HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ダグラス清算函数の均衡
Author(s)	京野, 禎一; KYONO, T.
Citation	北海道大學法經會論叢, 13, 112-130
Issue Date	1953-07
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/10747
Type	departmental bulletin paper
File Information	13_p112-130.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

ダグラス生産函數の均衡

京野禎一

目次

一、緒言

生産は、生産量とそれに用いられた生産諸要素の量との間の函数関係として理解し得る。即ち生産諸要素の各々の投入量が決まると、それに応ずる生産量も確定されるとするのである。この場合、函数関係とは必ずしも公式化することを意味するものではなく、ともかくも生産量と生産諸要素量との間に、何等かの対応関係（註1）の存在を主張するものである。たゞその場合に、函数関係なるものが出来得れば公式化されることが望ましいと願うのみである。この事は吾々に、生産のより具体的な或は数学的（註2）な分析の基礎を与へてくれるものと考へる。

私はかゝる意味に於て、こゝでダグラスの生産函数式を取上げて見たい。衆知の如く、ダグラス教授は製造工業に於て、その生産量は資本と労働だけの函数であると仮定して、次の如き定式化を試みた。

$$P=KL^{k}C^{1-k} \quad \text{（註３）}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

こゝでPは物量単位で測られた産出高であり、Lはその生産に使用された労働量、Cは同じく固定資本の量である。又K並びにkは統計的に定まる常数であつて、ダグラス教授はアメリカの製造工業の時系列資料に基き計算して次の如き値を得た。

$K = 1.01$

$k = 0.75$

このダグラス函数は、既に多くの批判（註4）を受け来つたのであるが、私は若干の修正を施すことにより、今なお生産関係を良く要約し得るものであると考へるのである。（註5）

従つて私はこゝで、ダグラスの生産函数式を次の如く表はして、之を生産の均衡という視点より分析せんとするものである。

$P=KL^{k}C^{j}$　但し　$O<k,\ j<1$　且$K>O$　……(2)（註6）

こゝでkとjとの和は必ずしもIでないとする。

この事は、ダグラス式の良く当てはまる生産の場に於ける生産の均衡分析に外ならないと考へるのである。

註(1)　こゝで言う対応関係とは必ずしも一義的な対応のみを意味してるのではない。

註(2)　今の所、数学的分析にとつて必要な条件は、生産函数が導函数を持つことであり、この条件は多分に微小分析の可能性、即ち変数たる各生産要素の可分性に依存する。私のこの分析に於ては、この可分性は仮定されるのであるが、このことは完全には現実的でない。

註(3)　ダグラスは生産函数式の形は、同次の一次式たるべきと仮定した。かゝるダグラスの考へは、H・シュルツが指摘している如く（H. Schultz; Marginal Productivity and General Pricing Process, J. P. E. Oct. 1929）彼の統計的研究に、理論的インスピレイションを与えたJ・B・クラーク並びにP・H・ウイックスティード等の限界生産力理論の影響下にあつたものと考へられ、且ダグラスは、同次の一次函数式採用の理由として、工業に於ては収益不変が特質である点を強調せんとして、収益逓増並びに収益逓減二つ乍ら工業生産にはふさはしくないことを指摘した即ち若しも工業に於て収益逓減が支配的であるならば、一人以上の企業は能率の上らぬものになり、社会は個人企業からのみ成立つことになるだろうし、若しも収益逓増が支配的であるならば、如何なる企業も無限にその生産規模を拡大することが出来、競争は不可能となり、独占が結果するであろう。而し乍ら工業社会は個人企業によつても、ユニバーサルな独占に依つても特徴づけられないが故に、収益不変が本質的であり、生産は一次の同次函数で表はさるべきものと結論した。

註(4)　批判の主たるものを挙げて見ると

(1)　L並びにCの指数の和を1としたこと、即ち函数式の形を一次の同次式たらしめたこと、従つて収益不変を前提としたことに対する理論的前提への批判である。この点に関し先づH・シュルツの批判を挙げると、前述せる如くダグラスの理論的前提となつていたJ・B・クラークやP・H・ウイックスティードの限界生産力理論は、L・ワルラス生産力理論の不完全な叙述であると述べ、而るが故にワルラスの生産力理論に対して彼が指摘したと同様な限界を持つと述べている。即ちL・ワルラスの限界生産力理論には次の仮定

一、商品に対する生産の係数はすべて変数である。
二、生産諸係数は唯一の函数関係により結ばれる。
三、いかなる一係数に於ける増加も、一つ或はそれ以上の他の係数に於ける減少により補はれなければならない。

があるとし、限界生産力理論が意味を持つのは、これらの仮定が現実化される時に於てのみであり、若しあるグループの生産係数が一つの方程式によつて結ばれ、他のグループの生産係数が他の方程式により結ばれる様な時には、生産要素は相互に独立に変り得ず限界生産力理論は失敗に帰

すると述べて居り、更にウイツクステイード自身、エッヂウオースやパレトーの批判により収益不変の前提を捨てた点を指摘している。(H. Schultz, Ibid)

次に、デユーランドの批判を挙げる。デユーランドは、ダグラスの前提には二つの理論的欠陥があるとして次の如く述べている。第一に、一次の同次函数式は最小費用で経営している競争的企業にとつては、完全に適当でない。一次の同次函数は、あらゆる条件の下で収益不変の状態で経営することを要求するが、最小費用の下ではかゝる状態は考へられないし、且又競争は企業の大きさに何等の効果ももたらさぬことになるであろう。第二に、同次の一次函数は工業全体には不適当である。たしかに或企業は収益不変の状態で経営しているかも知れない。而し乍ら吾々の社会には競争の名残も残つて居り、且吾々の工業社会が同じ状態で経営していると仮定する何等の理由もない。個々の企業への収益不変と、工業全体への収益不変とは全く別なことである。(D Durand; Some Thought on Marginal Productivity, with Special Refference to Professor Douglas' analysis, T. P. E., 1937)

(2) 次は統計的測定にからむ批判として第一にメンダースハウゼンによるものがある。之は前の批判点とも相関聯するのであるが、次の如く言つている。ダグラス函数の基礎には Pari passu law の仮定がある。従つて係数も現実性のあるなしにかゝはらず、その和が一と固定されている。この事は若しも現実が ultra passum law に支配されているならば失敗であり、どんな法則が存するかを知り得ない時には係数の決め方は全く勝手であるだろう。従つてダグラスの係数の和を一と固定した仮定は次の事を意味するであろう。

