非線型計画法とその応用 (1)

—Quadratic Programming—

高　山　　崇

序

このペーパーは近来とみに実用化されてきた線型計画法（Linear programming）の拡張として非線型計画法（Non-linear programming）について論ずる。

非線型計画法は Kuhn,H.W., 及び Tucker, A.W〔1〕によつて最初に展開されたものである。

以後，非線計画法において，〔1〕に展開されたいわゆる Kuhn-Tucker の定理は基本定理と見なされている。この分野における体系的研究は Arrow, K., Hurwicz, L., Uzawa. H., による〔2〕を参照されたい。

非線型計画法はその具体的解法において数多くの困難な問題にぶつかる。これらの問題点については上掲〔2〕の11を参照されたい。最も具体的に追求され，解法があたえられうるのは二次形式計画（Quadratic programming）である。以下においての試論は二次形式計画（以下Q. P. と略す）についてである。

1.　経済における諸問題とQ. P.

経済における問題の多くは，その簡潔な形式においては，次のように要約しうる。

問題(Ⅰ); 制約条件　$f(x) \leqq 0$ のもとに，

　　　　　目的函数　$g(x)$ を最大化すること，

九五　問題(Ⅱ); 制約条件　$F(x) \geqq 0$ のもとに，

　　　　　目的函数　$G(x)$ を最小化すること，

問題（Ⅰ）の最も古典的な例は予算制限のもとに個人効用を最大化する消費の問題，及び資源制限のもとで利潤を最大化する生産の問題である。

問題（Ⅱ）は問題（Ⅰ）の相対の関係にあるもので，次のような例をあげることがで

きる。すなわち，ある水準の効用をあたえる最小予算の財の組合せをもとめること，及びある水準の産出量をあたえる最小費用の資源の組合せをもとめること。

これらの問題が農業経済の世界においても同様に広い適用領域をもつことは詳述するまでもない。

経済の諸問題が問題（Ⅰ），（Ⅱ）の形式をとることと，これらの形式をとる問題が有意な解をもつこととはまつたく別の問題である。後者の問題は，制約条件式及び目的函数がいかなる形式をとるかによつて強い制限をうける。このことは更に経済財，価格などの非負性によつてより強い制限性を附加される。

解析函数を利用する問題（Ⅰ），（Ⅱ）の処理は，ヒックス〔3〕にその好例を見出す。しかし，そこには経済財の非負性を保障するなんらの条件も存在しない。現実に多くの経済問題を解く場合に，上にあげた非負性の保障があたえられなければ，その解は実際的意味をもたぬものとなる。

この点に関して L. P. は上述せる最大化，最小化問題に関して，たとえそれらの解に対する第一次的近似であるにせよ，十分に実際的意味をもつ解をあたえるものである。

L. P. は次のように定式化される。

問題(M)；制約条件

$$\left.\begin{array}{l} x \geqq 0 \\ Ax \leqq b \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

のもとに目的函数

$$f(x) = px \qquad (1.2)$$

を最大化せよ。

問題(m)；制約条件

$$\left.\begin{array}{l} x \geqq 0 \\ Ax \geqq b \end{array}\right\} \qquad (1.3)$$

のもとに目的函数

$$f(x) = px \qquad (1.4)$$

を最小化せよ。

問題（M），問題（m）はさきの問題（Ⅰ），問題（Ⅱ）に対応するもので，Aは（m×n）行列，xは（n×Ⅰ）ベクトル，bは（m×Ⅰ）ベクトル，pは（Ⅰ×n）ベクトルである。 九四

問題（M），（m）はより簡潔に次のようにかかれる。

問題(M); Max $\left\{ px \mid x \geqq 0,\ \ Ax \leqq b \right\}$ (1.5)

問題(m); Min $\left\{ px \mid x \geqq 0\ \ Ax \leqq b \right\}$ (1.6)

いま，問題（M),（m）に解が存在して有限であれば，次の相対問題（M'),（m'）

問題（M'); Min$\left\{ ub \mid u \geqq 0,\ \ uA \leqq p \right\}$ （uは(Ｉ×m)ベクトル）（1.5'）

問題（m'); Max$\left\{ ub \mid u \geqq 0,\ \ uA \leqq p \right\}$ (1.6')

