HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Various maximum principles for elliptic equations on unbounded domains [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	安孫子, 啓介
Citation	北海道大学. 博士(理学) 甲第15729号
Issue Date	2024-03-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/91866
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	theses (doctoral - abstract and summary of review)
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	Keisuke_Abiko_abstract.pdf (論文内容の要旨)

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　　氏　名　　安孫子　啓介

学 位 論 文 題 名

Various maximum principles for elliptic equations on unbounded domains
（非有界領域上の楕円型方程式に対する種々の最大値原理）

偏微分方程式の解が持つ性質として, 最大値原理は最も基礎的な性質の一つといえる. しかし, 非有界領域上で方程式を考える場合, 最大値原理は一般には成り立たない. 本学位論文は, 非有界領域上の完全非線形楕円型偏微分方程式の粘性解を対象とした最大値原理と, それに関連する性質が成り立つことを示したものである.

第一章では, 次の初期値境界値問題(DBP)を考える.

$$
\text{(DBP)}\begin{cases} F(x,t,Du(x,t),D^2u(x,t))=0 & \text{in } \ \Omega\times(0,T), \\ \partial_t u(x,t)+B\big(x,Du(x,t)\big)=0 & \text{on } \ \partial\Omega\times(0,T), \\ \displaystyle\limsup_{t\to 0}\ \sup_{|x|=R,x\in\partial\Omega} u(x,t)\le 0 & \text{for all } \ R>0. \end{cases}
$$

ここで, Ωは境界が滑らかな非有界領域, Tは正定数, $u=u(x,t)$を未知関数とし, Du, D^2uはそれぞれ空間変数に関する勾配と Hesse 行列, $\partial_t u$は時間変数に関する偏微分とする. (DBP)第二式のように, 時間変数に関する微分項を含む境界条件は動的境界条件とよばれ, 固体と流体の接触による熱交換などの物理現象を記述する際に現れることが知られている.

非有界領域上の方程式の解に対する最大値原理に近い主張として, Phragmén–Lindelöf の定理と呼ばれるものがある. これは解に遠方での増大度の仮定をした場合に, 解が非正値となることを主張するものである. 本研究では, (DBP)の連続な粘性劣解に対して, 空間遠方で高々一次増大であることを仮定した場合の Phragmén–Lindelöf の定理を, 領域Ωの形状と方程式の構造を変えて二種類証明した. 一つは, Fが一様楕円型で, 領域Ωがエピグラフの場合である. この場合は有界領域上の問題に帰着させた後, 強最大値原理を適用することで示すことができた. もう一つは, Fが方向楕円型で, 領域Ωがスラブ状領域の場合である. この場合は有界領域上の問題に帰着させたとしても強最大値原理が適用できるとは限らない. しかし, 方程式の粘性劣解を, 粘性不等式を狭義の意味で満たす劣解で近似することで示すことができた. これらの結果は[1]の内容に基づくものである.

第二章では次の楕円型方程式を全空間で考える.

$$
\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}\Big(D^2u(x)\Big)+\sigma(|x|)|Du(x)|^k=0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n.
$$

ここで, $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}$は定数$0<\lambda\leq\Lambda$に対して定まる Pucci 作用素で, σは非負値連続関数, $1<k\leq 2$は定数, $u=u(x)$を未知関数とする. 本研究では, 半連続な粘性優解に対して Hadamard の三円定理を証明した.

r_1を正定数とし, $m(r)=\min_{r_1\leq|x|\leq r} u(x)$と定める. 古典的な Hadamard の三円定理とは, uが優解のとき, $m(r)$がある種の凸性をもつという主張のことである. 本研究ではこの主張を円環領域上の球対称解による下からの評価と解釈し, 比較定理を用いることで三円定理を導いた. また, 三円定理と強最小値原理を組み合わせることで, Liouville の定理, すなわち非負値粘性優解は定数関数に限ることを証明した. 元の楕円型方程式を常微分方程式の境界値問題に帰着させることで球対称解を構成することができるが, 方程式が非線形であるため, その球対称解は陰的なパラメータを含む. そのパラメータを適切に評価することで, Liouville の定理の必要十分条件を得ることができた. さらに, ここで用いた手法はp-ラプラシアンなどの特異性のある楕円型作用素を含む方程式に対しても適用することができる. これらの内容は, 北海道大学の浜向直氏との共同研究である[2]に基づくものである.

参考文献

[1] K. Abiko. Phragmén–Lindelöf theorems for a weakly elliptic equation with a nonlinear dynamical boundary condition. *Partial Differential Equations and Applications*, 4(3):24, 2023.

[2] K. Abiko and N. Hamamuki. Hadamard and Liouville type theorems for fully nonlinear uniformly elliptic equations with a superliner growth in the gradient, in preparation.