細胞極性モデルの数学解析を行う上で注目したものである．著者は$\tau=1$かつ係数関数p,qに対し，

(i)（正値性）$p(x), q(x) > 0\ (x\in\bar{I})$．(ii)（対称性）$p(x) = p\left(\frac{K}{2}-x\right), q(x) = q\left(\frac{K}{2}-x\right)$

(iii)（単調性）p,qは$\left(0,\frac{K}{2}\right)$上それぞれ狭義単調増加，狭義単調減少関数となる．

という三つの条件の下，保存量をもつ線形反応拡散系における安定定常解の存在と一意性，及びその概形についての結果を得た．上のp,qに対する条件はモデルの背景に由来するものである．特に，先行研究で示した安定定常解の概形は，定性的に極性パターンを再現するものとなっている．本学位論文において，[1]の結果を任意の正数τの場合かつ，係数関数についての単調性の仮定を数学的に一般化した場合も，[1]と同様に極性パターンを再現する定常解の存在を示した．

第二部では(E)の反応項を(2)とした場合における安定定常解の形状について考察する．この方程式は細胞極性現象の概念モデルとして導入され，細胞極性現象を定性的に再現するモデルとし

て知られている．特に，この方程式に対して数値シミュレーションを行うと，複数のストライプ状のパターンが空間的に単調なパターンへと収束するようなダイナミクスが観測される．この遷移ダイナミクスの理解のため，これまで多くの先行研究が行われており，数学解析においてはストライプパターンに対応する定常解における線形化固有値問題が扱われている．

これまでの先行研究においては線形化固有値問題の固有値についての結果が得られているが，固有関数についての結果は十分には得られていない．固有関数は定常解近傍での解のダイナミクスに対応しており，特に先述の遷移ダイナミクスを理解する上でも重要である．したがって，固有値のみならず，固有関数についても数学的に解析することが本研究の目的である．

本研究では保存量をもつ反応拡散系における非単調な定常解の安定性と，その定常解近傍での解のダイナミクスの理解のために，以下の反応拡散コンパートメントモデルという系を導入する．

$$\begin{aligned} \partial_t u_j &= d\,\partial_x^2 u_j + f(u_j, v_j) && (t>0, x\in I_j), \\ \tau\partial_t v_j &= \partial_x^2 v_j - f(u_j, v_j) && (t>0, x\in I_j), \\ d\partial_x u_1 &= \varepsilon\alpha(u_2-u_1) = d\partial_x u_2 && (t>0, x=K/2), \\ \partial_x v_1 &= \varepsilon(v_2-v_1) = \partial_x v_2 && (t>0, x=K/2). \end{aligned} \qquad \text{(E)}'$$

ここで，u_j, v_j $(j\in\{1,2\})$はそれぞれ$I_j := ((j-1)K/2, jK/2)$の上で定義された未知関数である．上の方程式は，元の反応拡散系(E)の定義域を複数の領域に分割し，領域の間を拡散結合でつないだ系とみなせる．α, εはそれぞれ拡散結合の比と強さに相当するパラメーターであり$\alpha > 0, \varepsilon \geq 0$とする．$\varepsilon$について無限大に極限をとると，$x = K/2$において形式的に$u_2 - u_1 \to 0, v_2 - v_1 \to 0$となる．したがって，$(u_j, v_j)$を$I$上の関数として同一視すれば，$\varepsilon$を無限大としたときコンパートメントモデルは元の方程式(E)に等しくなると考えられる．この考察から，コンパートメントモデルの解析が，元の方程式(E)の解析に役立つことが期待できる．本研究では$x = 0, K$において反射壁境界条件を課す．このとき，$(\mathrm{E})'$においてもが保存量が定まる．

$\varepsilon = 0$とした際のI_1上の単調な定常解を$P(x;s) = (u^*(x;s), v^*(x;s))$とする．ここで，$s = (2/K)\int\big(u^*(x;s) + \tau v^*(x;s)\big)dx$であり定常解のパラメーターとする．$P^2$を以下に定める．

$$P^2 := \begin{cases} P(x;s) & (x\in I_1), \\ P(K-x;s) & (x\in I_2). \end{cases}$$

このとき，P^2は$(\mathrm{E})'$の定常解になる．

本学位論文では方程式$(\mathrm{E})'$の定常解P^2における線形化固有値問題を解析した．定常解P^2が$x = K/2$に対して左右対称であり，方程式(E)の反応項がxによらないことから，この線形化固有値問題は固有関数の$x = K/2$に対する偶成分と奇成分に分解することができる．この奇成分に注目すると，$\varepsilon = 0$のとき，この固有値問題には保存量に由来する0固有値が存在し，$\partial_s P$が対応する固有関数となる．本研究ではεを固有対$(0, \partial_s P)$に対する摂動の強さに相当するパラメーターとみなし，陰関数定理を用いて，εが十分小さい場合の$(0, \partial_s P)$近傍の固有対$\big(\lambda(\varepsilon), \Phi(\varepsilon)\big)$を構成した．特に$\varepsilon$が十分小さいときに$\lambda(\varepsilon)$が正となる十分条件を導出した．また，$\Phi(\varepsilon)$は$\partial_s P$を用いて

$$\Phi(\varepsilon) := \begin{cases} \partial_s P(\cdot\,;s) + O(\varepsilon) & (x\in I_1), \\ -\partial_s P(K-\cdot\,;s) + O(\varepsilon) & (x\in I_2). \end{cases}$$

と近似できることを示した．$\partial_s P$は保存量が増加する際の定常解の変動を表しており，先述の遷移ダイナミクスにおいては，パターンが成長する様子を表していると考えられる．したがって，この固有関数はコンパートメントモデルにおいて，片方のパターンが成長し，もう片方のパターンが減衰するダイナミクスに対応する．これは元の反応拡散系(E)においても観測されていたダイナミクスである．したがって，この結果はコンパートメントモデルの解のダイナミクスが元の保存量をもつ反応拡散系の解のダイナミクスを定性的に再現できることを示唆している．

参考文献

[1] Sungrim Seirin-Lee, Tsubasa Sukekawa, Tomohiro Nakahara, Ishii Hiroshi, and Shin-Ichiro Ei, Transitions to slow or fast diffusions provide a general property for in-phase or anti-phase polarity in a cell. Journal of Mathematical Biology, 80(6):1885-1917, 2020.