にも解が存在し，かつ

$$\mathrm{Max}\left\{ px \mid x \geqq 0,\ Ax \leqq b \right\} = \mathrm{Min}\left\{ ub \mid u \geqq 0,\ uA \geqq p \right\} \quad (1.5'')$$

$$\mathrm{Min}\left\{ px \mid x \geqq 0,\ Ax \geqq b \right\} = \mathrm{Max}\left\{ ub \mid u \geqq 0.\ uA \leqq p \right\} \quad (1.6'')$$

が成り立つ〔４〕。

この（1.5）以下のいわゆる相対定理はQ. P. の準備として重要である。再び現実的問題に立ち帰ろう。

いま制約条件は（1.1),（1.3）の形式で近似させる場合，目的函数が（1.1),（1.3）の形式をとらなければ，すなわち一般にｎ次（ｎは正整数かつ$n \geqq 1$）形式をとれば，いかにして解をもとめることができるか。Kuhn-Tucker の定理〔１〕は解の最大，最小のための必要十分条件をあたえ，一つの解法はいわゆるグラジエント法（Gradient method）によつて示される〔２〕。この場合，目的函数が凹（concave）であることが要請される〔５〕。しかし，目的函数が二次以上であれば，それが大域的（global）に凹である保証はえられないため，問題は複雑な様相を呈する。ここでこれらの具体的問題を取扱うことは差控える。

経済学のテキストによくみられる独占的競争の例は目的函数が（1.2）の形式をとらない場合の好例である。ある企業が多数の財を市場にだし，これらの財のそれぞれについての需要函数が（xiは第ｉ財の数量）

$$a_i - b_i x_i = p_i \ (i = 1,\ \cdots,\ n) \quad (1.7)$$

$$a_i \geqq 0,\ b_i \geqq 0$$

としてあたえられる場合を想定すれば，目的函数は，ある $b_i > 0$ に対して，二次形式となる。

農業経営においてもこれと同様なケースが考えられる。いま一応制約条件は(1.1)の形式をとるものとする。この場合に，畜産の生産活動（activity）考えよう。家畜の飼

養頭数を xj（j=n+1, …, m）とし，これらの一単位（一頭）よりえられる収益（net price）を pj とし総収益を目的函数

$$\psi(x)=\sum_j p_j x_j+\sum_i p_i x_i \qquad (1.8)$$

として最大化問題（M）を解く。このとき真の計画の決定は，この最終の最適解によつてあたえられる目的函数値より，家畜の償却費，畜舎，施設その他償却費（Dを）差引いた額を算出し，これを家畜を含まぬ最大化問題の最大目的函数値

$$f(\bar{x})=\sum_i p_i \overline{x_i} \qquad (1.9)$$

（ここに $\bar{x}$ は最適値（$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，…，$\bar{x}_n$）を示す。またの $\psi(\bar{x})$ の $\bar{x}$ は最適値（$\bar{x}_1$，…$\bar{x}_n$，$\bar{x}_{n+1}$，…，$\bar{x}_m$）を示す）と比較し

$$\psi(\bar{x})\ -D\ \gtreqless\ f(\bar{x}) \qquad (1.10)$$

の関係に応じ，i）家畜を導入する．ii）植産だけにするも，家畜を導入するも無差別の状態，iii）植産だけ，の経営を行うという迂路をへなければならない。

この計画法は家畜を導入した場合と，導入せぬ場合の二つの最大化問題を解かねばならない。これをさける方法はあるであろうか。

個別農家が1，2頭より5，6頭の乳牛を飼養する場合，その他の家畜をある規模で飼養する場合などを考えてみよう。乳牛1，2頭飼養の場合には畜舎，サイロなどの施設などの償却費は僅少で済ませることも可能である。しかし，3，4，5頭と飼養頭数が増せばいきほいそれらの償却費は増す。いまこの収益よりの差引き額が以上のように逓増する場合を考えよう。他の家畜についても同様のケースを考えよう。かくして，家畜一単位当りの収益（net price）を

$$a_j-b_j x_i=p_j\ (a_j,\ b_j \geqq 0)$$

をもつて近似的に表わす。かくして，この経営の目的函数は

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_i p_i x_i+\sum_j p_j x_i \\ &=\sum_i p_i x_i+\sum_i a_j x_j-\sum_j b_j x_j \qquad (1.11) \end{aligned}$$

