消費者行動の分析

——効用独立下における需要弾性値推定法の経済学的検討及び経験的資料への適用——

矢島　武
佐々木　康三

I　はじめに

消費者行動分析の主要な目的は，(1)家計支出の合理的な整序及び消費者に関する経済厚生の増進と均等化，並びに(2)消費者の市場行動として導出される需要関係を把え且つ所与の市場条件の下に諸財及び諸用役の需要量を予測することである。第一の目的を消費者計画，第二の目的を消費者需要分析と呼べば，本稿の目的は主として後者を取扱うものである。

消費者需要分析は需要予測或いは市場開発の問題として古くから研究され，高度な理論及び方法論の展開が行なわれた。消費者行動の理論は主に解析学を基礎として理論の展開・進歩に著しいものがあるが，これらの理論に沿って消費者の市場行動を把えるまでには未だ種々の困難が残されている。また実証的な消費・需要分析においては統計的手法の適用を中心として消費構造及び消費財需要に関する分析が行なわれているが，分析手法及び利用可能な経済資料の不備その他の障碍が消費・需要構造を詳細且つ体系的に把握することを妨げている。特に横断面分析において価格弾性値を推定する場合，諸財間における需要の代替，補完が重要な場合，更に時系列的分析において系列相関が顕著な場合には，統計的需要分析は極めて大きな困難に当面する。

本稿においてはこのような統計的需要分析の欠陥を克服し，同時に現実の消費者行動に関する詳細且つ包括的な分析を行なうために，R. フリッシュが効用独立の概念を巧みに援用することによって導出した理論①を検討する。

註① R. Frisch, "A Complete Scheme for Computing All Direct and Cross Demand Elasticities in a Model with Many Sectors," Econometrica, vol. 27, No.2-April, 1959

更に日本における具体的な資料を対象にして，彼の理論を適用し，その経済学的意味を検討する。

効用独立の概念は需要独立の概念と一見極めて類似した表現をとっているが，その経済学的意義は全く異なるものである。それは，ある財の限界効用がその財の消費量にのみ依存し，他財の消費量に依存しないことを意味する。幾何学的には無差別曲線が原点に凸であることを意味する。鍵状の特異な無差別曲線を意味する需要独立の概念とは異なり，極めて普通的な概念であることが知られる。

フリツシユの理論は横断面分析に有効に適用することが出来る。彼は需要の価格弾性値を支出比率及び需要の所得弾性値より導くことを考えた。効用が諸財に関して互に独立であるとき，上の3つのパラメーター相互間の有機的な関係が限界所得効用の所得弾性値を媒介にして確定される。従って価格弾性値を他の3つのパラメーターから導出することが可能である。

先ず i) エンゲル集計，ii) クールノー集計，iii) 限界財効用の財弾性値，及び iv) 需要の限界財効用弾性値の諸性質と均衡条件を用いて，限界所得効用の弾性値と需要の弾性値との諸関係を導く。更に効用指標函数の解析函数的性質と効用独立の概念を有機的に援用することによって，需要の価格弾性値は i) 支出比率，ii) 需要の所得弾性値，iii) 限界所得効用の所得弾性値，及び iv) 需要の限界財効用弾性値によって与えられる。効用独立下においては，需要の交叉限界財効用弾性値が0となり直接限界財効用弾性値は需要の所得弾性値と限界所得効用の所得弾性値によって決定される。

このように価格弾性値は i) 支出比率，ii) 需要の所得弾性値，iii) 限界所得効用の所得弾性値の3つのパラメーターによって最終的に決定される。

Ⅱ　フリツシユの方法の理論的検討

同一選好尺度をもつと考えられる集団の行動は，効用指標函数を用いることによってある代表的個人の行動として置換える。諸財の消費量を $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$，効用指標函数を次のように記す。

(1)　$U\ (X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$

対応する価格を各々 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，所得（総支出）を a で表わせば，予算方程式は次のように示される。

(2)　$P_1 X_1 + P_2 X_2 + \cdots\cdots + P_n X_n = a$

いま諸財の価格及び所得が総て所与であるとすれば，消費者均衡は予算方程式(2)と下記の均衡条件によって決まる。

(3) $\dfrac{U_1}{P_1}=\dfrac{U_2}{P_2}=\cdots=\dfrac{U_n}{P_n}$

但し,

(4) $U_k=\dfrac{\partial U(X_1,\cdots,X_n)}{\partial X_k}$, $(k=1,2,\cdots,n)$

これら二条件において,未知数の数と方程式の数が共に n 箇で相等しいから,未知数即ち需要量を価格及び所得の函数として次のように提示することが可能である。

(5) $X_i=\psi_i(P_1,P_2,\cdots,P_n,a)$, $(i=1,2,\cdots,n)$

需要の価格弾性値は

(6) $e_{ik}=\dfrac{\partial\psi_i(P_1,\cdots,P_n,a)}{\partial P_k}\cdot\dfrac{P_k}{\psi_i(P_1,\cdots,P_n,a)}$, (他の総ての価格及び所得は所与).

$i=k$ の場合は直接価格弾性値, $i\neq k$ の場合は交叉価格弾性値と呼ぶ。また所得弾性値は

(7) $Ei=\dfrac{\partial\psi_i(P_1,\cdots,P_n,a)}{\partial a}\cdot\dfrac{a}{\varphi_i(P_1,\cdots,P_n,a)}$, (総ての価格は所与).

支出比率は

(8) $\alpha_i=P_i X_i/a$

一般的に需要の弾性値間には下記の五つの基本的な諸関係がある。即ち,

(9) $\sum_{s=1}^{n}\alpha_s E_s=1$ (エンゲル集計)②

(10) $\sum_{s=1}^{n}\alpha_s e_{sk}=-\alpha_k$ (k 財に関するクールノー集計)③

(11) $\sum_{s=1}^{n}e_{is}=-E_i$ (i 財に関する同次条件)④

(12) $E_i+e_{ik}/\alpha_k=E_k+e_{ki}/\alpha_i$ (対称関係)⑤

又は, $\alpha_i e_{ik}-\alpha_k e_{ki}=-\alpha_i\alpha_k\ (E_i-E_k)$

(13) $\dfrac{\partial e_{ii}}{\partial log a}=\dfrac{\partial E_i}{\partial log\, p_i}$ (双対関係)⑥

註② 予算方程式の両辺を所得に関して偏微分し表現を換えることにより求まる。

註③ 予算方程式の両辺を P_k に関して偏微分し両辺に P_k/a を乗ずる。

註④ 零次の同次式にオイラーの定理を適用する。

註⑤ 効用指標函数の第二次偏導函数が連続である性質(ヘッセの行列の対称性)を用いると,スルッキー弾性値 $\varepsilon_{ik}=e_{ik}+E_i\alpha_k$ を α_k で除したものは i,k について対称である。$\left[\varepsilon_{ik}=\left(\dfrac{\partial X_i}{\partial P_k}\cdot\dfrac{P_k}{X_i}\right)_{\bar{u}}\right]$。

註⑥ 第2次偏導函数が連続のとき,

$$\frac{\partial e_{ii}}{\partial log a}=\frac{\partial^2 log\,\varphi_i(P_1,\cdots,P_n,a)}{\partial log P_i\ \partial log a}=\frac{\partial^2 log\,\varphi_i(P_1,\cdots,P_n,a)}{\partial log a log P_i}=\frac{\partial E_i}{\partial log P_i}$$

エンゲル集計は各財の所得弾性値をその財の支出比率で加重したものの総和が1であること，クールノー集計はある財の価格に関する直接，交叉価格弾性値の総てにその財の支出比率を加重したものの総和がその支出比率の負の値に等しいことである。同次条件は各財について直接，交叉価格弾性値の総和が所得弾性値の負の値と相等しいこと，換言すれば(2)と(3)から分るように総ての価格及び所得が同一比率で増加または減少するとき需要量は変化しないことを意味する。対称関係は，効用指標函数の第二次偏導函数が連続であること⑦即ちヘッセの行列式が対称であるという性質より，i 財の所得弾性値と，k 財の価格に関する i 財の価格弾性値を k 財の支出比率で除したものとの和は，k 財の所得弾性値と i 財の価格に関する k 財の価格弾性値を i 財の支出比率で除したものとの和に等しいことである。双対関係については，i 財の価格及び所得がそれぞれ微小変化するとき，所得の対数値の変分に対する i 財の直接価格弾性値の変分の比は価格の対数値の変分に対する i 財の所得弾性値の変分の比と相等しいことである。

限界所得効用⑧ ω は(3)における共通の比率として表現される。

(14) $\dfrac{U_1}{P_1}=\dfrac{U_2}{P_2}=\cdots=\dfrac{U_n}{P_n}=\omega$ 即ち $U_i=\omega P_i$

ω は次の関係をもつ。

$$\omega=\frac{\partial U\{\varphi_1(P_1,\cdots,P_n,a),\cdots,\varphi_n(P_1,\cdots,P_n,a)\}}{\partial a}=\varphi_{n+1}(P_1,\cdots,P_n,a)$$

ここで φ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ は X_i を $P_1,\cdots,P_n,a$ の函数として表わしたものである。諸財の限界効用函数(4)を考慮し

(16) $U_i=U_i\ (X_1,\cdots,X_n)$

これら n 箇の方程式体系に関して逆函数体系が存在することを考え次のように表示する。

(17) $X_i=X_i\ (U_1,\cdots,U_n)$

上記の二式(16)，(17)について2つの弾力性概念を定義する。即ち，

(18) $U_{ik}=\dfrac{\partial U_i(X_1,\cdots,X_n)}{\partial X_k}\cdot\dfrac{X_k}{U_i(X_1,\cdots,X_n)}$, (限界財効用の財弾性値).