即ち、一八九九年から一九二二年の間に於けるアメリカ工業に何の技術的変化も起らず、又平均に於ける労働者の生産能率にも変化はなかつたと。而し乍らこれらは明らかに経済学者が、この期間に於ける工業発展に関して知つていることゝ矛盾すると述べ、更にダグラスの用いた資料に従つて Pari Passu law のないことを証明している。(H. Mendershausen; On the Significance of Professor Douglas' Productin Functin, Econometrica, april, 1938)

第二にはやはり同じメンダースハウゼンによつてなされた批判がある。即ち彼はダグラスの用いた資料に従つて指数の和が一であるとの仮定をおくことなしに log P の方向に誤差を集めて係数計算を行い $k=$〇・七六、$k'=$〇・二五を得た。人は之を以てダグラスの数値（$k=$〇・七五、$k'=$〇・二五）と殆んど同じであり、ダグラスの仮定は現実に存在してゐたと考へるかも知れぬが、更に詳細に之を見れば、この資料による三次元分布点は大体多共線的に分布されていることが分ると述べている。即ち彼は、三つの異つた方向 logP, logC, logL の方向に夫々最小化を行うことにより、三つの異つた係数を得た。即ち次の如くである。

最小化方向	k	k'
log P	0.76	0.25
log L	−1.06	−1.14
log C	2.23	−0.34

而して、各得られた係数を持つ方程式は、夫々高い多相関係数を持ち、データに良く当はまつている。この事より、分布点はむしろ一直線状に分布しているのであつて、一回帰平面を之に当はめることは無理である。一つの平面状に散在してこそ、その三次元分布より回帰平面の係数を決定することに意味があるのだと述べている。

(H. Mendershausen; Ibid.)

第三には、デューランドも又この点に関して次の如く述べている。ダグラスは彼の計算のデータへの適応の程度はPの実際値と計算値との間の相関係数が〇・九七という高い数字を示しているが故に妥当であるとするが、相関係数にあまり高い意義を認めることは危険であり、相関係数の高いことゝ共に、公式が、観察された結果を記述するのにユニークなものであることを示す必要があるとして、彼がダグラスのデータから計算した回帰平面の式

$$P=0.8675L+0.3143C-35.2$$

を示し、その相関係数は〇・九六九であるが、理論的にはこの公式は不完全であると指摘している。

(D. Durand; Ibid)

(3) 次の批判は時系列資料に適用する場合に生ずる困難に関する批判であつて、H・シュルツによりなされた。即ち、次の如く述べている。ダグラスの背後にあつた限界生産力理論は静態理論であつて、之を統計的に時系列によつて証明するためには、先づその時系列の長期趨勢を調整せねばならぬ。而らざる限り限界生産力理論に於て要求されている生産方程式の近似としては取られ得ない。ダグラスにはこの点の反省が欠けていた。(H. Schulz; Ibid)

註(5) H・シュルツも「ダグラス式は、多少の変更を加へることにより、静態的生産公式以上の意義を持つであろう。そのためには需要並びに供給曲線の統計的研究に於て用いられていた手法を参考にすることである」と述べている。

(H. Schulz; Ibid.)

註(6) ダグラス式は、その当初の形(1)に於ても、比較的現実の生産関係を表はし得ている様である。今その実例を二・三挙げて見ると

例一、両指数の和が一なることの例としては、篠原三代平氏の日本工業について計算した昭和四年から昭和十七年迄の平均 $k=0.62$, $k'=0.33$, $k+k'=0.95$ なる数字を挙げ得る。

例二、次に各指数は一次同次函数の前提の下で、該要素への相対的分前を示す（註7）ものであるが、kが工業所得中に占める賃銀俸給所得の割合に酷示している例として、篠原氏「雇傭と賃銀」の引用より再引用すれば、日本に於ては工業所得中の賃銀・俸給所得の割合はあまり計算されていないが、土方博士が昭和四年と昭和五年について計算しているので、その年に於ける篠原氏計算の k と比較して見ると次の如くである。

	k	賃銀・俸給/工業所得	k/k+k'
昭和四年	0.73	0.76	0.768
昭和五年	0.74	0.79	0.77

而し乍ら、前述の諸批判により明らかなる如く、両指数の和を一と固定しないことが、より一般的であると考へ得るので、私はこゝで「両指数の和は必ずしも一でない」としておきたい。この事はダグラスも又後年之を認めた所である。尙 $0<k,\ j<1$ なる条件は、k並びにjが各要素の生産への弾力性係数を示す（註8）ことから首肯し得るであろう。$K>0$ なる条件は而らざればPは常に負となつて不合理である。

註(7) ダグラス式に於ては、それが一次の同次函数であるとの条件の下で所謂オイラーの定理が成立つ。即ち

$$P=L\frac{\partial P}{\partial L}+C\frac{\partial P}{\partial C}$$

即ち労働と資本の分前は夫々 $L\frac{\partial P}{\partial L}$, $C\frac{\partial P}{\partial C}$ であつて

$$\frac{\partial P}{\partial L}=K\cdot k\cdot L^{k-1}C^{1-k}=\frac{Pk}{L}$$

$$\frac{\partial P}{\partial C}=k\cdot(1-k)\cdot L^{k}C^{-k}=\frac{P(1-k)}{C}$$

故に労働と資本の分前は夫々Pk, P(1−k)となりk並びに(1−k)は夫々の相対的分前を示す。

註(8) 前註の如く

$$\frac{\partial P}{\partial L}=\frac{kP}{L}$$

$$\frac{\partial P}{\partial C}=\frac{jP}{C}$$

故に夫々の弾力性は

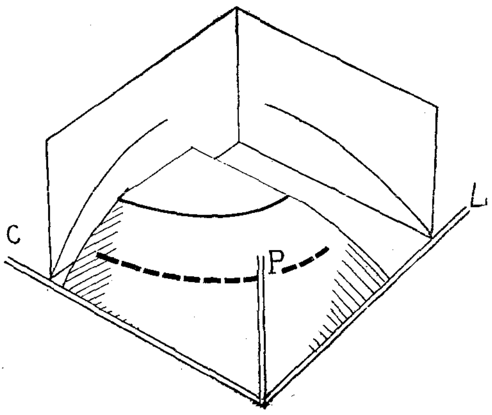
$$\frac{\partial P}{\partial L}\Big/\frac{P}{L}=k$$

$$\frac{\partial P}{\partial C}\Big/\frac{P}{C}=j$$

二、ダグラス生産函数の概観

ダグラスの生産函数は、L並びにCを夫々横軸・縦軸にとりPをL－C面に垂直な軸にとることにより、之等三つの値P、L・Cにより決まる各点の軌跡として、第一図の如き一つの曲面を表はすであろう。私はこゝで本分析に先立つてこの曲面の概要を考察して見たい。