九二

としてあたえられる。これは目的函数が二次形式を，制約条件が一次形式で示されるQ, P. の恰好の例である。

このQ. P. に解が存在し有限な場合に，この問題をどのようにして解くかを次に示す。

2. Q.P.のL.P.えの置き換え

Q. P. の問題は一般に次の形式でのべられる。

問題(M_1): 制約条件

$$\left.\begin{array}{ll} x_j \geqq 0 & (j=1, \cdots, n) \\ \sum_j A_{ij}x_j \leqq b_i & (i=1, \cdots, m) \end{array}\right\} \quad (2.1)$$

のもとで，concave な目的函数

$$f(x)=\sum_j p_jx_j-\sum_{j,k} x_jc_{jk}x_k \qquad (k=1, \cdots, n) \quad (2.2)$$

を最大化せよ，

問題(m_1)， 制約条件

$$\left.\begin{array}{l} x_j \geqq 0 \\ \sum A_{ij}x_j \geqq b_i \end{array}\right\} \quad (2.3)$$

のもとで，convex な目的函数

$$G(x)=\sum_{i,k} x_iC_{ik}x_k-\sum_i p_ix_i \quad (2.4)$$

を最小化せよ。

ここにxは（n×I）ベクトル，A，C，p及びbは（m×n)，（n×n)，（I×n）及び（m×1）マトリックスである。

簡潔な形に書きかえると次のごとくなる。

$$\text{問題}(M_1);\quad \mathrm{Max}\left\{ fx=px-xCx \;\middle|\; x\geqq 0,\ Ax\leqq b \right\} \quad (2.5)$$

$$\text{問題}(m_1);\quad \mathrm{Min}\left\{ G(x)=Cx-px \;\middle|\; x\geqq 0,\ Ax\geqq b \right\} \quad (2.6)$$

問題（m_1）は問題（M_1）と同様に解ける。このことはのちにふれることとし，ここでは問題（M_1）を主に論ずる。

われわれは問題（M）がいわゆるシンプレックス法によつて容易に解けることに留意し，Q. P. の問題L. P. 問題えの置き換えを試みよう。

九一

x_0が問題（M_1）の解となる必要十分条件は，目的函数が concavity の条件をみたすことに留意すれば，次のごとくである〔1〕，〔6〕。

$$\partial f(x_0)x_0=\mathrm{Max}\left\{ \partial f(x_0)x \;\middle|\; x\geqq 0,\ Ax\leqq b \right\} \quad (2.7)$$

第一節の相対定理によつて

$$\mathrm{Min}\left\{ub \;\middle|\; u \geqq 0,\ uA \leqq \partial f(xo)\right\} \tag{2.8}$$

が存在して，これら両者はひとしい。

それゆえ，x_0が問題（M_1）の解である必要十分条件は

$$\mathrm{Max}\left\{\partial f(x_0)x_0 - ub \;\middle|\; u \geqq 0,\ uA \geqq \partial f(xo)\right\} = 0 \tag{2.9}$$

となることである。

ここで

$$g(x,\ u) \equiv \partial f(x)x - ub = px - ub - 2x'Cx \tag{2.10}$$

と定義する。(2.7) と (2.9) によつて

$$g(x,\ u) = \partial f(x)x - ub \leqq uAx - ub = u(Ax - b) = 0 \tag{2.11}$$

これにより明らかなごとく，g (x, u) は上に有界で，その極値はゼロである。ここで（x，u）は (2.7)，(2.9)の制約条件をみたすもの，すなわち

$$\left.\begin{array}{l} x \geqq 0,\quad u \geqq 0 \\ Ax \leqq b,\ \partial f(x) \leqq uA \end{array}\right\} \tag{2.12}$$

を満足するものとする。

(2.12) は次のごとく書き改めることができる：

$$\left.\begin{array}{l} x \geqq 0,\quad u \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad v \geqq 0 \\ Ax + y = b \\ 2Cx + A'u' - v' = p' \end{array}\right\} \tag{2.13}$$

（y は（m×1）ベクトル，v は（m×1）ベクトル）

(2.13) を利用すれば (2.10) は次のごとく書き改められる：

$$g(x, u) = \partial f(x)x - ub = (uA - v)x - v(Ax + y) = -(vx + uy) \tag{2.14}$$