(19) $X_{ik}=\dfrac{\partial X_i(U_1,\cdots,U_n)}{\partial U_k}\cdot\dfrac{U_k}{X_i(U_1,\cdots,U_n)}$, (需要の限界財効用弾性値).

註⑦ 指標函数が連続である意味は，価格，所得の変化に対して需要量の変動が相対的に弾力的であること，逆に不連続，屈折のときは需要量が硬直的である。

註⑧ ω は指標函数の単調増加函数による変換によって変る性質をもっから基数的効用の概念である。$\left[\dfrac{\partial\Psi(U)}{\partial a}=\Psi'\omega\right]$。

ここで留意すべきことはこれら2つの弾力性概念が指標函数の一般的な変換によって変わる性質をもっているが，第2次導函数が0と等しくなるような単調増加函数による変換には影響を受けないことである。⑨従って以下に展開される理論は初期の効用指標函数及びその任意な一次増加函数による変換指標に基く理論である。⑩フリッシュは上記の事実に言及することなく単に一般的な効用指標函数を考慮することによって理論を展開している。これら2つの弾力性は消費者行動の理論において一般的な概念ではないが，実際には極めて有用な意味をもっている。例えば，i 財の限界効用は k 財の消費量に関して弾力的か否か，また k 財の限界効用をある量だけ変化させるには（他を一定として），i 財の消費量をどれだけ変化させねばならないかというような問題に解答を与える。

上記の2つの弾性値間の関係を調べるために，(17)を考慮に入れて(16)を U_k に関して偏微分すれば，

(20) $$\frac{\partial U_i}{\partial U_k}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial U_i}{\partial X_s}\cdot\frac{\partial X_s}{\partial U_k}=\sum_{s=1}^{n}U_{is}\,X_{sk}=\delta_{ik},$$ ⑪

(21) $$\delta_{ik}\ (\text{クロネッカーのデルタ})=\begin{cases}1 & (i=k)\\ 0 & (i\neq k)\end{cases}.$$

(20)は行列〔U_{is}〕が行列〔X_{st}〕の逆行列であることを示している。

また限界所得効用の所得及び価格弾性値は次のように表わされる。⑫

(22) $$\hat{\omega}=\frac{\partial\omega}{\partial a}\cdot\frac{a}{\omega},\ (\text{総ての価格は所与}),\ \left(\begin{array}{l}\text{限界所得効用}\\ \text{の所得弾性値}\end{array}\right),$$

$$\omega_k=\frac{\partial\omega}{\partial P_k}\cdot\frac{P_k}{\omega},\ \left(\begin{array}{l}\text{他の総ての価格}\\ \text{及び所得は一定}\end{array}\right),\ \left(\begin{array}{l}\text{限界所得効用の}\\ \text{価格弾性値}\end{array}\right).$$

これら二つの弾性値は需要の弾性値と下記のような関連がある。

註⑨ $$\frac{\partial\Psi_i}{\partial X_k}\cdot\frac{X_k}{\Psi_i}=\frac{\Psi''U_k\,X_k}{\Psi'}+\frac{\partial U_i}{\partial X_k}\,\frac{X_k}{U_i}$$
$$\neq\frac{\partial U_i}{\partial X_k}\,\frac{X_k}{U_i},\ (\Psi''\neq 0\,;\,U_i>0\text{のとき});$$
$$\frac{\partial X_k}{\partial\Psi_i}\cdot\frac{\Psi_i}{X_k}=\frac{1}{\dfrac{\Psi''U_k\,X_k}{\Psi'}+\dfrac{\partial U_i}{\partial X_k}\,\dfrac{X_k}{U_i}}\neq\frac{\partial X_k}{\partial U_i}\,\frac{U_i}{X_k},\ (\Psi''\neq 0\,;\,u_i>0).$$

註⑩ 指標函数の一般的変換を可能とすることが消費者行動の理論を貫く概念である。

註⑪ $$\frac{\partial U_i}{\partial U_k}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial U_i}{\partial X_s}\cdot\frac{\partial X_s}{\partial U_k},\quad\frac{\partial U_i}{\partial U_k}=\delta_{ik}$$
$$\therefore\ \frac{U_i}{U_k}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial U_i}{\partial X_s}\,\frac{\partial X_s}{\partial U_k}\,\frac{X_s}{U_i}\,\frac{U_k}{X_s}=\delta_{ik}$$

註⑫ $\hat{\omega}$，ω_k は指標函数の一般的変換に耐えうる性質をもたない。変換指標 Ψ に対応する限界所得効用を Ω で記すと，

(23) $\hat{\omega}=\sum_{s=1}^{n} U_{is}E_s,$ ⑬

(24) $\omega_k=\sum_{s=1}^{n} U_{is}\, e_{sk}-\delta_{ik},$ ⑭

(23)と(24)を E_s と e_{sk} について各々解けば，⑮

(25) $E_s=\hat{\omega}\sum_{i=1}^{n} X_{si},$

(26) $e_{sk}=\omega_k\sum_{i=1}^{n} X_{si}+X_{sk}.$

(25)より次の二式を得る。

(27) $\alpha_s E_s=\alpha_s\hat{\omega}\sum_{i=1}^{n} X_{si};\ \sum_{s=1}^{n}\alpha_s E_s=\hat{\omega}\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_s X_{si}.$

(27)の第二式と(9)より

(28) $$\hat{\omega}=\frac{1}{\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_s X_{si}}\ .$$

(10)の左辺に(26)を代入して，⑯

(29) $\omega_k=\left(\alpha_k+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s X_{sk}\right)\hat{\omega}.$

(26)に(29)を代入して(25)を用いると，

(30) $$e_{sk}=-\left(\alpha_k+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s X_{sk}\right)\hat{\omega}\sum_{i=1}^{n} X_{si}+X_{sk}$$
$$=-\left(\alpha_k+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s X_{sk}\right)E_s+X_{sk}.$$

限界財効用の財弾性値 u_{ik} と第二次偏微分 $u'_{ik}=\partial^2 U/\partial X_i\,\partial X_k$との関係は

(31) $U'_{ik}=\frac{\partial U_i}{\partial X_k}\cdot\frac{X_k}{U_i}\cdot\frac{U_i}{X_k}=U_{ik}\cdot U_i/X_k.$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a}\frac{a}{\Omega}=\frac{\partial(\Psi'\omega)}{\partial a}\frac{a}{\Psi'\omega}=\frac{\Psi''\omega a}{\Psi'}+\hat{\omega}\neq\hat{\omega}.\ (\Psi''\neq 0;\ \omega>0\text{のとき});$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial P_k}\frac{P_k}{\Omega}=\frac{\partial(\Psi'\omega)}{\partial P_k}\frac{P_k}{\Psi'\omega}=\Psi''\sum_{s=1}^{n}U_s\frac{\partial X_s}{\partial P_k}\frac{P_k}{\Psi'}+\omega_k$$
$$\neq\omega_k\ \left(\Psi''\neq 0;\ U_s>0;\ \frac{\partial X_s}{\partial P_k}\neq 0\right).$$

註⑬ $$\hat{\omega}=\frac{\partial\omega}{\partial a}\frac{a}{\omega}=\frac{\partial\left(\frac{U_i}{P_i}\right)}{\partial a}\cdot\frac{aP_i}{U_i}=\frac{\partial U_i}{\partial a}\frac{a}{U_i}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial U_i}{\partial X_s}\frac{\partial X_s}{\partial a}\frac{X_s}{U_i}\frac{a}{X_s}=\sum_{s=1}^{n}U_{is}E_s.$$

註⑭ $$\omega_k=\frac{\partial\omega}{\partial P_k}\frac{P_k}{\omega}=\frac{\partial\left(\frac{U_i}{P_i}\right)}{\partial P_k}\cdot\frac{P_kP_i}{U_i}=\frac{\partial U_i}{\partial P_k}\frac{P_k}{U_i}-\frac{\partial P_i}{\partial P_k}\cdot\frac{P_k}{P_i}$$
$$=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial U_i}{\partial X_s}\frac{\partial X_s}{\partial P_k}\frac{X_s}{U_i}\frac{P_k}{X_s}=\delta_{ik}.$$

また需要の限界財効用弾性値 X_{ik} と偏微分 $X'_{ik}=\partial X_i/\partial U_k$ との関係は下記の通りである。

$$(32)\quad X'_{ik}=\frac{\partial X_i}{\partial U_k}\frac{U_k}{X_i}\frac{X_i}{U_k}=X_{ik}\cdot X_i/U_k,$$

