非線形生産函數形について

京野禎一

目次

はじめに

生産函数とは、或産業に於て生産のために投入された生産要素と、それによつてもたらされる生産物との間の量的関係をあらはすものと考へてよい。かかる函数関係が設定されることによつて、はじめて生産経済に於ける諸種の問題に量的な解明を与へることが可能になる。

ところで、生産函数の一般的な形としては、Yを産出物、X_1 X_2 X_3……X_nを投入物とすると次の如くになり

$$Y = f\ (X_1, X_1, X_3, \cdots\cdots X_n)$$

且その具体的な形は、適用される産業の如何によつて相違してくるであらう。一般的に言つて生産函数は次の二つに大別して考へ得る。

一　線形生産函数

二　非線形生産函数或は、曲線形生産函数

前者は投入物の一定の増加は、常に一定の産出物の増加をもたらすとの基本的前提の下に容認される函数形であり、後者は一定の投入物の増加は、次第に逓減的或は逓増的な産出物の増加を予想する所に成立する。

農業生産に於ける投入物と産出物との関係は、周知の如き収穫逓減則の下に、後者の函数で示される関係なることは言ふ迄もない。

顧みて、生産函数による農業生産の諸分析があらはれて既にひさしいのであるが、その大部分はコッブ、ダグラス生産函数なる名の下での巾函数形が採用され、議論され、分析されて来たものである。勿論後述する如き指数函数形等が用ひられて分析が行はれた例もなしとしないが、その場合は殆んど肥料生産函数といふ形で提示されたに過ぎない。

思うに収穫逓減則の支配下での非線形生産函数形としては、単にコッブ・ダグラス形に止るものではなく、他のいくつかの可能な非線形生産函数形が考へられてよいはずである。勿論コッブ・ダグラスの形が多く採用されきつたについては、それなりの理由があるであろう。例へば、対数一次形であるために取扱ひ易い点、又パラメーターの持つ経済学的意味が明瞭で、分析に便利なる点等である、然しながら農業生産関係を規定する函数形として、如何なるものが用いらるべきかについては、前記の諸点以外にも考慮されてしかるべき観点が存するはずである。

私は本稿に於て、第一に農業生産函数として考へ得る非線形生産函数形を挙げて、それらの特質を挙げ、第二にそれら諸函数形の中の何れが選択採用さるべきかの判断基準に言及してみたいと考へる。

一　非線形生産函数形

先づ農業生産函数として考へらるべきいくつかの非線形生産函数形をあげて見る。その場合、投入物の増投に伴い、産出物は増加するが、その限界増分は次第に逓減して行く様な増加函数であることと、函数形があまり複雑な形にならぬことの二つの観点から、取上げて見ることとする。

（1）指数函数形

指数函数の最も基本的な形としては、次の如くである。

$$y = a.b^x$$

この函数は指数の底bが$\gtreqless$1なるに従って第一図に示す如き形となる。先づb＞1なる場合に、之をx軸に関して対称移動し、更にy軸に関して対称移動するならば、その時の函数形は

$$y = -a.b^{-x}$$

となり、従つて之を＋kだけ平行移動すると、その函数形は

$$y = K - a.b^{-x}$$

となり、第二図の如くになる。若しもその生産函数が原点を通ることが必要であるならば、即ち、投入零の時、産出も零であることが必要ならば、＋aだけの平行移動を行へばよい。その時函数は次の如くになるであろう。

$$y = a\ (1 - b^{-x})$$

b＞1の時には、之等の函数形が指数形生産函数の基本形となる。次にb＜1なる場合であるが、之をx軸に関して対称移動し、前の場合と同様＋Kだけ平行移動するとその時函数形は