以上の展開より，問題（M_1）を解くことは次の問題（M_2）を解くことに帰着する。

問題(M_2)：制約条件，

$$\left.\begin{array}{l} x, v, y, v, \geqq 0 \\ Ax + y = b \\ 2Cx + A'u' - v' = p' \end{array}\right\} \tag{2.13}$$

のもとに，目的函数

$$g(x, u) = -(vx + uy) \leqq 0 \tag{2.14}$$

を最大化せよ。

同様にして問題（m_1）を解くことは問題（m_2）を解くことに帰着する。

九〇

問題（m_2）: 制約条件

$$\left.\begin{array}{l} x, u, y, v \geqq 0 \\ Ax - y = b \\ 2Cx + A'u' - v' = p' \end{array}\right\} \qquad (2.15)$$

のもとに，目的函数

$$g(x, u) = vx + uy \geqq 0 \qquad (2.16)$$

を最小化せよ。

問題（M_2）を解く場合，われわれにあたえられた目的函数は（1.2）のような簡単な形式をとらない。これをいかに処理するかが重要な問題である。まず問題（M_2）の解は，

$$g(x, u) = -(vx + uy) = 0$$

をみたす。このことは

$$x_j = 0 \text{ for } v_j \fallingdotseq 0, \quad yi = 0 \quad \text{for } u_i \fallingdotseq 0 \qquad (2.17)$$

を成立せしめる。すなわちより強く

$$vx = 0 \qquad (2.18)$$

の条件を附加することも可能であらう。〔6〕。

問題はまづ（2.16）をみたす feasible な解より出発し，（2.16）が最も速かに極値に達するよう各計算段階での解を構成してやることである。最初の feasible な解を $W =$（x^1, u^1, y^1, v^1）とし，これを（2.14）に代入する。つぎに

$$\nabla g(w^1) = (\partial g/\delta x^1,\ \partial g/\partial u^1,\ \partial g/\partial y^1,\ \partial g/\partial v^1) \qquad (2.19)$$

を計算し，$(\partial g/\partial x^1)$ を x^1 の各成分の net price,$(\partial g/\partial u^1)$, $(\partial g/\partial y^1)$, $(\partial g/\partial v^1)$ をそれぞれ u^1, y^1, v^1 の各成分の net price とみなして，以下シンプレックス規準に従つて計算を続け g（x,u）＝0 となる段階で計算は自動的に終了する。

3. 計　算　例

八九 問題とその計算の理解を容易ならしめるために計算例を示す。

問題(A)：

$$\left.\begin{array}{l} x_1,\ x_2 \geqq 0 \\ x_1 + 6x_2 \leqq 50 \\ 20x_1 + 70x_2 \leqq 600 \end{array}\right\} \qquad (3.1)$$

のもとに

$$f(x)=10x_1+50x_2-x_1^2-5x_2^2 \tag{3.2}$$

を最大化せよ。

この問題は次のごとくかきかえられる。

問題(A_1)，

$$\left.\begin{array}{l} x,\ y,\ u,\ v \geqq 0 \\ Ax+y=b \\ 2Cx+A'u'-v'=p' \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

のもとに

$$g(x,u)=-(vx+uy)\leqq 0 \tag{3.4}$$

を最大化せよ。

(3.3) は次のごとくあらわされる，

$$\begin{pmatrix} A & O & I & O \\ 2C & A' & O & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ u' \\ y \\ v' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ p \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

(3.5) をシンプレックス表示すれば次のようになる。以下でΣ，及びRの計算を省略する。

第一段階

C_i	$C_j\rightarrow$ Po	x_1	x_2	u_1	u_2	y_1	y_2	v_1	u_2
	50	1	6	0	0	1	0	0	0
	600	20	70	0	0	0	1	0	0
	10	2	0	1	20	0	0	−1	0
	50	0	10	6	7	0	0	0	−1

次にシンプレックスの基底解を y_1，y_2，v_1，v_2 をもつて構成してみる。

第二段階

$C_i\downarrow$	$C_j\rightarrow$ Po	x_1	x_0	u_1	u_2	y_1	y_2	u_1	u_2
y_1	50	1	6			1			
y_2	600	20	70				1		
u_1	10	2		1	20			−1	
v_2	50	12	−10		50			−6	1