第１圖



一、(2)式により明らかなる如く、L又はCび零の時はPも又零である。

二、L又はCを夫々一定値L_i又はC_iとおくと、換言すればL－P面又はL－C面に夫々垂直な平面でダグラス曲面を截ると、各次の如き方程式を有する交線を得るであろう。

即ち

$$P=KL_i^kC^j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

及び $$P=KL^kC_i^j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

今之等の式を次の如く簡単に書き代へることにする。

$$P=K_LC^j \quad 但し \quad K_L=KL_i^k \quad \cdots\cdots (5)$$

$$P=K_CL^k \quad 但し \quad K_C=KC_i^j \quad \cdots\cdots (6)$$

今之等の曲線の大凡の性質について、例を(6)にとつて説明して見ると

第2圖

(a) $L=0$の時には$P=0$である。

即ちカーブは原点より出発する。

(b) $$\frac{dP}{dL}=K_CkL^{k-1}>0$$

何故ならば

$$K_C(=KC_i^j)>0,\quad k>0,$$

$$L^{k-1}>0,$$

故にこの曲線はLに関する増加曲線である。

(c) $$\frac{d^2P}{dL^2}=K_C\ k(k-1)\ L^{k-2}<0$$

何故ならば

$$K_C>0,\quad k>0\quad k-1<0.\quad L^{k-2}>0,$$

即ち増加率は漸次減少して行くが故に、上に凸なる曲線となる。従つて之を図に示すならば第二図の如くになる。以上の曲線の性質は(5)式に関しても全く同様であつて、第一図は又、之等の曲線を曲面の切断による交線の後方スクーリンへの投影として表はしている。

三、次にPを一定とする時、換言せばL－C面に平行な平面で曲面を截る時に吾々は等高線として、次の如き曲線を得る。即ち$P=P_i$とおくことにより

$$P_i=KL^kC^j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

$$\therefore C^j=P^i/\overline{KL^k}$$

$$\therefore C=\left(\frac{P_i}{K}\right)^{\frac{1}{j}}\left(\frac{1}{L^k}\right)^{\frac{1}{j}}=K_P\frac{1}{L^m} \quad \cdots\cdots (8)$$

$$但し\begin{cases} K_P=\left(\dfrac{P^i}{K}\right)^{\frac{1}{j}} \\ m=\dfrac{k}{j} \end{cases}$$

この方程式の示す曲線の性質は凡そ次の如くである。

(a) $L\to 0$ の時 $C=K_P/L^m\to\infty$

$L\to\infty$ の時 $C\to 0$

(b) $$\frac{dC}{dL}=-mK_P/L^{m+1}<0$$

何故ならば

$$m\left(=-\frac{k}{j}\right)>0,\quad K_P>0,\quad L^{m+1}>0$$

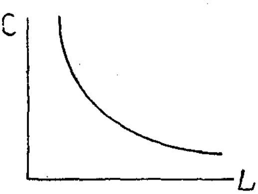
故にCはLに関する減少函数である。

(c) $$\frac{d^2C}{dL^2}=m(m+1)\ K^P/L^{m+2}>0$$

何故ならば

$$m>0,\quad (m+1)>0,\quad K^P>0,\quad L^{m+2}>0$$

即ち減少率の増加する減少函数であり、上に凹、換言せば原点に凸なる曲線となり、第三図の如き、L軸並びにC軸を漸近線とする双曲線である。第一図は又、この曲線を曲面の切断による交線のL−C面への投影として表はしている。



第3圖

四、次にP軸を含み、L軸と任意の角度をなしL−C面に垂直な平面で、曲面を截る時生ずる交線の方程式を求めて見よう。今P軸を含みL−C面に垂直な平面とL−C面との交線の方向係数をγとすると、この平面の方程式は次の如くになる。

$$C=\gamma L \qquad \cdots\cdots(9)$$

(9)を(2)に代入すると

$$P=KL^k(\gamma L)^j=K\cdot\gamma^j\cdot L^{k+j}=K_\gamma\cdot L^\sigma$$

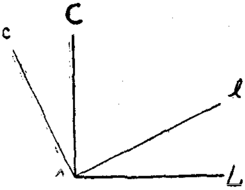
但し $$\begin{cases} K_\gamma=K\cdot\gamma^j \\ \sigma=k+j \end{cases} \qquad \cdots\cdots(10)$$

従つて求むる交線の方程式は次の如くである。

$$\begin{cases} P=K_\gamma\cdot L^\sigma \\ C=\gamma L \end{cases} \qquad \cdots\cdots(11)$$

更にこの方程式を $C=\gamma L$ 面上の方程式として表はして見るためにL−C面上で次の如き座標変換を試みる。即ち第四図の如くL−C座標を、平面$C=\gamma L$とL−C面との交線をl軸とする直角座標$l-c$座標に変換することにする。この場合L軸とl軸との交角をθとすると

$$\tan\theta=\gamma \qquad \cdots\cdots(12)$$



第4圖

従つてかゝる座標変換に於ける変換式は次によつて与へられる。

$$\begin{cases} P=P \\ L=l\cos\theta-c\ \sin\theta \\ C=l\sin\theta+c\ \cos\theta \end{cases} \qquad \cdots\cdots(13)$$

所で $\sin\theta=\dfrac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}$, $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$ なる故之を使つて、(13)を次の如く書き改める。

$$\begin{cases} P=P \\ L=\dfrac{l-\gamma c}{\sqrt{1+\gamma^2}} \\ C=\dfrac{\gamma l+c}{\sqrt{1+\gamma^2}} \end{cases} \qquad \cdots\cdots(14)$$

之と⑾に代入して

$$\begin{cases} P=K_\gamma\left(\dfrac{l-\gamma c}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right)^\sigma \\ \dfrac{\gamma l+c}{\sqrt{1+\gamma^2}}=\dfrac{\gamma l-\gamma^2 c}{\sqrt{1+\gamma^2}} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} P=K_\gamma\left(\dfrac{l-\gamma c}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right)^\sigma \\ c=0 \end{cases}$$

$$\therefore\ P=K_\gamma\left(\frac{l}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right)^\sigma=K'\cdot l^\sigma \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

但し　$K'=K_\gamma/(\sqrt{1+\gamma^2})^\sigma$

この方程式の示す曲線の性質は凡そ次の如くである。

(a)　$l=0$ の時は $P=0$ である。故に原点を通る。

(b)　$\dfrac{dP}{dl}=K'\cdot\sigma\cdot l^{\sigma-1}$

若し $\sigma\neq1$ ならば

$$\frac{dP}{dl}>0,$$

何故ならば　$K'(=K_\gamma/(\sqrt{1+\gamma^2})^\sigma)>0,\quad \sigma>0,\quad l^{\sigma-1}>0$

