HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Discrete Morse theory on magnitude homotopy types of finite graphs [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	田嶌, 優
Citation	北海道大学. 博士(理学) 甲第15733号
Issue Date	2024-03-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/92258
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	theses (doctoral - abstract and summary of review)
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	Yu_Tajima_abstract.pdf (論文内容の要旨)

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　　氏　名　　田　嶌　　優

学 位 論 文 題 名

Discrete Morse theory on magnitude homotopy types of finite graphs
（有限グラフのマグニチュードホモトピー型上の離散モース理論）

マグニチュードは Leinster により定義された距離空間に対する不変量で，空間のある種の大きさをはかる指標である．Hepworth-Willerton と Leinster-Shulman はマグニチュードの圏化としてマグニチュードホモロジーを定義した．マグニチュードホモロジー $\mathrm{MH}_k^l(X)$ は二重次数付き加群で，距離空間 X と長さ l，次数 k により定まる．

近年，浅尾-泉原はグラフに対してそのホモロジーがマグニチュードホモロジーと同型になるような CW 複体（Asao-Izumihara 複体）を導入した．Asao-Izumihara 複体は長さ l と次数 k がどちらも 2 以上の場合のみのマグニチュードホモロジーを反映した空間であり，その点を改良するために本論文では[2]に基づいてマグニチュードホモトピー型を導入した．マグニチュードホモトピー型は単体複体と部分複体のペアを用いて構成されており，その単体複体上で離散モース理論を用いることでいくつかの結果を得た．

本学位論文では距離空間の中でも特にグラフを扱う．また，マグニチュードホモロジーについては様々な観点からの研究があるが，本論文では次の二つのトピックを扱う．

(a)グラフの対角性について
(b)グラフに対する操作

(a)について，グラフが対角的であるとは，長さ l と次数 k が異なる場合のマグニチュードホモロジーがすべて消えていることを言う．対角的グラフのマグニチュードホモロジーは構造が単純で,そのランクはマグニチュードのみで決まることから重要なクラスであると考えられている．本論文では，あるクラスの対角的グラフ（Pawful graph）の Asao-Izumihara 複体が球面の一点和とホモトピー同値であることを示した．また，この手法を一般化してもう少し広いクラスのグラフが対角的であることも示した．

(b)に関して，先行研究ではマグニチュードホモロジーに対する Kunneth の定理や Mayer-Vietoris 型定理が示されている．さらに，Sycamore twist という操作でうつり合うグラフのマグニチュードが等しいことも知られている．一方で，Sycamore twist でうつり合うグラフのマグニチュードホモロジーが同型かという問題は未解決である．[2]ではマグニチュードホモトピー型に対して離散モース理論を用いてこの問題にアプローチしており，解決には至っていないがその過程でマグニチュードの不変性に対する別証明が得られた．

本論文は 5 つの章で構成されている．

1 章では，マグニチュードとマグニチュードホモロジーの定義やその 2 つの関係をまず紹介する．次に，4 章以降で用いる離散モース理論の基本的な事項について説明する．

2 章では，Asao-Izumihara 複体とマグニチュードホモトピー型それぞれの構成やマグニチュードホモロジーとの関係を述べる．

3 章では，[1]に基づいて対角的グラフの Asao-Izumihara 複体に関する結果を示す．

4 章では，対角的でないグラフとして（頂点が奇数個の）サイクルグラフの Asao-Izumihara 複体を調べ，（異なる次元の）球面の一点和とホモトピー同値であることを示した．

5 章では，[2]に基づいて 2 つのグラフを接着して得られるグラフについての結果を述べた．前半では，マグニチュードホモトピー型に対する Mayer-Vietoris 型定理を示した．後半では，Sycamore twist でうつり合うグラフのマグニチュード不変性の別証明を示した．

参考文献

[1] Yu Tajima, Masahiko Yoshinaga, Magnitude homology of graphs and discrete Morse theory on Asao-Izumihara complexes. *Homology, Homotopy and Applications* **25** (2023), no. 1, 331-343.

[2] Yu Tajima, Masahiko Yoshinaga, Causal order complex and magnitude homotopy type of metric spaces. *International Mathematics Research Notices* (2023).