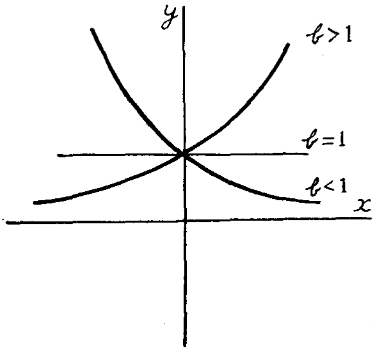
$$y = k - a.b^x$$

となり、第三図の如くになる。若しも、その函数形が原点を通る必要があるならば、＋aだけの平行移動を行へばよい。

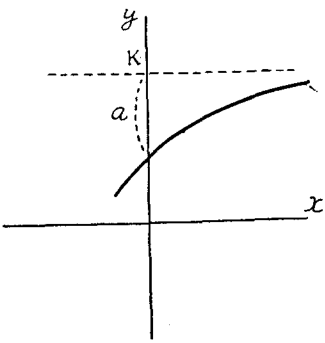
即ちその時は

$$y = a\ (1 - b^x)$$

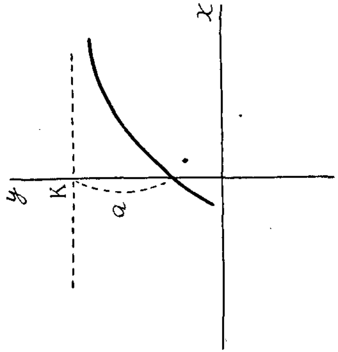
第一図



第二図



第三図



となるのである、従つて $b<1$ なる時には、以上の函数形が、指数形生産函数の基本形となるのである、若しも更に曲線の微小な差異を打出したいならば、前述の諸函数中の巾指数に更に定数を附加して

$$y = k - a.b^{-cx}, \qquad b>1$$
$$y = a\ (1 - b^{-cx}), \qquad b>1$$
$$y = k - a.b^{cx}, \qquad b<1$$
$$y = a\ (1 - b^{cx}), \qquad b<1$$

等の形に変へることも、当然可能となつて来る、次に之等の指数形生産函数のパラメーターの持つ意味についてであるが、先づ、K 或は a（原点を通る場合）は、$x \to \infty$ の時の y の値であつて、投入物を増投しつづけた時の達成可能な最大産出量である。 函数が原点を通らぬ場合の a は、投入量零の時の最大収量と、その時発生する産出量との差即ち、投入量無限大の時の、投入要素のみに帰せらるべき部分を示すものであり、最後に b は、最大収量と、その時々の産出量との差が次第に小さくなつて行く時の限界比を示している。

指数函数形が生産函数として用ひられる場合の基本的な形は以上の如くであるが、このタイプのもので、これ迄ともかく生産函数として使はれて来たものの主要なるものを指摘して見ると次の如くである。

I　W. Mitcherlich の生産函数

W. Winkler (一) によると、Mitcherlich は多くの肥料実験資料から、農産物の生産数量は、次の函数で示される曲線で表はされるものと考へた。

$$Y = A\ (1 - e^{-cx})$$

但し、y は生産数量、A は最大収量、e は自然対数の底、c は常数、x は肥料量

之は、肥料の追加的供給によりもたらされる収量の増加が、最大収量と到達されているその時の収量との差に比例することを実験によ

り確かめ、次の微分方程式を設定し

$$\frac{dy}{dx} = C\,(A - y)$$

之を解いて前記の函数形を導いたと言つている(2)。之は、私がさきに指数形生産函数の基本形として挙げたものと全く同一である。ただMitcherlichの場合には指数の底として自然対数の底が用いられているが、之は私の場合の a > 1 なる場合に該当する。

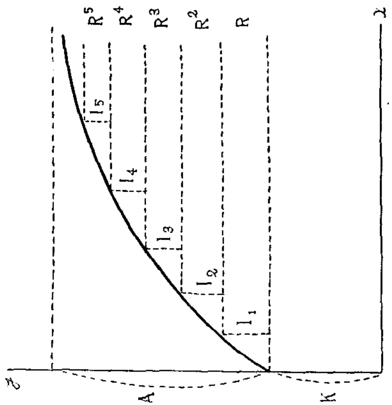
II　W. J. Spillman の生産函数

S. W. Mendum (3) によつて、Spillman 生産函数の概要を説明して見る、彼は肥料の投入実際に於て、次々と投入する肥料に対応する生産量の増分の比が、或一定値 R になつていることを確認し、$R + R^2 + \cdots\cdots + R^n$ が肥料投入によつてもたらされる総増加分に対応していることを確認して

$$y = M - AR^x$$

なる形の函数式を導いた。

第四図



但し、ここで y はエーカー当りの生産量、M は理論的最大値、A は投入零の時の M と Y との差、R は Y の継続的増分の間の比率（R < 1）で常数、x は肥料投入量