U'_{is} と X'_{is} との関係は次式により示される。

$$(33)\quad \sum_{s=1}^{n} U'_{is}X'_{sk}=\frac{U^i}{U_k}\sum_{s=1}^{n} U_{is}X_{sn}=\delta_{ik}.$$

上式において行列〔X'_{sk}〕は行列〔U'_{is}〕の逆行列であり，〔U'_{is}〕が対称行列であるから〔X'_{sk}〕もまた対称行列である。⑰〔U'_{ik}〕と〔X'_{ik}〕の対称性により次の二式を得る。

$$(34)\quad U_i\cdot U_{ik}/X_k=U_k\cdot U_{ki}/X_i;\ U_i X_i X_{ik}=U_k X_k X_{ki}$$

(34)の諸関係は均衡条件と無関係に成立するから，いま均衡条件(14)の第二式を(34)の第二式に代入して次式を得る。⑱

$$(35)\quad \alpha_i X_{ik}=\alpha_k X_{ki}.$$

(35)を(30)に代入して

$$(36)\quad e_{sk}=-\left(\alpha_k+\sum_{s=1}^{n}\alpha_k X_{ks}\right)E_s+X_{sk}.$$

更に(27)の第一式を用いて

$$(37)\quad e_{sk}=-\left(\alpha_k+\frac{\alpha_k E_k}{\hat{\omega}}\right)E_s+X_{sk}=-\alpha_k E_s\left(1+\frac{E_k}{\hat{\omega}}\right)+X_{sk}.$$

(37)において $k=s$ とおけば，

$$(38)\quad e_{ss}=-\alpha_s E_s\left(1+\frac{E_s}{\omega}\right)+X_{ss}.$$

以上の過程で(37)と(38)の二式を得た。これらを効用独立の仮定の下に有効に

註⑮　次の方程式体系があるとき，

$$\sum_{i=1}^{n} U_{si}Y_i=b_s,\ (U_{si},\ b_s:\text{常数}),\quad Y_i=\sum_{s=1}^{n} X_{is}b_s$$

註⑯

$$-\alpha_k=\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\left(X_{sk}+\omega_k\sum_{i=1}^{n}X_{si}\right)$$
$$=\sum_{s=1}^{n}\alpha_s X_{sk}+\omega_k\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_s X_{si}=\sum_{s=1}^{n}\alpha_s X_{sk}+\frac{\omega_k}{\hat{\omega}}$$
$$\therefore\ \omega_k=-\left(\alpha_k+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s X_{sk}\right)\hat{\omega}.$$

註⑰　$A=A'$ のとき，$AB=I$ とする。

$(AB)'=B'A'=B'A=I,\ B'AB=B,\ \therefore B'=B$

註⑱　$U_i X_i X_{ik}=U_k X_k X_{ki}.\ (\omega P_i)\ X_i X_{ik}=(\omega P_k)\ X_k X_{ki}$

$\therefore\ \alpha_i X_{ik}=\alpha_k X_{ki}$

用い，需要の弾性値を推定する算式を導出する。

次に効用独立の仮定に関して若干の定義を施す。

(39) $k \neq i$ のとき $X_{ik}=0$ であれば，i 財は他の総ての財と効用独立である。

(40) $k \neq i$ のとき $X_{ki}=0$ であれば，i 財は他の総ての財と効用独立である。

(35)から X_{ki} が零のときにのみ，X_{ik} が零となることが分る。従って(39)或いは(40)のどれか一つが成立するとき，もう一方の条件も成立する。これらと同等な二つの定義を施すことが可能である。

(39)′ $k \neq i$ のとき $U_{ik}=0$ であれば(19)，i 財は他の総ての財と効用独立である。

(40)′ $k \neq i$ のとき $U_{ki}=0$ であれば，i 財は他の総ての財と効用独立である。

これら四つの定義の中，どれか一つが満されるとき他の総ての定義も同様に満される。(20)

効用独立(21)を仮定すれば，(25)において需要の交叉限界財効用弾性値 X_{ik} $(i \neq k)$は 0 となり，直接限界財効用弾性値は

(41) $X_{ss}=\dfrac{E_s}{\hat{\omega}}$，（$s$ 財は他の総ての財と効用独立）.

(41)を(38)に代入した後記号 s を i に換えれば，

(42) $e_{ii}=-E_i\left(\alpha_i-\dfrac{1-\alpha_i E_i}{\hat{\omega}}\right)$，$\begin{pmatrix}i\text{ 財は他の総ての}\\ \text{財と効用独立}\end{pmatrix}$.

また総ての財が互に効用独立であるという仮定を設けることなく，単に特定の s 財と k 財との間のみにおいて効用独立であるとすれば $X_{sk}=0$となり，(37)より求められる式の記号 s を i に換えれば，

(43) $e_{ik}=-\alpha_k E_i\left(1+\dfrac{E_k}{\hat{\omega}}\right)$，$\begin{pmatrix}\text{該当する } i \text{ 財と } k \text{ 財との}\\ \text{間のみにおいて効用独立}\end{pmatrix}$.

上式は対称関係(5)を満している。(22)

註(19) 二財が互に効用独立のとき，$\partial^2 U/\partial X_i \partial X_k$ $(=U_{ik})=0$ と通常表現し，i 財の限界効用が i 財の消費量にのみ依存することを意味する。

註(20) (34)の第一式において，行列〔U_{ik}〕のある行の要素が対角要素を除いて総て 0 と等しいとき，対応する列の要素も対角要素を除いて総て 0 となる。またその逆の場合も成立つ。このことは(39)′と(40)′が同等の定義であることを示す。また(40)の意味で k 財が他の総ての財と効用独立のとき（$s \neq k$ のとき $X_{sk}=0$），(20)において $X_{kk} \neq 0$ であるから $i \neq k$ の場合 $U_{ik}=0$となる。従って(39)′と(40)，(40)′と(40)，(40)と(39)はそれぞれ同等であるから 4 つの定義に差異はない。

註(21) 効用独立下において可能な変換指標は第 2 次導函数が 0 と等しくなる函数である。$U_{ij}=U_{ji}=0$ のとき，

$$\Psi_{ij}=\Psi'' U_i U_j+\Psi' U_{ij}=\Psi'' U_i U_j$$

$$\therefore \Psi''=0,\ (U_i>0,\ U_j>0).$$

従って，限界所得効用の所得弾性値$\hat{\omega}$が何らかの合理的な方法㉓により適切に推定されうる場合に，直接価格弾性値は$\hat{\omega}$の推定値，所得弾性値E_i及び支出比率α_iの個々の推定値により(42)に基いて得られる。交叉価格弾性値は該当するi財とk財との間でのみ効用独立という以外に仮定を設けることなく上記の三つの推定値$\hat{\omega}$，E_i，α_iにより(43)に従って求められる。

他方$\hat{\omega}$が未知の場合には，統計的需要分析において直接価格弾性値の推定が比較的容易であると知られることから次のような手続を用いることが可能である。直接価格弾性値e_{ii}，支出比率α_i及び所得弾性値E_iが既知という条件の下で(42)を$\hat{\omega}$について解けば

$$(44)\quad \hat{\omega}=\frac{E_i(1-\alpha_i E_i)}{e_{ii}+\alpha_i E_i},\ \left(\begin{array}{l}i\text{財は他の総ての}\\ \text{財と効用独立}\end{array}\right).$$

上式に基いて$\hat{\omega}$の値を推定する場合，一群の代表的な効用独立財に関して直換価格弾性値を適切な方法で単独に求め，それらを各々(44)の右辺に代入する。効用独立という仮定が現実の消費者行動と符合する場合には，これらの総ての財に関する$\hat{\omega}$の推定値は凡そ等しい値を示すと考えられる。そのとき$\hat{\omega}$の値を平均して㉔(42)及び(43)に代入して，他の総ての財の直接価格弾性値，及び総ての交叉価格弾性値を求める。

$\hat{\omega}$の値を算出するに当ってはいま一つの方法を用いることが可能である。(43)を$\hat{\omega}$について解くと，

$$(45)\quad \hat{\omega}=-\frac{\alpha_k E_i E_k}{e_{ik}+E_i\alpha_k},\ \left(\begin{array}{l}i\text{ 財と}k\text{財との間の}\\ \text{みにおいて効用独立}\end{array}\right).$$

この場合は特定の（ik）の組合せにおいてのみ効用独立と仮定するが，単独に求められるe_{ik}はe_{ii}よりも推定し難く，その結果$\hat{\omega}$の推定値が不確実となる恐れがある。

この条件は(18)，(19)における弾力性概念U_{ik}，X_{ik}が規制する変換函数の条件と同じである。なお，効用独立の仮定は変換函数を選択する上で制約条件をもつという意味で基数的効用に接近する概念である。

註㉒ $e_{ik}=-E_i\alpha_k-\dfrac{E_i E_k \alpha_k}{\hat{\omega}}$

$\therefore\ e_{ik}/\alpha_k+E_i=-\dfrac{E_i E_k}{\hat{\omega}}=-\dfrac{E_k E_i}{\hat{\omega}}=e_{ki}/\alpha_i+E_k$

