学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理学）　　氏　名　　足 利 涼 介

学 位 論 文 題 名

Representations of the Hopf algebroid A_σ and construction of dynamical reflection maps
(Hopf algebroid A_σ の表現と、ダイナミカル・リフレクション写像の構成)

本学位論文では Hopf algebroid A_σ の表現とダイナミカル・リフレクション写像（以下 DRM と書く）の構成について述べる。どちらも代数学の重要な分野である Yang-Baxter 方程式に関連した研究である。

Yang-Baxter 方程式は今もなお研究が盛んに行われており、可解格子模型や場の量子論など、物理学への応用も進んでいる。また、Hopf algebra も Yang-Baxter 方程式と深い関係性がある。Hopf algebra はその一般化が数多く知られており、weak bialgebra、weak Hopf algebra、Hopf algebroid などがある。本研究では Hopf algebroid に着目した。Hopf algebroid は非可換な環上における Hopf algebra の一般化である。[4, 5]では dynamical Yang-Baxter map（dynamical Yang-Baxter 方程式の解）σを用いて Hopf algebroid A_σを構成している。また、このA_σから dynamical representation という表現から成るテンソル圏を考えることができる [4]。さらに、[3]では[4, 5]のA_σに関して、base ring をより一般化したA_σの構成を行っている。

一方で、鏡映方程式（reflection equation）も Yang-Baxter 方程式と関わりがある。この「鏡映方程式」という言葉は、初めに可積分系の研究の中で登場した。それとは別に、ある量子代数における表現として鏡映方程式を考える研究もある。Yang-Baxter 方程式の研究の分野において、集合論的 Yang-Baxter 方程式という概念があるように、鏡映方程式についても集合論的鏡映方程式の研究が進んでいる。ここで、集合論的鏡映方程式の定義について述べておく。

A, Xは集合とし、写像$\sigma: A\times A \to A\times A$は組紐関係式を満たすとする。このとき、写像$k: A\times X \to A\times X$ が

$$(\sigma\times 1_X)(1_A\times k)(\sigma\times 1_X)(1_A\times k) = (1_A\times k)(\sigma\times 1_X)(1_A\times k)(\sigma\times 1_X)$$

を満たすとき、kは集合論的鏡映方程式の解であるという。

集合論的鏡映方程式についての研究として、[2]では skew left brace（二つの群構造をもつ集合で、distributivity law という等式を満たすもの）の作用を定義し、それを用いた集合論的鏡映方程式の解の構成法を述べている。

本学位論文は三部構成である。第一部は Hopf algebroid と鏡映方程式という二つの研究の背景と本論文の構成について紹介する。第二部では Hopf algebroid A_σの表現について考える。第三部では、澁川陽一氏との共同研究[1]に基づき、DRM の構成法について述べる。この写像は、テンソル圏Set_Hにおける鏡映方程式の解である。この構成法については、[2]の集合論的鏡映方程式の解の構成法から着想して研究を始めた。

第二部は、まず Hopf algebroid A_σの定義とその表現について紹介する。本学位論文では、[3]に述べられている、base ring が一般の環であるA_σの表現の構成を行う。A_σはある自由代数の商として定義される。[4]では（元々の）A_σの自明でない dynamical representation の例が紹介されているが、この例を参考にして、一般化したA_σについての表現を考えた。その結果、いくつかの条件の下でA_σの表現が得られることが分かった。続いて、これらの条件を満たす表現の例を述べる。ここで重要となるのが quasigroup という概念で、quasigroup が持つ性質を利用することにより、条件を満たした例をつくることができる。また、第二部の最後で base ring が Frobenius-separable でない例を挙げる。これにより、weak Hopf algebra でない Hopf algebroid A_σの表現

の構成法が得られたということが分かる。
第三部では、まずテンソル圏Set_Hを説明する。これは集合とそれに付随する写像の組を対象とする圏で、適切にテンソル積などを構成することによって、テンソル圏の構造をもつ。そして、Set_Hにおける鏡映方程式の解である DRM の定義と、DRM を構成するための条件について述べた定理を紹介する。DRM はダイナミカル・パラメータに依存する写像であり、これが集合論的鏡映方程式の解と異なる点である。また、上で述べた定理については、一般のテンソル圏で成り立つとは限らないため、Set_Hで考えることは重要な意味をもつ。
次に、後に述べる主定理のための準備として、monoid、braided monoid、left module of monoid の概念について述べる。また、それぞれの例について紹介する。特に、braided monoid の例では left quasigroup を用いており、主定理でも left quasigroup の性質を利用して証明を行う。次に twisted monoid を定義する。これは braided monoid を使って構成される monoid である。そして、left module of twisted monoid に関する命題の証明を述べる。この命題は主定理の証明において重要な役割を果たす。
この後に、主定理について述べる。この定理はいくつかの条件を満たす left module と群準同型の族が同値であるということを主張する。これまでに示してきた命題を合わせると、「群準同型の族と left module を適切に定めることで DRM が得られる」ということが言え、これが主定理の大きな意義である。主定理の証明では、いくつかの条件を満たす left module と同値なものを順に考えていき、最終的にそれらが群準同型の族と同値になることを複数の段階に分けて証明を行う。また、証明で用いた計算から、DRM の表示を具体的に書き表すことが出来る。
第三部の最後に、主定理から得られる DRM の構成法を基に、具体例をいくつか紹介する。その中で、left quasigroup や left module of monoid の具体例を用いて構成される DRM も一つ挙げた。この例では、DRM はダイナミカル・パラメータに依存する。これは、集合論的鏡映方程式の解ではない、Set_Hというテンソル圏における鏡映方程式の解の例が、本研究の構成法により作れたということを意味する。一方で、構成法を用いてつくった DRM がダイナミカル・パラメータに依存しない、すなわち集合論的鏡映方程式の解となるための必要十分条件について述べた。この解の表示に着目すると、[2]において構成した集合論的鏡映方程式の解の表示と同様になっていることが分かる。この必要十分条件を利用した、集合論的鏡映方程式の解の例についても紹介する。

参考文献

[1] R. Ashikaga, Y. Shibukawa, Dynamical Reflection Maps, to appear in Toyama Math. J.
[2] K. de Commer, Actions of skew braces and set-theoretic solutions of the reflection equation, Proc. Edinburgh Math. Soc., **62**, 2019, 1089-1113.
[3] Y. Otsuto, Y. Shibukawa, FRT construction of Hopf algebroids, Toyama Math. J., **42**, 2021, 51-72.
[4] Y. Shibukawa, Hopf algebroids and rigid tensor categories associated with dynamical Yang-Baxter maps, J. Algebra, **449**, 2016, 408-445.
[5] Y. Shibukawa, M. Takeuchi, FRT construction for dynamical Yang-Baxter maps, J. Algebra, **323**, 2010, 1698-1728.