即ち第四図に示す如く肥料投入零の時の生産量を k とし、次々と投入される肥料によりもたらされる増分を $I_1, I_2, I_3, \cdots\cdots$ で表はし $\sum_{i=1}^{n} I_i = A$ とすると、今 x 単位の肥料投入に伴ふ生産量 y_x は次の如くになる。

$$y_x = I_1 + I_2 + \cdots\cdots + I_x$$

又一般に I_i は次の如く表はされるから

$$I_i = A \cdot \frac{R^i}{\sum_{1}^{n} R^i}$$

従つて

$$y_x = A\cdot\frac{R}{\sum_1^n R^i} + A\cdot\frac{R^2}{\sum_1^n R^i} + \cdots\cdots + A\cdot\frac{R^x}{\sum_1^n R^i}$$

$$= A\cdot R\frac{1-R^x}{1-R} \Big/ R\frac{1-R^n}{1-R} = A\cdot\frac{1-R^x}{1-R^n}$$

理論的には $n\to\infty$ の時を考へてよいから

$$\lim R^n = o$$

従つて　$y^x = A(1-R^x)$

肥料投入零の時の産出量も加へて肥料x単位投入の時の生産量は結局次の如くなる。

$$y = A(1-R^x) + k = M - AR^x$$

但し　$M = A + K$

之が Spillman の生産函数である。従つてこの Spillman 函数も $R<1$ で結局私の述べた指数形生産函数の基本形に外ならない。

Ⅲ　H.O.Hartley の生産函数

Hartley (5) の示した生産函数は次の形のものである。

$$y = \hat{y}(1 - Ce^{kx})$$

但し $\hat{y}$ は最大値、C は常数、e は自然対数の底、k は常数、x は投入量である。

この形は括弧を外して見れば分る通り、結局、Mitcherlich の形と、Spillman の形とが一緒になつたものであつて、ここでは之以上ふれないこととする。

次には以上の如き指数形生産函数の持つ性質をいくつか指摘しておきたい。

a　最大値即ち収斂値を持つこと。

b　negative marginality を持たないこと。

c　指数函数のパラーメーターに対して、有意性テストを施すことが可成り困難であること。

d　指数函数のパラメーターの持つ経済学的な意味が明瞭であること。

e　Constant marginality の仮定をもつていること。

以上の五点を指摘することが出来る(5)。

(2)　巾　函　数　形

巾函数の一般的な形を示して見ると次の如くである。

$$y = ax^b$$

之はa, bの大小関係により、種々の形態をとるのであるが、先づこの点を簡単に検当して見たい。

Ⅰ　$a>o$, $b>o$ ならば、$\frac{dy}{dx}>o$ となり、之は増加函数であつて、(イ) $b>1$ の時には $\frac{d^2y}{dx^2}>o$ となり第五図Aの如く、(ロ) $b=1$ の時には $\frac{dy}{dx}$ は一定 $\frac{d^2y}{dx^2}=o$ となり、第五図Bの如く直線となり、(ハ) $o<b<1$ の時には $\frac{d^2y}{dx^2}<o$ で第五図Cの如くになる。

Ⅱ　$a>o$. $b<o$ ならば $\frac{dy}{dx}<o$ となり減少函数であつて $\frac{d^2y}{dx^2}$ は常に負故第五図Dの如くになる。

Ⅲ　$a<o$. $b>o$ ならば $\frac{dy}{dx}<o$ で減少函数となり、(イ) $b>1$ の時には $\frac{d^2y}{dx^2}<o$ となつて、第五図Eの如く、(ロ) $b=1$ の時は $\frac{dy}{dx}$ は一定で且 $\frac{d^2y}{dx^2}=o$ となり、第五図Fの如く、(ハ) $o<b<1$ の時には、$\frac{d^2y}{dx^2}>o$ となり、第五図Gの如くになる。

Ⅲ　$a<o$, $b<o$ の時には $\frac{dy}{dx}>o$ で増加函数となり、又常に $\frac{d^2y}{dx^2}<o$ 故、第五図Hの如くになる。