若しも $\sigma=1$ ならば

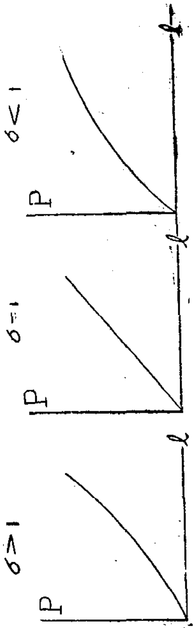
$$\frac{dP}{dl}=K'\cdot\sigma$$

即ち前の場合には P は l に関する増加曲線となり、後の場合には直線となる。

(c)　$\dfrac{d^2P}{dl^2}=K'\cdot\sigma(\sigma-1)\cdot l^{\sigma-2}$

$\sigma-1>0$ ならば

$$\frac{d^2P}{dl^2}>0$$



第 5 圖

何故ならば　$K'>0,\ \sigma>0,\ \sigma-1>0,\ l^{\sigma-2}>0$

$\sigma-1<0$ ならば　$\dfrac{d^2P}{dl^2}<0$

故に $\sigma \gtreqless 1$ に従つて、増加率の増大する増加曲線、直線、増加率の減少する増加曲線となる。以上の各々の場合に於ける曲線の状態を図に示したものが第五図に外ならない。而して之等は夫々、収益逓増の場合収益不変の場合、並びに収益逓減の場合を表はしていることは言う迄もない。

三、ダグラス生産函数の均衡

あらゆる生産の目的は、生産要素を投入することにより、その余剰を最大にすることに存すると考へる。

生産物並びに各生産要素の価格が与へられているとして、私はダグラス函数式が良く代表し得る生産に於て、その余剰を最大にする如き均衡の条件並びに各要素の使用量を見、更に生産物並びに各要素の価格の変動に、各要素の使用量が如何に対応するかを見んとするものである。このために先づ費用を生産物量で表はした方程式を導入する。今LとCを除いた残りの一切の費用をFCで表はす。而る時は $FC \gtreqless 0$ であるだろう。而して或る量のL並びにCを用いた時の総費用をTCで表はすと、それは次の如く表はされ得る。

$$TC = FC + \frac{P_L}{P_P}L + \frac{P_C}{P_P}C \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

但し P_P, P_L, P_C は夫々 P, L, C の価格（註一）

今此の方程式の示す各分布点の軌跡を作つて見ると第六図の如き平面となるであろう。

更にこの平面を前のダグラス曲面に対して施したと同様の考察を加へて見ると次の如き性質を有する平面となることが分る。

(1) $L=0$, $C=0$ の時は $TC = FC \gtreqless 0$

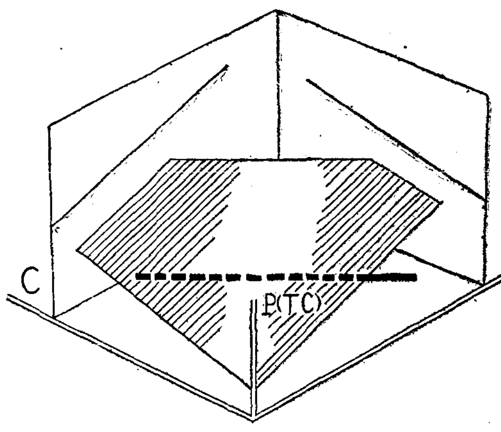
即ちP軸と高さ FC に於て交はる。

(2) $L = L_i$ 又は $C = C_i$ とおくと

$$TC = FC + \frac{P_L}{P_P}L_i + \frac{P_C}{P_P}C$$

$$TC = FC + \frac{P_L}{P_P}L + \frac{P_C}{P_P}C_i$$

之を次の如く簡略にする。



第6圖

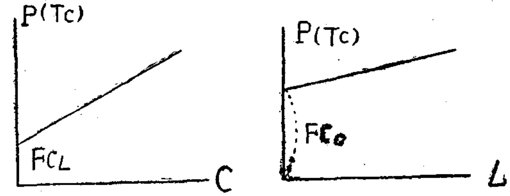
$$TC = FC_L + \frac{P_C}{P_P}C \quad 但し \quad FC_L = FC + \frac{P_L}{P_P}L_i \cdots\cdots (17)$$

$$TC = FC_C + \frac{P_L}{P_P}L \quad 但し \quad FC_C = FC + \frac{P_C}{P_P}C_i \cdots\cdots (18)$$

之等は第七図の如きP軸と夫々 FC_L, FC_C で交はり、夫々勾配が $\frac{P_C}{P_P}$, $\frac{P_L}{P_P}$ なる如き直線となる。

(3) TC を一定にして TC_i とおくと次の如き方程式得る

第 7 圖



$$TC_i = TC + \frac{P_L}{P_P}L + \frac{P_C}{P_P}C$$

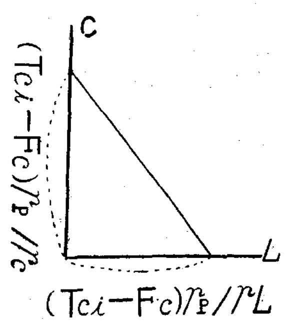
$$\therefore \frac{P_C}{P_P}C = TC_i - FC - \frac{P_L}{P_P}L$$

$$\therefore C = (TC_i - FC)\frac{P_P}{P_C} - \frac{P_L}{P_C}L \cdots\cdots(19)$$

この直線は第八図の如くC軸と$(TC_i - FC)\frac{P_P}{P_C}$でL軸と$(TC_i - FC)\frac{P_P}{P_L}$で交はり、勾配$-\frac{P_L}{P_C}$なる如き直線である。

以上第七図、第八図に示した直線は、夫々P−L面, P−C面, C−L面に垂直な平面で費用平面を截つた交線の、後方のスクリーン並びにC−L面への投影と考へられる。その関係は第六図に示されている。

第 8 圖



4　次にP軸を含みL軸とθなる角をなす平面との交線と求めて見ると次の如くである。勿論こゝでγを方向係数として

$$\tan\theta = \gamma$$

前述せる如くかゝる截平面は $C=\gamma L$ であるから、交線は

$$TC = FC + \frac{P_L}{P_P}L + \frac{P_C}{P_P}\gamma L$$

$$= FC + \frac{(P_L + \gamma P_C)}{P_P}L$$

故に

$$\begin{cases} TC = FC + \dfrac{(P_L + \gamma P_C)}{P_P}L \\ C = \gamma L \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