註㉓ 例えばフイッシャーの方法，フリッシュの方法，ワルトの方法を適用することが可能である。

I. Fisher, "A statistical Method for Measuring 'Marginal Utility' and Testing the Justice of a Progressive Income Tax," Economic Essays contributed in Honor of John Bates Clark, ed. Jacob H. Hollander (Macmillan Co.1927),

上述の理論は，商品群を考えるとき，各商品群が互に効用依存の諸財によって構成される場合にも展開される。いまν箇（$\nu<n$）よりなる一商品群を考えると，商品群間では互に効用独立であるとして

(46) $k>\nu$ のとき $X_{ik}=O,\ (i=1,2,\cdots,\nu),$

$i>\nu$ のとき $X_{ik}=O,\ (k=1,2,\cdots,\nu),$

即ち

$$\left(\begin{array}{ccc|c} X_{11}\cdots & X_{1\nu} & & \cdots X_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{\nu1}\cdots & X_{\nu\nu} & & \cdots X_{\nu n} \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ X_{n1}\cdots & X_{n\nu} & & \cdots X_{nn} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc} X_{11}\cdots & X_{1\nu} & O\cdots\cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{\nu1}\cdots & X_{\nu\nu} & O\cdots\cdots & O \\ O\cdots\cdots & O & O\cdots\cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O\cdots\cdots & O & O\cdots\cdots & O \end{array}\right).$$

ν箇の商品間に効用依存が認められるときには，α_i，E_i及び$\hat{\omega}$の他に，それら商品間における交叉価格弾性値e_{ik}（$i,k=1,2,\cdots,\nu;i\neq k$）が必要とされる。

e_{ik}が単独に決定されうる場合，ν箇の直接価格弾性値e_{kk}は次のようにして求められる。簡単な方法として，パラメーターμ_kを導入する。

(47) $$\mu_k=\sum_{h=1}^{\nu}\alpha_h e_{hk},\ (h=1,2,\cdots,\nu),$$

(48) $$e_{kk}=\frac{\mu_k-\sum_{h\neq k}^{\nu}\alpha_h E_{hk}}{\alpha_k}$$

μ_kとe_{ik}の値が分ればe_{kk}が決まる。(10)によりμ_kは次式で表わされる。

(49) $$\mu_k=-\alpha_k-\sum_{h=\nu+1}^{n}\alpha_h e_{hk}$$

いま一つのパラメーターを導入する。

(50) $$\beta=\sum_{h=1}^{\nu}\alpha_h E_h$$

PP. 157～193;

R. Frisch : New Methods of Measuring Marginal Utility (Tuebingen, 1932);

A. Wald, "The Approximate Determination of Indifference Surfaces by Means of Engel Curves," Econometrica, vol. 8, 1940.

なおフリッシュの方法を応用したF.V.ウォーの実例がある。F.V. Waugh, "The Marginal Utility of Money in the United States from 1917 to 1921 and from 1922 to 1932," Economerica, vol. 3, 1935.

註㉔ このように求められる$\hat{\omega}$の推定値が負値を示すときのみ，均衡の安定条件が満されることを裏付け，フリッシュ理論の援用が可能である。

(43)を(49)の右辺に代入して次式を得る。

$$(51)\quad \mu_k = -\alpha_k\left[1-(1-\beta)(1+\frac{E_k}{\hat{\omega}})\right],\ \left(\begin{matrix} k=1,\cdots\cdots,\nu; \\ h=\nu+1,\cdots,n \end{matrix}\right).$$

(51)を $\hat{\omega}$ について解けば,㉕

$$(52)\quad \hat{\omega} = \frac{1-\beta E_k}{\dfrac{\mu_k}{\alpha_k}+\beta}.$$

(48)及び(52)を詳細に表現すれば次のようである。

$$(53)\quad e_{kk} = \left(1-\sum_{h=1}^{\nu}\alpha_h E_h\right)\left(1+\frac{E_k}{\hat{\omega}}\right)-\left(1+\frac{1}{\alpha_k}\sum_{h\neq k}^{\nu}\alpha_h e_{hk}\right),\ ㉖$$

$$(54)\quad \hat{\omega} = \frac{E_k\left(1-\sum_{h=1}^{\nu}\alpha_h E_h\right)}{\sum_{h=1}^{\nu}\alpha_h E_h + e_{hh} + \dfrac{1}{\alpha_k}\sum_{h\neq k}^{\nu}\alpha_h e_{hk}}.\ ㉗$$

$\hat{\omega}$ が既知のとき,μ_k は(50)を用いて(51)より求まる。商品群を構成する諸財の直接価格弾性値は(48)に基いて μ_k 及び商品群内における交叉価格弾性値 e_{ik} によって算出される。ν 次小行列〔e_{ik}〕の右方及び下方に位する交叉価格弾性値は(43)によって与えられる。

他方 $\hat{\omega}$ が未知のとき,商品群内における e_{hk} を単独に求め(47)によってその商品群の μ_k を計算する。$\mu_k(k=1,\cdots,\nu)$ の実際値を(52)に代入して $\hat{\omega}$ についての ν 箇の推定値を得る。これらの $\hat{\omega}$ が凡そ等しい値をとるならば,その平均値を(53)及び(43)に代入して e_{kk} 及び e_{ik} が推定される。このようにして価格弾性値の n 次行列を組立てることが可能である。

もし商品群内の $e_{hk}(h\neq k)$ を単独に推定することが不可能な場合には,(53)

註㉕ $\mu_k = -\alpha_k\left[1-(1-\beta)-(1-\beta)\dfrac{E_k}{\hat{\omega}}\right] = -\alpha_k\left[\beta-(1-\beta)\dfrac{E_k}{\hat{\omega}}\right],$

$$\mu_k+\alpha_k\beta = \frac{\alpha_k(1-\beta)E_k}{\hat{\omega}},\quad \therefore \hat{\omega} = \frac{(1-\beta)E_k}{\dfrac{\mu_k}{\alpha_k}+\beta}$$

註㉖ $e_{kk} = \dfrac{\mu_k - \sum_{h\neq k}^{\nu}\alpha_h e_{hk}}{\alpha_k} = \dfrac{-\alpha_k\left[1-(1-\beta)(1+\frac{E_k}{\hat{\omega}})\right] = \sum_{h\neq k}^{\nu}\alpha_h e_{hk}}{\alpha_k}$

$$= -\left[1-(1-\beta)\left(1+\frac{E_h}{\hat{\omega}}\right)\right]-\frac{1}{\alpha_k}\sum_{h\neq k}^{\nu}\alpha_h e_{hk}$$

$$= \left(1-\sum_{h=1}^{\nu}\alpha_h E_h\right)\left(1+\frac{E_k}{\hat{\omega}}\right)-\left(1+\frac{1}{\alpha_k}\sum_{h\neq k}^{\nu}\alpha_h e_k\right)$$

註㉗ $\hat{\omega} = \dfrac{E_k(1-\beta)}{\beta+\mu_k/\alpha_k} = \dfrac{E_k\left(1-\sum_{h=1}^{\nu}\alpha_h E_{hk}\right)}{\sum_{h=1}^{\nu}\alpha_h E_h + \dfrac{1}{\alpha_k}\sum_{h=1}^{\nu}\alpha_h e_{hk}} = \dfrac{E_k\left(1-\sum_{h=1}^{\nu}\alpha_h E_h\right)}{\sum_{h=1}^{\nu}\alpha_h E_h + e_{kk} + \dfrac{1}{\alpha_k}\sum_{h=1}^{\nu}\alpha_h e_{hk}}$

における最後の項の上限及び下限を推測しそれに応じて e_{kk} の上限及び下限を推計する。

またもし商品群内における需要の限界財効用弾性値 $X_{hk}(h\neq k)$ を推測することにより e_{kk} を推定しようとすれば，次の二つのパラメーターを考慮して

(55) $\xi_k=\sum_{h\neq k}^{\nu}\alpha_h X_{hk},$

(56) $\beta_k=\sum_{h\neq k}^{\nu}\alpha_h E_h=\beta-\alpha_h E_h,$

(37)により次式を得る。㉘

(57) $\sum_{h\ k}^{\nu}\alpha_h e_{hk}=\xi_k-\beta_k\cdot\alpha_k\left(1+\frac{E_k}{\hat{\omega}}\right)\cdot$

上式を(53)の右辺に代入して求められる式は㉙

(58) $e_{kk}=-E_k\left(\alpha_k-\frac{1-\alpha_k E_k}{\hat{\omega}}\right)-\frac{\xi_k}{\alpha_k}\cdot$

(58)の右辺の第一項は効用独立下における(42)と同じく，第二項は需要の交叉限界財効用弾力性効果の累積である。これら効果の累積 ξ_{kk} の上限及び下限を推測することによりこれに対応する e_{kk} の上限及び下限を推定しうる。いま $\xi_k=O$ とおけば，(58)は(42)に還元される。

最後に，効用独立の仮定について，個人が現実に購入・消費する無数の財貨及び用役の分析・取扱い上適切な箇数の商品群に何らかの合理的な方法で組立てるとき，代替・補完の密接な関係が漸次相殺され互に独立した商品群となる傾向が強い。繰返しの集計を行なって組立てられる商品群の間では近似的に効用独立であると見做される。㉚