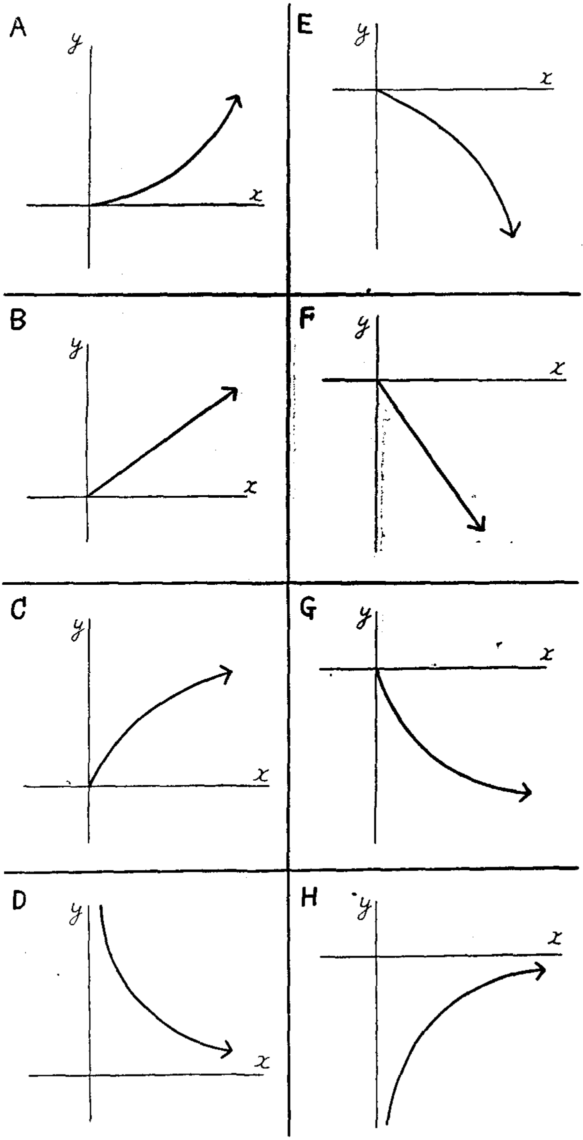
従つて巾函数が生産函数となり得るのは、$a>o$, $o<b<1$ なる場合に限られるのであつて、そのパラーメーターが、かかる条件を満たして居る時にのみ農業生産函数として採用され得るのである。

この函数形が生産函数として用いられたのは、周知の如く、コッブ・ダグラスによるのであつて、その形は、次の如くであつた。

$$Y = b x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \qquad \text{但し} \quad \alpha + \beta = 1$$

この場合bに関して何等の条件を附さず、又、$\alpha + \beta = 1$ なる条件は、ほぼ $0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$, なる条件を満たすものと考へられるが、厳密には $0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$ なる条件を附さねばならぬものと考へる。後になつて $\alpha + \beta = 1$ なる条件を外したのであるが、そのこと自体は妥当であるとしても、尚 $0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$ なる条件は附さるべきものと考へる。

第五図



次に、この巾函数の特徴をあげておくこととする。

a　最大値或は収斂値をもたないこと。

b　**Negative Marginality** をもたないこと。

c　対数一次形であること。

d　巾函数のパラメーターに対しては、有意性テストが可能であること。

e　巾函数のパラメーターの持つ経済学的意味が明瞭であること。

f　**Constant Elasticity** を仮定していること。

(3) 多項式型

多項式の中で農業生産函数形として考へられ得るものは、限界増分逓減的単調増加函数たるべき点より見て、次の二つの形のみであろう。その一つは二次函数形であり、他の一つは平方根函数形である。

I　二次函数形

この場合の一般的形は次の如くである。

$$y = a + bx + cx^2$$

然して、その第二次微分が負でなければならぬが故に $c < o$ なる条件が附せられねばならぬ。即ち $c < o$ なる場合にのみ、この函数形は農業生産函数として用いられ得る。

II　平方根函数形

その一般的な形は次の如くである。

$$y = a + b\sqrt{X} + CX$$

この場合に於ても、その第二次微分が負でなければならぬ故に、$b > o$ でなければならない。即ち $b > o$ なる場合にのみ、この函数は、農業生産函数として用いられ得るのである。

この種の函数も又生産函数特に肥料生産函数として使はれて来たものであり、P. R. Jonson (6) E. O. Heady (7) 等は、これらの函数特に平方根函数は、非常に当はまりの良い函数であると強調している。

次に之等の函数のもつ特性を挙げておく。

a　二次函数は、最大値は存するが収斂値はもたない。平方根函数に於ては、最大値、収斂値共にもつていない。

b　二次函数は negative marginaltiy をもつているが、平方根函数は持つていない。

c　二次函数のパラメーターも、平方根函数のパラメーターも共に有意性テストが可能である。

（4） 各函数形の一般化

以上の各函数形は一変数の場合であるが、之を多変数即ち投入物が多数の場合の形に一般化して見ると次の如くである。

I　指　数　函　数

$$y = k - ab^{-x}$$

を多変数の場合に書きかへると次の如くになる。

$$y = k\ (1 - a_1' b_1^{-x_1})\ (1 - a_2' b_2^{-x_2})\ (1 - a_3' b_3^{-x_3})\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