之に対して前述せる如き座標変換を行つて

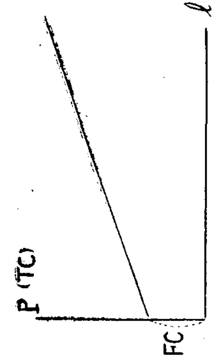
$$\begin{cases} TC = FC + \dfrac{(P_L + \gamma P_C)}{P_P}\dfrac{l - \gamma c}{\sqrt{1+\gamma^2}} \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad TC = FC + \frac{(P_L + \gamma P_C)}{P_p} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} l \cdots\cdots(21)$$

この式は明らかにその截平面上に於ける次の如き直線を示す。即ちP軸と FC で交はり、勾配$\frac{(P_L + \gamma P_C)}{P_p} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$なる如き直線である。之を図示すれば第九図の如くである。

次に分析に入らうと思うのであるが、その場合最初に一要素のみを生産量に関聯せしめて考察し、而る後に二要素共変の下に於ける考察に入ろうと思う。

第 9 圖



一、一要素の場合について考へるのであるが、例を(6)、(18)の式にとつて考へて見る。

即ち

$$P=K_C L^k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6')$$

$$P'\,(=TC)\;=FC+\frac{P_L}{P_p}L \cdots \quad \cdots\cdots\cdots(18')$$

前者は $C=C_i$ とおいた時のダグラス式による生産曲線であり、後者は $C=C_i$ とおいた時の費用直線である。而して前に見たる如く

$$\frac{dP}{dL}>0, \quad \frac{d^2P}{dL^2}>0$$

従つて増加率の次第に減少する増加函数即ち上方に凸なる曲線を示し、限界生産物低減の場合であつて均衡条件（註2）の第一を満たす。次に(6')の式に関するLの平均生産物を示す式を作つて見ると

$$\frac{P}{L}=K_C L^k/L=K_C L^{k-1} \cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

之を微分して

$$d\left(\frac{P}{L}\right)\Big/dL=K_C(k-1)L^{k-2}<0$$

何故ならば

$$K_C>0, \quad (k-1)<0, \quad L^{k-2}>0$$

即ち平均生産物も又低減的であつて、均衡条件の第二を満たしている。そこで次に第三の均衡条件を求めるべく、余剰を最大にする点を求めて見よう。

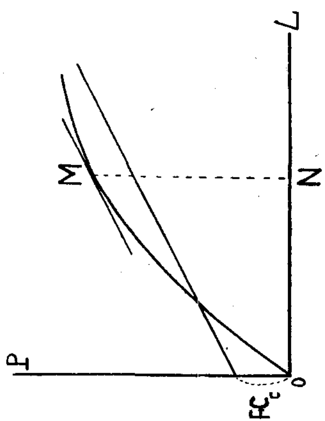
第十図は $C=C_i$ なる平面の切断により生ずる前記ダグラス曲面並びに費用平面との交線（6'）（18'）を図示したものである。今余剰生産物を SP で表はすと

$$SP=P-P'=K_C L^k-FC-\frac{P_L}{P_P}L \cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

故に SP の最大になる点は

$$d(SP)/dL=\frac{dP}{dL}-\frac{dP'}{dL}=K_C kL^{k-1}-\frac{P_L}{P_P}=0$$

第 10 圖



により求まるであらう。即ち

$$\frac{dP}{dL}=K_C kL^{k-1}=$$

$$=P_L/P_p=\frac{dP'}{dL}\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots(24)$$

を満足させる点である。それは曲線の切線が直線と平行になる点（図で点M）である。

従つてこの時の均衡条件は

$$\frac{dP}{dL}=\frac{P_L}{P_p} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

即ちLの限界生産物がLとPとの価格比に等しい事である。（註3）

而してこの均衡点に於けるLの均衡量は

$$K_C k L^{k-1}=P_L/P_p$$

$$\therefore\ L=(K_C k)^{1-k}\left(\frac{P_P}{P_L}\right)^{1-k}$$

によつて与へられる。（図ではON）

次にLやPの価格の変動により、均衡点がいかに変るかを考察して見よう。先づ図によつて（第十図）之を見るならば、直線の勾配 $\frac{P_L}{P_p}$ は P_L の上昇或は P_p の下降に依つて大となり、逆に P_L の下降 P_p の上昇によつて小となる。

従つて前者の場合には、均衡点Mは左下方に移動しONは小さくなる。後者の場合にはMは右上方に移動しONは大となる。即ち生産物価格の上昇又は労働価格の低下は、より少い労働量を使用する方向に均衡を移動せしめ、逆の場合はより多い労働使用の方向に均衡が動く、今之等の均衡移動の程度を詳しく見るならば次の如くである。P'_p, P'_L を夫々変動後の P, L の価格とすると

変動前に於ては

$$L=(P_p/P_L)^{1-k}\ \cdot\ (K_C k)^{1-k}$$

変動後に於ては

$$L'=(P'_p/P'_L)^{1-k}\ \cdot\ (K_C k)^{1-k}$$

但し　L′は変動後のLの使用量

$$\therefore\ L'/L=(P'_p/P'_L)^{1-k}/(P_p/P_L)^{1-k}$$

$$=\left(\frac{P'_p}{P_p}\right)^{1-k}\cdot(P_L/P'_L)^{1-k}$$

即ちLの使用量はPの価格の変動率 P'_p/P_p に比例し、Lの価格の変動率 P'_L/P_L に反比例する。而してこの場合に於ける比例・反比例の強さはLの生産への弾力性kが小なる程大である。

二、次にはL、C二要素が共に相関聯する時に於ける均衡の問題を考察して見よう。一定量 $P=P_i$ を生産するためのL、Cの組合せは数多くある。それらの中で如何なる組合はせを取れば余剰が最大とかなると言う問題が当然最初に考察されねばならない。而る後にそれら各 P_i に於ける最大余剰を与へるL、Cの中で如何なるL、Cの組が生産全体としての最大余剰を与へるかが考察されるであろう。

先づ或る一定生産量 P_i を産出する時に於ける均衡の問題を考へることにする。即ち今 $P=P_i$ とすることにより前述の(8)なる定生産量曲線

$$C=K_p/L^m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8')$$

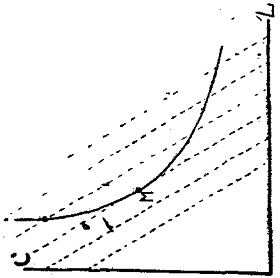
を得る。(8′) に於ては

$$\frac{dC}{dL}<0,\qquad \frac{d^2C}{dL^2}>0$$

従つて、之は原点に凸なる曲線、即ち限界代替率の漸増なる曲線である。従つて二要因の場合に於ける均衡の条件（註4）の一つを満たしているのである。次にこの場合の均衡を考えるために