註㉘ $\sum_{h=k}^{\nu}\alpha_h e_{hk}=\sum_{h\neq k}^{\nu}\alpha_h\left[x_{hk}-E_h\alpha_k\left(1+\frac{E_k}{\hat{\omega}}\right)\right]=\sum_{h\neq k}^{\nu}\alpha_h x_{hk}-\sum_{h\neq k}^{\nu}\alpha_h E_h\cdot\alpha_k\left(1+\frac{E_k}{\hat{\omega}}\right)$

$=\xi_k-\beta_k\cdot\alpha_k\left(1+\frac{E_k}{\hat{\omega}}\right)\cdot$

註㉙ $e_{kk}=\left(1-\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_h E_h\right)\left(1+\frac{E_k}{\hat{\omega}}\right)-\left(1+\frac{1}{\alpha_k}\sum_{h\neq k}^{\nu}\alpha_h e_{hk}\right)$

$=-\sum_{h=1}^{\nu}\alpha_h E_h+\frac{E_k}{\hat{\omega}}-\sum_{h=1}^{\nu}\alpha_h E_h\cdot\frac{E_k}{\hat{\omega}}-\frac{\xi_k}{\alpha_k}-\frac{1}{\alpha_k}\left\{\xi_k-\alpha_k\left(1+\frac{E_k}{\hat{\omega}}\right)\beta_k\right\}$

$=-\alpha_k E_k\left(1+\frac{E_k}{\hat{\omega}}\right)+\frac{E_k}{\hat{\omega}}-\frac{\xi_k}{\alpha_k}$

註㉚ ワルトの方法に基いて効用指標函数を推定した若干の結果から，それらのヘッセの行列における非対角要素は対角要素よりも絶対値が比較的小さいという事実を認めた。例えば，昭和32〜34年度における近畿農家の指標函数（丸山義皓・佐々木康三「農家経済行動の研究——効用指標函数による分析——」農業経済研究

34巻4号）に関するヘッセの行列は次のように表わされる。

$$H=\left[\frac{\partial^2 I^*}{\partial x_i \partial x_j}\right]=\begin{pmatrix} -.012969366 & -.010585514 & -.002270559 \\ -.010585514 & -.016563848 & .001954693 \\ -.002270559 & .001954693 & -.025688556 \end{pmatrix}$$

Ⅲ　フリツシュの方法の経済学的解析

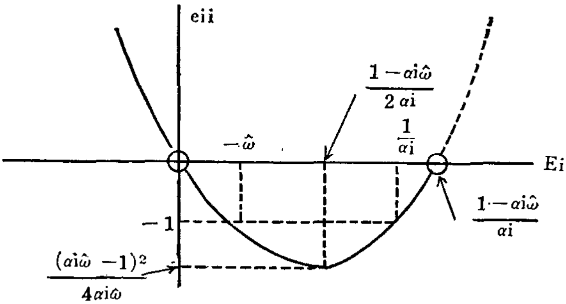
フリツシュが導いた主要な結果は前節の(42), (43)の二式であるからこれらの関係式を基礎として経済学的な意味付けを行なう。

1　直接価格弾性値と所得弾性値との関係

前節(42)より直接価格弾性値は所得弾性値に関する二次函数として与えられる。

$$e_{ii}=-E_i\left(\alpha_i-\frac{1-\alpha_i E_i}{\hat{\omega}}\right)=\frac{\alpha_i E_i}{-\hat{\omega}}\left(E_i-\frac{1-\alpha_i\hat{\omega}}{\alpha_i}\right)\quad\left(\begin{array}{l}i\text{ 財は他の総て}\\ \text{の財と効用独立}\end{array}\right),$$

α_iは正，$\hat{\omega}$は負，いまα_i，$\hat{\omega}$を常数としてe_{ii}とE_iとの一般的な関係をグラフに表わすと次の様になる（$\frac{1}{\alpha_i}<-\hat{\omega}$の場合には以下同様な考慮がなされる)。



単一財に関するスルツキー方程式において代替効果は常に負であり，i財が上級財$\left(\frac{\partial X_i}{\partial a}>O\right)$の場合所得効果は負となるから，両効果の和としての価格効果は負である。従って所得弾性値が正のとき価格弾性値が負となる場合のみを考慮する。またi財が中立財$\left(\text{Neutral good, }\frac{\partial X_i}{\partial a}=O\right)$の場合に所得効果が$O$，価格効果は負となるから，所得弾性値が$O$のときに価格弾性値が$O$となる特殊な場合はこれを取扱わない。更に$i$財が下級財$\left(\frac{\partial X_i}{\partial a}<O\right)$の場合には所得効果は正，価格効果は上のグラフにおいてe_{ii}が正値を示すことから正である。それは下級財の場合に所得効果が代替効果より大きいことを意味する。このような性質をもつ財をギフエン財と呼ぶ。尚，二財だけを取扱

うときには，所得弾性値の正の範囲のみを考慮する。それは二財が効用独立であるから，安定条件の下ではスルツキーの方程式において分るように上級財のみを取扱うからである①。またいずれの場合でも，所得弾性値がOのとき価格弾性値は非常に小さくOに近いことが推測される。

価格弾性値と所得弾性値の絶対的大きさを比較するために，両者の差をyで表わす。

$$y=E_i+e_{ii}=-\frac{\alpha_i E_i}{\hat{\omega}}\left(E_i-\frac{1-\alpha_i\hat{\omega}+\hat{\omega}}{\alpha_i}\right)$$

yはE_iの二次函数であり，次の結果が得られる②。

i) $\frac{1-\alpha_i\hat{\omega}+\hat{\omega}}{\alpha_i}<E_i<\frac{1-\alpha_i\hat{\omega}}{\alpha_i}$のとき，$E_i>\left|e_{ii}\right|$

ii) $E_i=\frac{1-\alpha_i\hat{\omega}+\hat{\omega}}{\alpha_i}$のとき，$E_i=\left|e_{ii}\right|$

iii) $O<E_i<\frac{1-\alpha_i\hat{\omega}+\hat{\omega}}{\alpha_i}$のとき，$E_i<\left|e_{ii}\right|$

iv) $E_i<O$のとき，$\left|E_i\right|>e_{ii}$

註①　単一財に関するスルッキー方程式は

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i}=\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right)_{\bar{u}}-x_i\frac{\partial x_i}{\partial a},\quad (i=1,2);$$

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right)_{\bar{u}}=\frac{\lambda\bar{D}\binom{i}{i}}{D_2},\quad \frac{\partial x_i}{\partial a}=\frac{\bar{D}\binom{3}{i}}{D_2},\quad (\lambda<O)\cdot$$

D_2は2箇の財に関する縁付行列式，$\bar{D}\binom{m}{n}$はD_2の第m行と第n列とを取除いてできる2次小行列式である（D_2は3次行列式)。二財は効用独立であるから，

$$D_2=\begin{vmatrix} U_{11} & O & P_1 \\ O & U_{22} & P_2 \\ P_1 & P_2 & O \end{vmatrix}$$

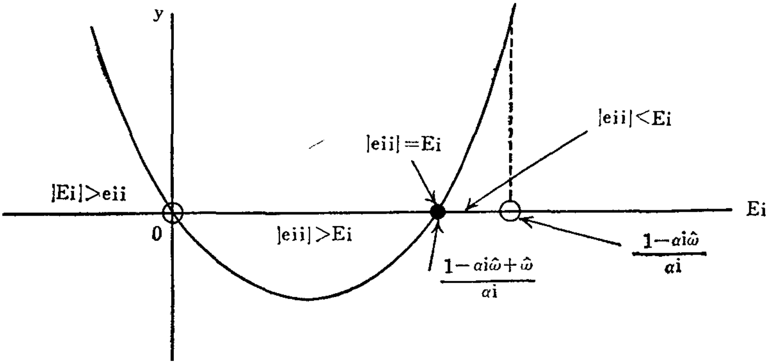
$$\frac{\partial x_i}{\partial a}=\frac{\bar{D}\binom{3}{i}}{D_2}=\frac{-P_iU_{jj}}{-P_1^2U_{22}-P_2^2U_{11}}>O,\quad (i\neq j)$$

なお，三財の場合，簡単のため，

$$\frac{\partial x_3}{\partial a}=\frac{\bar{D}\binom{4}{3}}{D_3}=\frac{\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & P_1 \\ U_{21} & U_{22} & P_2 \\ O & O & P_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & O & P_1 \\ U_{21} & U_{22} & O & P_2 \\ O & O & U_{33} & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 & O \end{vmatrix}}$$

分母が$(-P_2^2U_{11}U_{33}-P_3^2U_{11}U_{22}+P_1P_2U_{21}U_{33}+P_3^2U_{12}U_{21}-P_1^2U_{22}U_{33}+P_1P_2U_{33})$

これをグラフで表示すれば，



所得弾性値が如何なる値のときに価格弾性値は −1 より大きいか，小さいか又は等しいかを調べると③，

a) $E_i > O$ の範囲

$\alpha_i \hat{\omega} \neq -1$ の場合

i) $-\hat{\omega} < E_i < \dfrac{1}{\alpha_i}$ のとき，$e_{ii} < -1$

ii) $E_i = -\hat{\omega}$，$\dfrac{1}{\alpha_i}$ のとき，$e_{ii} = -1$

iii) $O < E_i < -\hat{\omega}$，$\dfrac{1}{\alpha_i} < E_i < \dfrac{1-\alpha_i\hat{\omega}}{\alpha_i}$ のとき，$O > e_{ii} > -1$