但し　$a'_i = \dfrac{a_i}{k}$

又　$y = a\ (1 - b^{-x})$ は

$$y = a\ (1 - b_1^{-x_1})\ (1 - b_2^{-x_2})\ (1 - b_3^{-x_3})\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

となり　$y = k - ab^{x}$ は

$$y = k\ (1 - a_1' b_1^{x_1})\ (1 - a_2' b_2^{x_2})\ (1 - a_3' b_3^{x_3})\ \cdots\cdots\cdots$$

但し　$a_i' = \dfrac{a_i}{k}$

となり　$y = a\ (1 - b^{x})$

は　$y = k(1 - b_1^{x_1})(1 - b_2^{x_2})(1 - b_3^{x_3})$ …………

となる。

II　従つて Mitcherlich の生産函数

$$y = A(1 - e^{-cx})$$

は　$y = A(1 - e^{-c_1x_1})(1 - e^{-c_2x_2})(1 - e^{-c_3x_3})$ …………

となり

III　Spillman の指数函数

$$y = M - AR^x$$

は　$y = M(1 - A_1' R_1^{x_1})(1 - A_2' R_2^{x_2})(1 - A_3' R_3^{x_3})$ …………

但し　$A_i' = \dfrac{A_i}{M}$

となる。

IV　次に巾函数の一般形は

$$y = a x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} \cdots\cdots$$

となり

V　二次函数の一般的な形としては、

$$y = a + bx_1 + cx_2 + dx_3 + \cdots\cdots + ex_1^2 + fx_2^2 + gx_3^2 + \cdots\cdots$$
$$+ hx_1x_2 + ix_2x_3 + \cdots\cdots$$

となる。又、

VI　平方根函数の一般形は（V）で $x = \sqrt{x}$ の置換へをした形となるであろう。

註(1) W. Winkler; Grundfragen der Ökonometrie, Wien, 1951.

Mitcherlich の生産函数は次の中に収められている。W. Mitcherlich; Die Bestinmung des Dungerbedürfnisses dcs Bodens, Berlin, 1930.

(2) $$\frac{dy}{dx} = e\ (A - y)$$

$$\frac{dy}{A-y} = c\ dx$$

$$\int \frac{1}{A-y}\, dy = c \int dx + C$$

$$-\log\ (A - y) = cx + C$$

$$-\log\ (A - y) = -\ (\log e^{-cx} + \log c^{-C})$$

$$-\log\ (A - y) = -\log e^{-cx} + \log e^{-C}$$

$$\therefore\ A - y = e^{-C}\ \ e^{-cx}$$

$$y = A - e^{-C}\ \ e^{-cx}$$

今 $e^{-C} = k$ とおくと

$$y = A - ke^{-cx}$$

$x = o$ の時, $y = o$ なる初期条件を与えて

$$k = A$$

従って $$y = A - Ae^{-cx} = A\ (1 - e^{-cx})$$

之が即ち, Mitcherlich の函数である。

(3) S. W. Mendum; A Device for Analyzing Yield, J. F. E., 1948, may.

尚 Spillman の生産函数は次のものに収められている。

W. J. Spillman; Use of the Experimental Yield Curve in Fertilizer Experiments, U. S. D. A. Tech. Bul. 348.

(4) H. O. Hartley; The Estimation of non-linear Parameters by Internal Least Sguares, Biometrica, 1948, Vol. 35., PP. 32〜45.

(5) 指数函数の変形として、この外にも例へば Logistic 函数 Gompertz 函数等の生長曲線あり、これらの函数も農業生産函数形として可能性のある形であるが、ここでは紙数の都合もあり、一応ふれないこととした。
(6) P. R. Jonson; alternativeFunctions for analyzing a fertilizer-yield Relationship, J. F. E., 1954, vol. 35.
(7) E. O. Heady and J. Pesek; A Fertilzer Producin Functions, J. F. E. 1954., vol. 35.
Heady; Economics of Agricultural Productin and Resource Use, New York, 1952.
E. L. Baum and E. O. Heady and J. Blackmore; methodolgical Procedures in the Econcmic Analysis of Fertilizer Use Data, 1956.