(8′) なる等生産量曲線と共に生産費平面を多くの L—C 面に平行な平面で截つた線を、L—C 面に投影したと考へられる等費用直線群を併せ考へる。之等直線群の一つは総費用 TC_i となる如きC、L間の方程式(19)により表はされ、総費用 TC_i の増減による変るのは、両軸との交点の値即ちL切片、C切片のみで、勾配は常に一定値 $-\frac{P_L}{P_C}$ であるだろう。この両者を図示すれば第十一図の如くである。図に於て、等生産曲線と等費用直線群とのいくつかの交点は、生産量 P_i をあげるためのLとCの値の組を示し、且つその値の組に於ける費用の大小を示す。即ち図より明らかなる如く一定量 P_i の生産を挙げるためのL、Cの中で最小費用を与へるものは一番原点に近い組、即ち等生産量曲線に等費用直線が切する点（図でM）に於けるL、Cの組である。而して切点に於ては次の関係が成立するであろう。

第11圖



$$\frac{dC}{dL} = -\frac{P_L}{P_C}$$

$$\therefore \left|\frac{dC}{dL}\right| = \frac{P_L}{P_C} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

即ち均衡点に於ては、LとCの間の価格の比が、LとCとの間の限界代替率の絶対値（註5）に等しいという第三の均衡条件が出て来る。更に一般的に限界代替率は再要因の限界生産量を以て次の如く表はし得る。

$$\frac{dC}{dL} = -\frac{\partial P}{\partial L}\Big/\frac{\partial P}{\partial C} \quad \text{（註6）}$$

故に

$$\frac{\partial P}{\partial L}\Big/\frac{\partial P}{\partial C} = \frac{P_L}{P_C} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (27)$$

或は又

$$P_L\Big/\frac{\partial P}{\partial L} = P_C\Big/\frac{\partial P}{\partial C} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

従つて均衡の条件は又次の如くも言い得る。各要素の限界生産物の比は、それらの価格の比に等しい。或いは又各要素の価格と限界生産物との比は互に等しい。

次にかゝる均衡点に於けるL並びにCの均衡量を求めて見よう。

$$\frac{P_L}{P_C} = \frac{\partial P}{\partial L}\Big/\frac{\partial P}{\partial C}$$

$$= \frac{K \cdot k \cdot L^{k-1} C^j}{K \cdot j \cdot L^k C^{j-1}} = \frac{k}{j} \cdot \frac{C}{L}$$

$$\therefore \frac{C}{L} = \frac{P_L}{P_C} \cdot \frac{j}{k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

即ちCとLとの使用量の比は、夫々の価格の逆比と、夫々の弾力性の比の積に等しい。換言せば、それらの絶対的使用量が与へられたのでなく、その比のみが与へられることになる。而して P_L, P_C の価格の変動に伴つて、この関係が如何に変化するかを見ると、次の如くである。前の如く、P_L P_C は夫々 P_L' P_C' と変化

したとして、変化前の使用量の比は（29）の如くであり、変化後の使用量の比は

$$\frac{C'}{L'}=\frac{P_L'}{P_C'}\cdot\frac{j}{k}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

故に（30）を（29）で除して

$$\frac{C'}{L'}\Big/\frac{C}{L}=\frac{P_L'}{P_C'}\cdot\frac{j}{k}\Big/\frac{P_L}{P_C}\cdot\frac{i}{k}=\frac{P_L'}{P_L}\cdot\frac{P_C}{P_C'}\ \cdots(31)$$

即ち価格変動によるC、Lの使用量の比の変化はCの価格変動率$\left(\frac{P_C'}{P_C}\right)$に反比例し、Lの価格変動率$\left(\frac{P_L'}{P_L}\right)$に比例し、使用量の比の比はLの価格変動率とCの価格変動率の逆数の積に等しくなる。

次に生産全体として二要素変動下の均衡を考へて見ることにする。そのために先に分析した任意のP_iを生産する時に於ける均衡点の軌跡を考へて見るとそれは、次の如く直線となることが容易に分る。即ち（29）から

$$C=\frac{P_L}{P_C}\cdot\frac{j}{k}\,L\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

となり $\frac{P_L}{P_C}\cdot\frac{j}{k}$ 一定なる故、これを勾配とし原点を通る直線である。今この一定値をγとおくと

$$C=\gamma L\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

従つてこゝで問題にせんとしている生産全体に於ける最大余剰を示す点は、（33）なる軌跡上に於て C−L 面と直交する（勿論P軸を含む）平面が、ダグラス曲面を截る時生ずる交線上に存在せねばならぬ。かゝる交線の方程式は前述の如く

$$P=K'l^{\sigma}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15')$$

こゝで云う迄もなく、$K'=K\cdot\gamma^{j}/\left(\sqrt{1+\gamma^2}\right)^{\sigma}$　$\sigma=k+j$

lはL軸との角度がθ（$\tan\theta=\gamma$）なる新座標である。（15'）は前に見たる如く$\sigma\geqq1$の時は夫々増加率漸増の増加曲線並びに直線を示すので当然均衡点は存在しない。即ち生産を拡大することにより、ますます余剰を増加し得るのであつて、$\sigma<1$なる場合にのみかゝる均衡点を考察し得るのである。$\sigma<1$なる限り前述の如く

$$\frac{dP}{dl}>0,\qquad \frac{d^2P}{dl^2}<0.$$

即ち限界生産物低減の場合であり、又lに関する平均生産物を考へると

$$\frac{P}{l}=K'l^{\sigma-1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

$$\therefore\ d\left(\frac{P}{l}\right)\Big/dl=K'(\sigma-1)l^{\sigma-2}<0$$

何故ならば

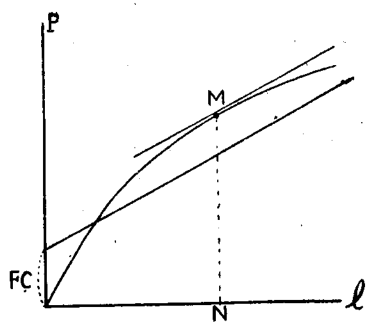
$$K'>0,\qquad (\sigma-1)>0,\qquad l^{\sigma-2}<0.$$

而してこゝでlに関する平均生産物とは、L並びにCの両者による平均生産物と考へることが出来るから、二要因に於ける均衡の第二条件平均生産費低減を満たしていることになるのである。そこで p−l 面に於て前の一要因のみの場合と同様の方法で、その

均衡条件並びに均衡値を求めて見る。

さて、ダグラス曲面を切断した平面が費用平面と交る交線の方程式は（21）の如くであつて、この両者を図に示して見れば第十二図の如くである。従つてその均衡点は、曲線の切線が直線と平行になる如き切点である。（図でM）故に次の関係が成立するであろう。