となりその符号は一意的に決定されないから，$\dfrac{\partial x_3}{\partial a}$ は正負の両方の場合を考慮する。

註② $y > 0$ とおくと，$E_i > \dfrac{1-\alpha_i\hat{\omega}+\hat{\omega}}{\alpha_i}$，$E_i < 0$

i) $\dfrac{1-\alpha_i\hat{\omega}+\hat{\omega}}{\alpha_i} < E_i < \dfrac{1-\alpha_i\hat{\omega}}{\alpha_i}$ のとき

$E_i + e_{ii} > 0$，$E_i > -e_{ii}$，$\therefore E_i > |e_{ii}|$

ii) $E_i < 0$ のとき，

$E_i + e_{ii} > 0$，$E_i > -e_{ii}$，$-E_i > e_{ii}$ $\quad \therefore |E_i| > e_{ii}$

$y = 0$ とおくと，$E_i = \dfrac{1-\alpha_i\hat{\omega}+\hat{\omega}}{\alpha_i}$

iii) $E_i = \dfrac{1-\alpha_i\hat{\omega}+\hat{\omega}}{\alpha_i}$ のとき，

$E_i = |e_{ii}|$

iv) $y < 0$ とおくと，$0 < E_i < \dfrac{1-\alpha_i\hat{\omega}+\hat{\omega}}{\alpha_i}$

$E_i + e_{ii} < 0$，$E_i < -e_{ii}$，$\therefore E_i < |c_{ii}|$

註③ これらの結果は二次函数の性質を用いて容易に導かれる。

$\alpha_i\hat{\omega}=-1$ の場合

iv) $E_i=\dfrac{1-\alpha_i\hat{\omega}}{2\alpha_i}$ のとき，$e_{ii}=-1$

v) $E_i\neq\dfrac{1-\alpha_i\hat{\omega}}{2\alpha_i}$，$\left(O<E_i<\dfrac{1-\alpha_i\hat{\omega}}{\alpha_i}\right)$ のとき，$O>e_{ii}>-1$

b) $E_i<O$ の範囲

vi) $\dfrac{(1-\alpha_i\hat{\omega})-\sqrt{(1-\alpha_i\omega)^2-4\alpha_i\hat{\omega}}}{2\alpha_i}<E_i<O$ のとき，$O<e_{ii}<1$

vii) $E_i=\dfrac{(1-\alpha_i\hat{\omega})-\sqrt{(1-\alpha_i\omega)^2-4\alpha_i\hat{\omega}}}{2\alpha_i}$ のとき，$e_{ii}=1$

viii) $E_i<\dfrac{1-\alpha_i\hat{\omega}-\sqrt{(1-\alpha_i\omega)^2-4\alpha_i\hat{\omega}}}{2\alpha_i}$ のとき，$e_{ii}>1$

上記のように所得弾性値の正負のいずれの場合においてもそれぞれの範囲に対応して，価格弾性値の範囲が示される。尚本理論は効用独立の概念を援用することによって展開されているために多少の制約をもつことが知られる。

2　交叉価格弾性値と所得弾性値との関係

この関係式は次のように簡潔に表現される。

$$e_{ik}=-\alpha_k E_i\left(1+\frac{E_k}{\omega}\right),\ \left(\begin{array}{c}i\text{ 財と }k\text{ 財との間に}\\ \text{のみおいて効用独立}\end{array}\right).$$

弾性値間の諸関係を簡単に述べると

$E_i>O$ の場合

i) $E_k>-\hat{\omega}$ のとき，$e_{ik}>O$

ii) $E_k=-\hat{\omega}$ のとき，$e_{ik}=O$

iii) $E_k<-\hat{\omega}$ のとき，$e_{ik}<O$

$E_i<O$ の場合

iv) $E_k>-\hat{\omega}$ のとき，$e_{ik}<O$

v) $E_k<-\hat{\omega}$ のとき，$e_{ik}>O$

以上の議論において限界所得効用の所得弾性値 $\hat{\omega}$ の果たす役割は非常に大きい。それは需要弾性値の推定のみならず，所得税率，生計費指数の決定等の厚生経済学的な面で極めて有用な概念であり，労働供給函数の導出においても応用される④。

支出比率及び限界所得効用との関連で，価格弾性値を所得弾性値から引き

註④　R. Frisch, New Methods of Measuring Marginal Utility (Tuebingen, 1932). その概要については，例えば，久武雅夫，価格理論の基礎（東洋経済新報社，1964）第二章参照。

出す方法を考案したことは，価格弾性値の推定が現実に比較的困難であること及びその完全な表を作ることによって財相互間の需要関係を検討する点で極めて意義深い。

Ⅳ 経験的資料への適用

需要に関する知識は財の生産計画における重要な要素である。本節においてはフリッシュの需要弾性値推定法を実際の経済資料に適用する。後節において需要の弾性値が生産計画に如何に役立つかについて議論する。

1 需要弾性値の推定

本研究においては，私共が一連の研究を行なっている対象農家の一群である近畿地区の農家を選び，昭和32～34年度における農林省農家経済調査報告書の家計費資料及び農林省統計表の農村物価指数（家計用品）を用いる。以前にこれらの資料を用いて全消費財を食物，非食物財及び非食物用役の三種①に分類し，ワルトの方法に従って効用指標函数を推定した②。この指標函数に基き，任意の価格及び所得条件の下に導出された所得の限界効用函数は次の通りである。

$$U' = \frac{E-408,707.623\,p_1-446,124.657\,p_2-461,918.164\,p_3}{-1,748,920.716(p_1)^2-1,360,417.173(p_2)^2-426,236.641(p_3)^2 +2,292,447.143\,p_1p_2+483,603.906\,p_1p_3-409,658.394\,p_2p_3}.$$

p_1，p_2，p_3 はそれぞれ食物，非食物財及び非食物用役の価格である。簡単のため，以下の議論を基準年に当る昭和32年度に限定する。価格 p_1，p_2，p_3 を総て1とおき，円単位の所得（総支出）E を千円単位に換えて E^* で表わすと所得の限界効用函数は

$$\omega = -0.00085530\,E^* + 1.12621474.$$

任意の所得水準における限界所得効用の所得弾性値 $\bar{\omega}$ は上式に基いて算出される。

所得弾性値 $\bar{\omega}$ の他に必要な資料は各財の支出比率及び所得弾性値に関するものである。効用指標函数の基礎となるエンゲル函数を計測するために，昭和32年度に関して次のような資料を用いた③。

註① 食物には飲食費，非食物財には被服費，光熱費，住居費，非食物用役には保健衛生費，教養文化費，交際費，雑費，臨時費が各々含まれている。

註② 丸山，佐々木，前掲稿。

註③ エンゲル函数の高度な線型性を確保するために，標本抽出農家の8.2％に当る経

第1表　各財の経営規模別消費量

財＼階層	0.3〜0.5 ha	0.5〜1.0 ha	1.0〜1.5 ha	1.5〜2.0 ha	2.0〜 ha	平　均
食　物 (x_1)	145, 472	161, 158	171, 528	203, 228	221, 719	180, 621.0
非食物財 (x_2)	90, 572	96, 236	105, 369	135, 362	179, 764	121, 460.6
非食物用役 (x_3)	96, 432	102, 881	124, 457	160, 930	172, 292	131, 398.4
所　得 (E)	円 332, 476	円 360, 275	円 401, 347	円 499, 527	円 573, 775	円 433, 480.0

消費量は支出額を価格で除した値とし，基準年（昭和32年度）における総ての財の価格を1とおいたから，各財の消費量はそれぞれの財に対する支出額の数値と一致している。第一表の資料を用いて最小二乗法により一次のエンゲル函数を求めると，次のような結果が得られた。

$x_1=47,005.1+0.30824\,E(0.992)$

$x_2=-34,080.7+0.35882\,E(0.981)$

$x_3=-12,924.4+0.33294\,E(0.986)$

（括孤内の数値は相関係数）

経営規模別需要構造を明らかにするために，階層別に需要の所得弾性値を上記のエンゲル函数と第一表の所得及び消費量に関する資料から求める。所得額 $\overline{E}$，消費量 $\overline{x}_i$ における i 財の所得弾性値 $\overline{E}_i$ は次式に従って決定される。

$$\overline{E}_i=\frac{dx_i}{dE}\cdot\frac{\overline{E}}{\overline{x}_i}\ .$$

第2表　経営規模別需要の所得弾性値

E_i＼階層	0.3〜0.5 ha	0.5〜1.0 ha	1.0〜1.5 ha	1.5〜2.0 ha	2.0〜 ha	平　均
食　物 (E_1)	0.68556	0.70261	0.72466	0.76612	0.79003	0.73976
非食物財 (E_2)	1.39992	1.35802	1.31002	1.23478	1.19837	1.28059
非食物用役 (E_3)	1.13219	1.12076	1.10708	1.08426	1.07256	1.09836