二　生産函数形選択の基準

ここでは、非線形生産函数形の何れが農業生産函数形として採用されるべきを考へる際の基準となるべき点についてふれて見たい。先づ第一に考慮しなければならぬのは、農業生産函数が考へられている場合の農業生産の特性に即して決定されねばならぬといふ点である。即ち同じ農業生産関係であつても、その時々の特殊相に即した函数形が選択されねばなるまい。一般的に言つて投入要素を次々と増投して行く時に、それに対応していくらでも産出量が増加して行くと考へることは必ずしも妥当でなく、増加はするが、その限界増分はどんどん小さくなり、次第に零に近づいて、総産出量は結局或一定の大きさに限りなく近づくと考へることが妥当ではなかろうか。

かかる意味に於ては、函数形としては、指数形のみが選ばれるべきであると言へる。或は又或種の肥料との関係を考へている場合には、肥料の投入によつて産出量は逓減的増加をするが、それが過度に投入される場合にはむしろ逆に限界増分は負となり、総産出量は減少し始めると考へられることもあろう。その様な時には函数形としては、むしろ二次函数を採用することが好ましい様に考へられる。

或は又、或投入要素を考へる場合には、その投入量零の時は産出量も零と考へるべきなのに対し、他の投入要素を考へる場合には、たとえその投入量零であつても、いくらかの産出量は実現されると考へなければならぬ様な事もあるであろう。ともかく、その時々の生産関係の実態に即して、最も合理的な生産函数形が用いられるべきである。之が農業生産函数形決定に当つて考慮されねばならぬ、第一の観点であると思ふ。

第二点としては、与へられた資料に種々の予想される函数形を当はめて見て、最も当はまりの程度の良い函数形が採用されるべきである。その当はまりの程度を測定するためには、推計の標準誤差に基づいた相関比或は重相関比を計算し、比較すればよいこととなる。然しながらここで考へておかねばならぬ点は、たまたま入手した資料に基いて函数当はめを行い、その当はまりの程度を測定し終へても、その資料に関してのみ最上の当はまりを示したものであつて、その限りでは、之を一般性にまで高めることは出来ないという事である。

即ち、その資料に関してはベスト・フイツトであるが、一般にその様な種類の生産関係に対してベスト・フイツトであるかは問題の存する所である、即ち、その函数形のパラメーター及び、その時の相関比の有意性検定が行はれねばならぬ。かくしてこそ、或有意水準の下で、その様な生産関係を最も良く表はす生産函数なりとの一般的立言が可能になるのである。更に附言しておかねばならぬことは有意性検定の方法は、精密な手法であるが故に、その適用も又精密、正確でなければならぬということである。思ふに有意性検定が意味をもつてくるのは、その数量関係に関する母集団の想定があることと、当面の資料が、その母集団からの無作為標本値であることの確認が前提とならねばならぬ。その様な資料の性質の吟味なくして、之を適用して一般的立言に及ぶことは、有意性検定法の誤用、拡張適用と言はねばならず、又、その結果もナンセンスなものであると考へる。

第三点としては、各函数のパラメーターの持つ意味が明瞭で且、経済的分析に有効である如き函数形が好ましいと考へる。各函数形のパラメーターの持つ意味は、先にふれた如くであり、従つて、当面の生産分析の目的に即して、函数形選択が行はるべきであろう。

第四点としては、第三点と密接な関聯をもつものであるが、各函数形には、かなり明瞭な前提のおかれたものがある。例へば指数函数に於ける **constant marginality** の前提、巾函数に於ける **constant elasticity** の前提等である。従つて函数形選択の際には、それらの函数形のもつ前提条件が容認される如き生産関係であるかどうかに考慮を払ふ必要があろう。

以上の四点が函数形選択の際に充分検当されねばならぬ問題点であると考へる。

おわりに

以上簡単に、農業生産函形として用い得る可能性をもつ非線形生産函数形をあげ、それらの函数形の中より、何れの形のものが用いらるべきかを考へる際の配慮されねばならぬ諸観点を指摘して来たのであるが、農業生産経済の定量分析がより合理的に逐行されるためには、この様な考察も又必須なものと考へる。加へて線形生産函数論が、リニヤ・プログラミングの理論に展開されている現在、非線型生産函数論も又新しい立場から見なほされてよいものと思ふ、その場合の足固めの一つにもなればと思つて、この拙稿をまとめて見た。