第12圖



$$\frac{dP}{dl}=\frac{P_L+\gamma P_C}{P_P}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (35)$$

而るにlとL、Cとの間には次の関係がある。

$$\begin{cases} L=l\,coo\theta \quad 但し \quad \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \\ C=l\sin\theta \quad\quad\quad \sin\theta=\dfrac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \end{cases} \quad \cdots\cdots (36)$$

従つて又次の関係がある。

$$\begin{cases} \dfrac{dl}{dL}=\dfrac{1}{coo\theta}=\sqrt{1+\gamma^2} \\ \dfrac{dl}{dC}=\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\gamma} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (37)$$

而して一方に於て

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dL}=\dfrac{dP}{dl}\cdot\dfrac{dl}{dL} \\ \dfrac{dP}{dC}=\dfrac{dP}{dl}\cdot\dfrac{dl}{dC} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (38)$$

であるから（35）,（37）,（38）に依つて次の式が得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha P}{\alpha L}=\dfrac{P_L+\gamma P_C}{P_P}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\cdot\sqrt{1+\gamma^2}=\dfrac{P_L+\gamma P_C}{P_P} \\ \dfrac{\alpha P}{\alpha C}=\dfrac{P_L+\gamma P_C}{P_P}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\gamma}=\dfrac{P_L+\gamma P_C}{\gamma P_P} \end{cases} \quad \cdots (39)$$

而して $\gamma=\dfrac{j\,P_L}{k\,P_C}$ なる故（39）は次の如くになる。

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dL}=P_P+\dfrac{jP_L}{kP_C}\cdot P_C \Big/ P_P=\dfrac{\sigma P_L}{kP_P} \\ \dfrac{dP}{dC}=P_L+\dfrac{jP_L}{kP_C}\cdot P_C \Big/ \dfrac{jP_LP_P}{kP_C}=\dfrac{\sigma P_C}{jP_P} \end{cases}$$

従つて

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dL}=\dfrac{\sigma}{k}\cdot\dfrac{P_L}{P_P} \\ \dfrac{\alpha P}{\alpha C}=\dfrac{\sigma}{j}\cdot\dfrac{P_C}{P_P} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (40)$$

即ち均衡点に於けるLの限界生産物は、両弾力性の和と、Lの弾

力性との比、並びにPの価格とLの価格との逆比の積に等しい

又Cの限界生産物は、両弾力性の和とCの弾力性の比、並びにPの価格とCの価格の逆比の積に等しい。之が二要因の下に於ける生産全体としての均衡条件である。

さて次にかゝる均衡点に於けるL、Cの均衡量を求めて見ると(40)から

$$\frac{dP}{dL}=\frac{\sigma}{k}\cdot\frac{P_L}{P_P} \quad \cdots\cdots (40')$$

而るに(38)から

$$\frac{dP}{dL}=\frac{dp}{dl}\cdot\frac{dl}{dL} \quad \cdots\cdots (38')$$

であつて且(37)から

$$\frac{dl}{dL}=\sqrt{1+\gamma^2} \quad \cdots\cdots (37')$$

又(15)或は(15′)から

$$\frac{dp}{dl}=K'\cdot\sigma\cdot l^{\sigma-1} \quad \cdots\cdots (41)$$

そこで(40′)，(38′)，(37′)，(41)から次の式を得る。

$$K'\cdot\sigma\cdot l^{\sigma-1}\sqrt{1+\gamma^2}=\frac{\sigma}{k}\cdot\frac{P_L}{P_P} \quad \cdots\cdots (42)$$

而して(36)から

$$l=\frac{L}{\cos}=L\sqrt{1+\gamma^2} \quad \cdots\cdots (43)$$

(43)を(42)に代入して

$$K'\cdot\sigma\cdot L^{\sigma-1}\left(\sqrt{1+\gamma^2}\right)^{\sigma}=\frac{\sigma}{k}\cdot\frac{P_L}{P_P}$$

故に

$$L^{\sigma-1}=\frac{\sigma P_L}{K'\cdot\sigma\cdot k\cdot P_P}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right)^{\sigma} \quad \cdots\cdots (44)$$

而るに

$$\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}=\frac{kP_C}{\sqrt{(kP_C)^2+(jP_L)^2}}$$

なる故、之を(44)に代入して

$$L^{\sigma-1}=\frac{1}{K'}\cdot\frac{P_L}{kP_P}\cdot\left(\frac{k\cdot P_C}{\sqrt{(kP_C)^2+(jP_L)^2}}\right)^{\sigma}$$

$$=\frac{1}{K'}\cdot\frac{P_L}{P_P}\cdot K^{\sigma-1}\cdot\left(\frac{P_C}{\sqrt{(kP_C)^2+(jP_L)^2}}\right)^{\sigma}$$

$$\therefore\ L=\left(\frac{1}{K'}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}\cdot\left(\frac{P_L}{P_P}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}\cdot k\cdot\left(\frac{P_C}{\sqrt{(kP_C)^2+(jP_L)^2}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$故にL=k\cdot K'^{\frac{1}{1-\sigma}}\cdot\left(\frac{P_P}{P_L}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\cdot\left(\frac{\sqrt{(kP_C)^2+(jP_L)^2}}{P_C}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \quad \cdots\cdots (45)$$

同様にして

$$C=j\cdot K'^{\frac{1}{1-\sigma}}\cdot\left(\frac{P_P}{P_C}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\left(\frac{\sqrt{(kP_C)^2+(jP_L)^2}}{P_L}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \quad \cdots\cdots (46)$$

即ちL並びにCの均衡量は(45)，(46)に依つて与へられる。従つて両式により明らかな如く、各要素の弾力性及びその和の大小又P、L、Cの夫々価格の大きさに依存して決まる。

最後に、之等の均衡量は、P、L、Cの価格の変動に応じて、どの様な動きを示すかを見るのであるが、それは後に示す如く、各要素、生産物の価格の変化率、両弾力性の和等に関する複雑な関係式によつて決まる。即ちL′/L，C′/Cを作つて見ると次の如くである。

$$L'/L=\left(\frac{P'_P}{P_P}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\cdot\left(\frac{P_L}{P'_L}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\left(\frac{P'_C}{P_C}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\left(\frac{\sqrt{(kP'_C)^2+(jP'_C)^2}}{\sqrt{(kP_C)^2+(jP_L)^2}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\quad\cdots(47)$$

$$C'/C=\left(\frac{P'_2}{P_P}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\cdot\left(\frac{P_C}{P'_C}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\left(\frac{P'_L}{P_L}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\left(\frac{\sqrt{(kP'_C)^2+(jP'_L)^2}}{\sqrt{(kP_C)^2+(jP_L)^2}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}.$$