支出比率は第1表の資料から階層別に次のように得られる。

経営耕地面積0.3 ha未満の農家は考慮に入れない。

第3表　経営規模別支出比率

階層 / 支出比率	ha 0.3〜0.5	ha 0.5〜1.0	ha 1.0〜1.5	ha 1.5〜2.0	ha 2.0〜	平　均
食　　物 (α_1)	0.43754	0.44732	0.42738	0.40684	0.38642	0.41668
非食物財 (α_2)	0.27242	0.26712	0.26252	0.27099	0.31330	0.28020
非食物用役 (α_3)	0.29004	0.28556	0.31010	0.32217	0.30028	0.30312

同様に限界所得効用の所得弾性値 $\hat{\omega}$ は上記された所得の限界効用函数 $\omega(E^*)$ と第1表の階層別平均所得水準に従って次式に基いて求められる。

$$\hat{\omega}=\frac{d\omega}{dE^*}\frac{\bar{E}^*}{\bar{\omega}}$$

$\bar{\omega}$ は所得額 $\bar{E}^*$ の限界効用である。

第4表　限界所得効用の所得弾性値

階層	ha 0.3〜0.5	ha 0.5〜1.0	ha 1.0〜1.5	ha 1.5〜2.0	ha 2.0〜	平　均
$\hat{\omega}$	−0.33779	−0.37667	−0.43844	−0.61125	−0.77227	−0.49077

必要な資料 E_i, α_i, $\hat{\omega}$ の総てが第2, 3, 4表にそれぞれ示された。これらの資料を用いて第Ⅱ節の(42), (43)式に従って求められる経営規模別需要の価格弾性値は第5表のように示される④。

2　計算結果の吟味

第Ⅱ節に(9)〜(13)式として記したように需要の弾性値間には五つの基本的な関係がある。得られた弾性値の当否を吟味するために，これらの諸関係の中最初から四つの関係式に計算結果を代入して関係式が成立するか否かを確かめる。簡単のため平均階層についてのみ吟味する。

i) エンゲル集計

$$\begin{aligned}\alpha_1E_1+\alpha_2E_2+\alpha_3E_3&=(0.41668)(0.73976)+(0.28020)(1.28059)\\&\quad+(0.30312)(1.09836)\\&=1.00000\end{aligned}$$

ii) クールノー集計

$$\sum_{j=1}^{3}\alpha_je_{j1}=-0.41668=-\alpha_1$$

註④　e_{ij} は x_i（i 財）の p_j（j 財の価格）に関する価格弾性値を表わす。

第5表　需要の直接及び交叉価格弾性値 e_{ij}

	x_i ＼ p_j	(1)	(2)	(3)	$\sum_j e_{ij}$
0.3～0.5ha	(1)	−1.72072	0.58724	0.46762	−0.66586
	(2)	0.63061	−2.94521	0.95489	−1.35971
	(3)	0.51001	0.96981	−2.57949	−1.09967
0.5～1.0ha	(1)	−1.59336	0.48897	0.39635	−0.70804
	(2)	0.52565	−2.66024	0.76607	−1.36852
	(3)	0.43381	0.77998	−2.34322	−1.12943
1.0～1.5ha	(1)	−1.45063	0.37818	0.34270	−0.72975
	(2)	0.36550	−2.30426	0.61952	−1.31924
	(3)	0.30888	0.57775	−2.00149	−1.11486
1.5～2.0ha	(1)	−1.17439	0.21178	0.19100	−0.77161
	(2)	0.12728	−1.67876	0.30784	−1.24364
	(3)	0.11177	0.29972	−1.50352	−1.09203
2.0ha～	(1)	−1.01598	0.13656	0.09224	−0.78718
	(2)	0.01065	−1.34460	0.13992	−1.19403
	(3)	0.00954	0.18540	−1.26360	−1.06866
平均	(1)	−1.35096	0.33359	0.27761	−0.73976
	(2)	0.27072	−2.03187	0.48057	−1.28058
	(3)	0.23219	0.49529	−1.82585	−1.09837

$$\sum_{j=1}^{3}\alpha_j e_{j2} = -0.28020 = -\alpha_2$$

$$\sum_{j=1}^{3}\alpha_j e_{j3} = -0.30312 = -\alpha_3.$$

iii）同次条件

$$\sum_{j=1}^{3} e_{1j} = -0.73976 = -E_1$$

$$\sum_{j=1}^{3} e_{2j} = -1.28058 \fallingdotseq -E_2$$

$$\sum_{j=1}^{3} e_{3j} = -1.09837 \fallingdotseq -E_3$$

iv）対称関係

$E_1 + e_{12}/\alpha_2 = 1.93030$,　$E_2 + e_{21}/\alpha_1 = 1.93030$

$E_1 + e_{13}/\alpha_3 = 1.65560$,　$E_3 + e_{31}/\alpha_1 = 1.65560$

$E_2+e_{23}/\alpha_3=2.86600$, $E_3+e_{32}/\alpha_2=2.86599$

$E_1+e_{11}/\alpha_1=-2.50244$, $E_2+e_{22}/\alpha_2=-5.97091$

$E_3+e_{33}/\alpha_3=-4.92516$

$$\therefore E_1+e_{12}/\alpha_2=E_2+e_{21}/\alpha_1$$
$$E_1+e_{13}/\alpha_3=E_3+e_{31}/\alpha_1$$
$$E_2+e_{23}/\alpha_3 \doteqdot E_3+e_{32}/\alpha_2$$

計算の過程で計算誤差が多少生ずると考えられるから，四つの諸関係は近似的に成立することが認められる。

V　計測結果の経済学的考察

1　需要の態様及び構造

昭和32年度における近畿地区の農家の食物，非食物財及び非食物用役に関する需要の所得弾性値を最小二乗法により求め，直接及び交叉価格弾性値をフリッシュの方法に従って算出した。それらの結果から各財に対する需要の程度及び諸財相互間の需要関係を把え，又経営規模別に需要の弾性値を計算することによって階層別の需要構造を明らかにする。

最初に，基礎資料として用いた前節の諸表より明らかとなる諸点を指摘する。

a）第1表より，経営規模の拡大につれて総消費支出額は増加し，各財に対する支出額も同様に増加する。

b）第3表より，食物支出（飲食費）の総消費支出額に占める比率（エンゲル係数）は，0.5～1.0 ha 階層が 0.3～0.5 ha階層よりも大きいことを除けば，高所得層となるにつれて減少する。また他財の支出比率については顕著な傾向はみられない。

c）第4表より，ワルトの方法に従って算出した所得（総消費支出）の限界効用の弾性値は所得の上昇につれて絶対値において増加し，その平均値は凡そ −0.5 である。

所得弾性値は第2表に示された通りである。これより次のことが明らかである。

d）食物の所得弾性値は所得の上昇につれて増加し，平均値が約 0.74，最高と最低との開差は約 0.1，非食物財及び非食物用役については所得の上昇につれて共に減少し，前者の平均値が約 1.28 で開差が 0.2，後者の平均値が約 1.10 で開差が約 0.06 である。

従って各財の所得弾性値に関して，所得の大小による開差は僅少である。

価格弾性値は第5表に記されている。需要の代替，補完関係が通常交叉弾性値の符号の正負によって表わされていることから，

e) 三財は互に代替関係にある。

f) 三財に関する価格弾性値は総て高所得層になるにつれて減少し，それらの開差は所得弾性値の場合に比して数倍大きい。

これは需要量の価格変動に反応する度合が所得階層別に大きな差があり，低所得層ほど価格変動に敏感な反応を示し各財の購入量の変化の大きいこと及び三財相互間の代替関係の強いことを意味する。

三財相互間における代替関係の重要性を検討するために，直接価格弾性値を総て－1と等しくおくことによって交叉弾性値の比率を求める。これは算式

$\overset{*}{e}_{ij}=e_{ij}/\sqrt{e_{ii}e_{jj}}$ を用いることにより可能となる①。

代替関係の強度

ha	x_i \ p_j	(1)	(2)	(3)
0.3～0.5	(1)	−1	.26086	.22196
	(2)	.28012	−1	.34644
	(3)	.24208	.35185	−1
0.5～1.0	(1)	−1	.23750	.20512
	(2)	.25532	−1	.30683
	(3)	.22451	.31240	−1
1.0～1.5	(1)	−1	.20685	.20112
	(2)	.19991	−1	.28848
	(3)	.18127	.26903	−1
1.5～2.0	(1)	−1	.15083	.14374
	(2)	.09065	−1	.19376
	(3)	.08411	.18865	−1
2.0～	(1)	−1	.11684	.08141
	(2)	.00911	−1	.10734
	(3)	0.00842	.14224	−1
平均	(1)	−1	.20135	.18306
	(2)	.16340	−1	.25840
	(3)	.15311	.26632	−1

