学　位　論　文　内　容　の　要　旨

博士の専攻分野の名称　　博士（情報科学）　　氏名　舘入　数磨

学　位　論　文　題　名

Computing Geodesics on Polyhedral Surfaces
（多面体上の測地線の計算）

本論文では, 3 次元空間における多面体上の経路の一種である**測地線** (geodesics) の計算に関して考察する. ここで, 多面体上の**経路** (path) とは, 多面体の表面だけを通り, 2 点をつなぐ曲線をいう. 以降では, 多面体の表面全体を, 単に多面体と呼ぶ. 一般に微分幾何学において, 滑らかな曲面における測地線とは, 局所的に最短な経路として定義される. すなわち, 測地線とは, 経路に微小な摂動を加えた場合に, その長さが極小となっているような経路をいう. 多面体においても, 同様に測地線の概念を定義することができる. 測地線に密接に関連した概念として, 多面体上の与えられた 2 点を結ぶ長さが最小の経路を, 多面体上の**最短経路** (shortest path) と呼ぶ. ここに, 2 点間の最短経路は測地線となるが, その 2 点を結ぶ測地線のすべてが最短経路となるわけではないことに注意する必要がある. 多面体上の**最短経路問題** (shortest path problem) は, 計算幾何学分野における基本的な問題であり, 実用上も重要である. この問題では, 入力として, 多面体 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}$ 上の一点 s が与えられたときに, s から $\mathcal{P}$ の全ての頂点への最短経路を求める. これは, 離散最適化分野における基本的な問題の一つであるグラフにおける最短経路の多面体上への一般化になっている.

多面体上の最短経路に関係する問題の中で, 多面体上における**単一始点最短経路問題** (single source shortest path problem) は, とくに重要な問題であるため, よく調べられており, 多くの先行研究が存在する. 本論文に最も関係する先行研究として, 1987 年に, Mitchell と, Mount, Papadimitriou は, 多面体上における単一始点最短経路問題に対する最初の効率良い計算手法である MMP アルゴリズムを与えた. これに続き, 1990 年に Chen と Han によって提案された CH アルゴリズムや, 2009 年に Xin と Wang によって提案された ICH アルゴリズム等が提案されてきた. また, 始点と終点が頂点であるような**全点対最短経路問題** (all pairs shortest path problem) に対して, Ying と, Wang, He は, グラフを用いた枠組みである Saddle Vertex Graph 手法を提案している. その一方で, 局所的に距離が極小な経路である測地線の計算に関しては, 計算幾何学分野では, あまり注意が払われておらず, 申請者の知る限りでは, ほとんど研究が行われていないように思われる. これは, 数学分野において, 滑らかな曲面における測地線について広く研究されていることや, 物理学分野において, 局所最短経路としての測地線は力学や光学などの応用で重要な研究対象であることと, 対照的である. そこで, 本論文では, 多面体上の測地線の計算について考察する. はじめに 2 章において, 幾何学と多面体に関する基本的な定義を与えたあとで, 多面体上の測地線を定義する. つづく章では, 多面体上の測地線に関する 2 つの計算問題について考察する.

最初に 3 章では, グラフにおける単一始点の最短経路の列挙問題の一般化として, 非凸な多面体の場合を含む一般の多面体上における**単一始点測地線列挙問題** (single source geodesics enumeration problem) を初めて導入し, この問題を解く効率良い手法を提案する. はじめに, 単一始点測地線列挙問題を, (必ずしも凸でない) 多面体 $\mathcal{P}$ 上に 1 点 $s \in \mathcal{P}$ および正の実数 R が与えられたとき, 任意の $t \in \mathcal{P}$ に対して, 長さが R 未満の s から t への測地線を全て求める (クエリする) ことがで

きるデータ構造 $\mathcal{T}$ を求める問題と定義する. そのようなクエリを, 測地線列挙クエリ (geodesics enumeration query) と呼ぶ. まず, この問題に対して, 基本的なデータ構造である完全測地区間木 (complete geodesic interval tree) を定義し, これを計算する手法を議論する. 次に, この問題において, $\mathcal{T}$ に含まれる区間の数を減らすことで, 測地線の列挙に必要な時間およびメモリを減らすことを考える. この目的のために, 本論文では, 双曲的頂点 (頂点の周りを面に沿って測った角度の合計が 2π より大きいような頂点) の周りに生成される区間の重なりを取り除くことにより既約測地区間木 (reduced geodesic interval tree) と呼ぶ改良されたデータ構造を提案する. さらに, 導入した既約測地区間木が, 測地線列挙クエリの結果を単一ペア測地線グラフ (single-pair geodesic graph) と呼ばれる構造として簡潔に表現可能にすることを説明する. 計算量解析では, どちらの種類の測地区間木も, それらに含まれる区間数を N とおくと, それぞれ $O(N \log N)$ 時間, および, $O(N)$ 領域で生成できることを示す. さらに計算機実験では, 既約測地区間木が, 完全測地区間木より少ない記憶領域しか必要とせず, 実行時間やメモリ消費において, より優れていることが観察された.

次に 4 章では, 凸多面体における最小跡 (cut locus) の計算について考察する. 凸多面体 $\mathcal{P}$ 上の一点 s が指定されていると仮定すると, 任意の正の実数 R に対して, 始点 s からの測地的距離が R であるような等距離線を考えることができる. これを波面 (wavefront) と呼ぶ. 一般に, 波面は円弧から構成されており, 1 つの面上にある 2 つの弧は面上のある一点で接続する. R の増加により波面が進むにつれて, この接続点全体は多面体の表面上を移動するので, これらの点全体の集合 C を最小跡と呼ぶ. いいかえると, 最小跡は始点 s からの最短経路が複数存在する点の集合である. 本章で考察する凸多面体 $\mathcal{P}$ の場合は, 最小跡 C は, $\mathcal{P}$ 上の点集合と, それらをつなぐ直線分からなるグラフとなる. 最小跡 C は, 表面におかれた点集合に対する $\mathcal{P}$ の表面全体の分割になっており, 通常の 2 次元平面上のボロノイ図 (Voronoi diagram) に対応する. ただし, 2 次元平面の場合と異なり, 凸多面体においては始点がただ一つの場合でも定義される点が異なる. 本章では, 議論を簡単にするため $\mathcal{P}$ の凸性およびいくつかの条件を仮定した上で, Mitchell と, Mount, Papadimitriou による MMP アルゴリズムを修正することで, 明示的な波面伝播と 最小跡の構築を $O(n^2 \log n)$ 時間および $O(n)$ 領域で行えることを示す. ここで, n は多面体 $\mathcal{P}$ の頂点の数である. また, 生成された区間を全て保持することにより, $O(n^2)$ 領域で測地線クエリに対応するように変更できることを示す. 人工データを用いた実験では, 測地線クエリに対応するアルゴリズムの実際の性能は, おおよそ $O(n^{1.5} \log n)$ 時間および $O(n^{1.5})$ 領域であることが観察された.

以上をまとめると, 本論文では, 3 次元空間における多面体上の測地線について考察し, 凸または非凸な多面体上における単一始点測地線列挙問題と, 凸多面体における最小跡の計算問題について, 効率良いアルゴリズムを提案した. これらのアルゴリズムは, 今後, 多面体上の測地線に関わるさまざまな応用において有用な道具になると思われる. 提案アルゴリズムの応用可能性について調べることは, 今後の興味深い課題である.