従つて大体次の如く言へでろう。両者共 P の価格の変化率に比例し、自己の価格の変化率に反比例し、他の要素の価格の変化率比例する。而して、それらの比例の強さは、両弾力性の和が一に近ければ近い程大である。

註1　Lの価格を考へることは問題ないとしても、Pの価格を考へるに際しては次の点を考慮せねばなるまい。即ち単一商品生産の場合には、その価格を考へること出来るが、種々の商品生産の場合には、単に生産物の価格として価格を考へることは実際問題として困難である。而し乍ら物量Pを次の如く考へることによつてこの困難を克服し得るものと考える。即ち種々の生産物量を価格でウエイトした一つの中心生産物量への綜合指数と考へることである。Cの価格の点に関しても同様の困難の存する場合には、上述の調整を加へることにより、単一の形でCの価格を考へ得る。

註2　均衡条件はヒックスも指摘せる如く (J. R. Hicks; Value and Capital, An Inquiry into some Fundamental Principles of Economic Theory, Oxford, 1939 PP. 80–81.)

次の三点より之を見ることが出来る。即ち
1　極値が極小でなく極大であるために生産曲線が上方に凸なること。
2　余剰が正であること。このためには平均生産物が低減することを要す。
3　余剰を最大にすること。

註3　この場合には又次の如くになる。即ち (25) を書き変へて

$$\frac{dP}{dL}\cdot P_P=P_L\qquad 又は\qquad \frac{dL}{dP}\cdot P_L=P_P$$

即ち、Lの価格は限界収益に等しい。又Pの価格は限界生産費に等しい。

註4　ヒックスは一要因の場合の均衡条件に対応せしめて、二要因の場合については、次の如く考へている。(J. R. Hicks; Ibid. PP. 86–87.)

1　一生産要素の生産物への関係については限界生産物低減、二生産要素の間ではその限界代替率低減 (之はヒックス自身も述べてる如く限界代替率低増のことを低減と言つているのであり、その内容の理解のためには低増の方が勝つているのである。)

2　各生産要素の平均生産物低減、従つて各生産要素を一群と見做した場合に於ても、その全体としての平均生産物低減

3　一生産要素と生産物との価格比は、その生産要素の限界生産物に等しく、二つの生産要素の価格比は、その二要素の間の限界代替率に等し。

而して之等の条件中、1の前半、2の前半、3の前半は既に満されて居り、従つてこゝでは、1の後半、2の後半、3の後半の条件について検討を加へれば良いであらう。

註5　限界代替率は負値である。

註6　一般に　f (x, y) = cnstant なる時、之を微分すれば

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 \qquad \text{故に}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}$$

が成立する。

四、結　　言

以上によつて、ダグラス生産函数の均衡分析を終へるのであるが、その結論を述べて見ると、一要素の場合については

一、生産要素L或はCの価格と生産物Pの価格との比は、夫々の限界生産物に等しい時に均衡が成立する。即ち

$$\frac{dP}{dL}=\frac{P_L}{P_P} \qquad \frac{dP}{dC}=\frac{P_C}{P_P}$$

二、その時の各要素の均衡量は夫々次の式によつて与へられる

$$L=(K_C k)^{1-k}\left(\frac{P_P}{P_L}\right)^{1-k}$$

$$C=(K_L j)^{1-j}\left(\frac{P_P}{P_C}\right)^{1-j}$$

こゝで

$$K_C=KC_i$$
$$K_L=KL_i$$

三、各生産要素並りに生産物の価格の変動に従つて、各生産要素の使用量が P の価格の変動率に比例し、要素の価格の変動率に反比例する如く均衡点は変動する。而してその場合、その比例反比例の強度は夫々の弾力性の小なる程大である。即ち

$$L'/L=\left(\frac{P'_P}{P_P}\right)^{1-k} \quad (P_L/P_L')^{1-k}$$

$$C'/C=\left(\frac{P'_P}{P_P}\right)^{1-k} \quad (P_C/P_C')^{1-k}$$

L', C', P'_P, P'_L P'_C は夫々価格変動後の L, C, P_P, P_L, P_C である。

次に二要素の場合に於て、一定生産量を得るためには、

一、L、C両要素の間の価格比がそれらの間の限界代替率に等しい時に均衡が成立する。即ち

$$\frac{dC}{dL}=\frac{P_L}{P_C}$$

二、その時のLとCの均衡量は、その使用量の比が、次の式によつて与へられる。

$$\frac{C}{L}=\frac{P_L}{P_C}\cdot\frac{j}{k}$$

三、各要素価格の変動に伴つて均衡は次の如く変動する。即ち各要素の使用量は、自己の価格の変動率に反比例し、相手の価格の変動率に比例する。式で表はせば

$$C'/L'\Big/C/L=\frac{P_L'}{P_L}\cdot\frac{P_C}{P_C'}$$

最後に二要素の場合に於て、生産量をも変化せしめた時、均衡は $k+j<1$ の場合にのみ成立し、その状況は次の如くである。

一、両要素の弾力性の和と、或要素の弾力性との比、並びに該要素と生産物の価格比の相乗積が、その要素に関する限界生産物

に等しい時、均衡は成立する。

即ち

$$\frac{dP}{dL}=\frac{\sigma}{k}\cdot\frac{P_L}{P_P}$$

$$\frac{dP}{dC}=\frac{\sigma}{j}\cdot\frac{P_C}{P_P}$$

二、その時の均衡量は、夫々次の式により与へられる。

$$L=k\cdot K'^{\frac{1}{1-\sigma}}\cdot\left(\frac{P_P}{P_L}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\cdot\left(\frac{\sqrt{(kP_C)^2+(jP_L)^2}}{P_C}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

$$C=j\cdot K'^{\frac{1}{1-\sigma}}\cdot\left(\frac{P_P}{P_C}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\cdot\left(\frac{\sqrt{(kP_C)^2+(jP_L)^2}}{P_L}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

三、各要素並びに生産物の価格の変動に伴つて、均衡は次の式の如く変動する。

$$L'/L=(P'_P/P_P)^{\frac{1}{1-\sigma}}\cdot\left(\frac{P_L}{P_L'}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\left(\frac{P_C'}{P_L}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\left(\frac{\sqrt{(kP_C')^2+(jP_L')^2}}{\sqrt{(kP_C)^2+(jP_L)^2}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

$$C'/C=(P_P'/P_P)^{\frac{1}{1-\sigma}}\cdot\left(\frac{P_C}{P_C'}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\left(\frac{P_L'}{P_L}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\left(\frac{\sqrt{(kP_C')^2+(jP_L')^2}}{\sqrt{(kP_C)^2+(jP_L)^2}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$