ここで $g(x,u)$ を計算すれば

$$g(x,u)=-[v_1x_1+v_2x_2+u_1y_1+u_2y_2]$$
$$=-[(0)(0)+(10)(0)+(10)(50)+(0)(600)]=-500\angle 0$$

八八

また $\nabla g(w^1)=(\partial g/\partial x_1,\ \partial g/\partial x_2,\ \partial g/\partial u_1,\ \partial g/\partial u_2,\ \partial g/\partial y_1,\ \partial g/\partial y_2,\ \partial g/\partial U_1,\ \partial g/\partial v_2)$ は $\nabla g(w^1)=-[0,\ 10,\ 50,\ 600,\ 10,\ 0,\ 0,\ 0]$ となる。

これを第二段階の net price としてシンプレックス計算を続ける。

第二段階

C_i ↓	C_j →	Po	x_1	x_2	u_1	u_2	y_1	y_2	u_1	u_2
			0	-10	-50	-600	-10	0	0	0
-10	y_1	50	1	6			1			
0	y_2	600	20	70				1		
-50	u_1	10	2		1	20			-1	
0	v_2	10	12	-10		50			-6	1
	Z_j	-1,000	-110	-50	-50	-1,000	-10	0	50	0
	Z_j-C_j		-110	-40		-400	0	0	50	0

最終段階

C_i ↓	C_j →	P_0	x_1	x_2	u_1	u_2	y_1	y_2	v_1	v_2
			0	0	-15	-150	0	0	-5	-5
0	y_1	15			-4.1	-52	1		.5	.6
0	y_2	150			-5.2	-690		1	10	7
0	x_2	5		1	16	7				-.1
0	x_1	5	1		15	10			-.5	
	Z^j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Z_j - C_j		0	0	15	150	0	0	5	5

かくして

$$g(x, u)=-[(0)(5)+(0)(5)+(0)(15)+(0)(150)]=0$$

すなわち

八七

$$(x_1, x_2, u_1, u_2, y_1, y_2, v_1, v_2)=(5, 5, 0, 0, 15, 150, 0, 0)$$

が最適解である。

最小化問題は，以後，家畜飼料についての研究，作物施肥に関する研究などが精緻化されるにつれてとり上げられ Q. P. によつて処理される面が多くみられると思う。

結　び

Q. P. の実際的適用はこれまでしばしば行われてきたが，これらは電子計算機を利用したものであつた〔7〕。Q. P. のシンプレックス法による解法は，Q. P. に対するわれわれの desk computer による接近を一層容易にするであろう。

いまわれわれに要求されていることは新たな分析用具を実用化することだけに止らない。より重要なことは，これらの新たに開発されて行く分析手段を，そのあるべき位置に据え，これまでの学問体系を整序し，より実践的なものとし，かつ旧来の学問体系をかき改め，新たな体系を確立することである。農業経済学の体系はいつの日か新たな生命を吹き込まれねばならない。われわれは体系的であると同時に分析用具に精通すべく日々努力せねばならないのである。

〔1〕 Kuhn, H. W., and A. W. Tucker: : "Nonlinear programming," Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1951.

〔2〕 Arrow, K., L. Hurwicz, H. Uzawa: Studies in Linear and Non-linear Programming, Stanford, 1958.

〔3〕 Hicks, J. R. : Value and Capital, Oxford.

〔4〕 二階堂副包：現代経済学の数学的方法，岩波書店，1960.

〔5〕 函数 $f(x)$ が concave であるということは $0 \leqq \theta \leqq 1$，定義域に入る x, x_0 に対して $(1-\theta)f(x_0)+\theta f(x) \leqq f\{(1-\theta)x^0+x\}$ が成り立つことである。また $-f(x)$ が concave であれば $f(x)$ は convex である。

〔6〕 Wolfe, P.: "The Simplex Method for Quadratic Programming," Econometrica, Vol. 27, No. 3, 1959.
Wolfe, P., and M. Frank; An Algorithm for Quadratic Programming," Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 3, Nos, 1 and 2, 1956.

〔7〕 Freund, R. J. "The Introduction of Risk into a Programmig Model," Econometrica, Vol 24, 1956.