従って代替関係を無視するとすれば，代替関係の累積効果（交叉弾性値の絶対値の和）が考慮されないことになる。平均階層においては1～3財の累積効果が凡そ .38, .42, .42, 平均で約 .41 である。従って

g) 代替関係を総て無視することは，三財の価格が変化するとき，各財の需要予測が平均階層において三割近い精度を失う可能性をもつ。

最後に，価格弾性値，エンゲル函数及び各財の消費量を用いてスルツキー方程式に基き代替効果，所得効果を算出し，それらの大小関係を比較し一般的な傾向を調べる。

註① この部分は北海道大学丸山義皓氏の示唆に基いて分析された。

代替効果と所得効果の関係

財	式	価格効果 $\frac{\partial x_i}{\partial p_j}$	代替効果 $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{\bar{u}}$	所得効果 $-x_j\frac{\partial x_i}{\partial E}$
x_1	$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}$	−244, 011.7	−188, 337.1(338)	−55, 674.6(100)
	$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}$	60, 253.4	97, 692.4(261)	−37, 439.0(100)
	$\frac{\partial x_1}{\partial p_3}$	50, 142.2	90, 644.4(224)	−40, 502.2(100)
x_2	$\frac{\partial x_2}{\partial p_1}$	32, 881.8	97, 692.2(151)	−64, 810.4(100)
	$\frac{\partial x_2}{\partial p_2}$	−246, 792.1	−203, 209.6(466)	−43, 582.5(100)
	$\frac{\partial x_2}{\partial p_3}$	58, 370.3	105, 518.7(224)	−47, 148.4(100)
x_3	$\frac{\partial x_3}{\partial p_2}$	30, 509.4	90, 645.4(151)	−60, 136.0(100)
	$\frac{\partial x_3}{\partial p_2}$	65, 080.3	105, 519.4(261)	−40, 439.1(100)
	$\frac{\partial x_3}{\partial p_3}$	−239, 913.8	−196, 166.0(448)	−43, 747.8(100)

（括弧内の数値は所得効果を 100 としたときの代替効果の指数である）

上記の諸効果は平均階層に関するものである。

h）代替効果は一般に所得効果よりも大きく，1.5～4.5 倍である。

二財間における代替効果が正値を示すことから三財が互に代替財に相当することは e）の結果を裏付ける。また所得効果が三財について負であるからそれらを上級財と呼ぶ。

2　需要弾性値の生産計画における役割

需要の弾力性は需要予測の極めて有力な手段である。価格の変化に対応する需要量の変化，販売量の変化に対応する販売額の変化を相対的な比率として把え，このような需要供給の有機的な関係を通して生産計画を調整することは個別企業及び各種産業にとって有益且つ重要なことである。

いま諸財の価格 $P_1, \cdots, P_n$ 及び所得 E がそれぞれ $P_1+\Delta P_1, \cdots, P_n+\Delta P_n$, $E+\Delta E$ に変化するとき，各財の需要量の変化が $x_1, \cdots, x_n$ より $x_1+\Delta x_1, \cdots, x_n+\Delta x_n$ に変化するとすれば，各財の需要量の変化率は全体として次のように表わされる。

$$\frac{\Delta x_i}{x_i}=e_{i1}\frac{\Delta P_1}{P_1}+\cdots\cdots+e_{in}\frac{\Delta P_n}{P_n},\ (i=1,\ 2, \cdots, n)\cdot$$

従って価格変化の予測が可能な場合或いは市場情報が入手しうるならば，各財の需要量の変化は需要弾性値に基いて予測される。このとき予測される需要量に見合うように，企業或いは産業は販売量を調整し同時に生産を計画的にする必要がある。

次に販売量の変化と販売額の変化との関係をアモロソ・ロビンソン式②を用いて考慮する。この関係式は単一財について需要の価格弾性値が −1 より小，大，相等のとき，販売量の増加（減少）によって販売額は増加(減少)，減少(増加)，不変であることを表わす。1 %の販売量の変化が何%の販売額の変化を引き起すかについてはアモロソ・ロビンソン式における左辺の限界収益を収益の販売量に関する弾力性として書き換え，次式のように表わされる。

$$\eta=\left(1+\frac{1}{e}\right)$$

η は収益の販売量に関する弾性値，e は需要の価格弾性値である。

いま一企業が単一消費財を生産すると考えれば，独占的または独占企業，或いは同一消費財を生産する企業全体として販売量を 1 %変化させる場合，それらの得る収益がそれぞれ何%変化するかは上記の収益の弾性値 η より明らかになる。

第五節第 5 表における平均階層の価格弾性値で算出した η の値は次の通りである。

i）収益の弾性値は 食物，非食物財，非食物用役について各々 0.25979，0.50784，0.45231 である。

従って三財とも販売量の増加につれて収益は増大するが，1 %の販売量増加に対する収益増加比率は非食物財の約 0.51 %が最高，非食物用役が約 0.45 %，食物の約 0.26 %が最低を示している。

販売量の増加のために行なわれる生産の増大は各々の企業において限界収益が限界費用を越えない範囲で行なわれなければならない。

一般的に i 財の収益は単に i 財の販売量の変化のみによるのではなく，他財 j（$j=1,\cdots,\eta\,;\,i\neq j$）の販売量の変化によっても影響される。$j$ 財の販売量に関する i 財の限界収益を求めると次式が得られる。

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}(p_i x_i)=\frac{\partial p_i}{\partial x_j}x_i,\quad (i,j=1,2,\cdots,n\,;\,i\neq j)\cdot$$

註② $\dfrac{\partial R}{\partial X}=\dfrac{\partial}{\partial x}(PX)=P\left(1+\dfrac{1}{e}\right)$

R は収益，P は価格，X は販売量，e は価格弾性値。

従って j 財の販売量 x_j に関する i 財の収益 R_i の弾性値 η_{ij} は次式によって得られる。

$$\eta_{ij}=\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\cdot\frac{x_j}{p_i},\quad (i, j=1, 2, \cdots, n\,;\, i\neq j)\cdot$$

これは価格伸縮性に他ならない。平均階層の価格弾性値行列の逆行列をとって η_{ij} を求めると次のようになる。

収益の弾性値 ηij

ηij \ j	x_1	x_2	x_3
η_{1j}	0. 19634	−0. 17282	−0. 16768
η_{2j}	−0. 14025	0. 44394	−0. 16768
η_{3j}	−0. 14025	−0. 17282	0. 38550

j）食物部門の収益は他の二部門が各々販売量を1％増加することによって約0.17％減少する。非食物財の収益は食物販売量の1％増加に対して0.14％減少し，非食物用役については約0.16％減少する。非食物用役の収益は食物販売量の1％増加に対して0.14％減少し，非食物財については0.17％減少する。

Ⅵ　おわりに

消費者行動分析の主要課題である消費者需要分析を行なうために，フリッシュの需要弾性値推定法を経験的資料に適用し直接・交叉価格弾性値及び所得弾性値を計測した。最初にフリッシュの方法の経済学的な検討を行なった結果，この方法の基礎となる効用独立の仮定は無差別曲線の形状の視点より普遍的な仮定であること，及び効用指標函数は一次増加函数による変換が可能であることからこの方法の援用が比較的容易であることが知られる。また統計的需要分析の種々の困難を克服し，消費者の消費・需要に関する詳細且つ体系的な分析が可能である。

昭和32年度における近畿地区農家の消費·需要の分析をフリッシュの方法に基いて行なった。その計測結果は第Ⅳ節に表示され，それらの経済学的考察については第Ⅴ節で行ない，結論として a）より j）までの十項目にまとめた。

最後に需要の弾性値が生産計画において如何に有用な役割を果すかについて議論した。第一に従来のような分析方法に従って，市場条件及び所得に関する情報が利用可能な場合にそれらの条件変化によって変化する各財の需要量の予測，第二に各企業或いは各産業が積極的に販売量を変える場合に，そ

れらの生産主体の相互関係を通して収益が如何に変るかを多部門に関する収益の弾力性概念を用いることにより明らかにした。

尚，本研究の詳細な分析は稿を改めて発表したい。

（付言） 本稿の執筆中，貴重な示唆及び助言を戴いた北海道大学丸山義晧氏に感謝の意を表する。

FRISCH'S METHOD OF ESTIMATING DEMAND ELASTICITIES…ITS ECONOMIC EXAMINATION AND EMPIRICAL APPLICATION…

— Summary —

by Kozo Sasaki
Takeshi Yajima

This paper is chiefly intended to attempt the derivation of consumer's demand which is a major subject in the theory of consumer's behavior. For this purpose the authors applied Frisch's estimation method of demand elasticities to empirical data collected in Japan, and computed direct and cross elasticities together with income elasticity.

At the outset, Frisch's method was examined from the viewpoint of economic theory. His method is to derive price elasticity from income elasticity and budget proportion through the medium of the elasticity of marginal income utility. The assumption of want- independence, which underlies this method, does not contradict the convexity of indifference curves to the origin except for the L-shaped convexity. Results obtained by this method are invariant under the linear transformation. Owing to these two characteristics the application of this method is relatively easy.

Frisch's approach is able to overcome several difficulties which a statistical demand analysis often encounters; e.g., the estimation of price elasticity in a cross-section analysis, the ascertainment of substitution or complementarity among a relatively large number of commodities, a time-series analysis in which a high serial correlation exists, etc. Moreover, it enables us to scrutinize the consumption and demand nature of a consumer or a group of consumers in a detailed and comprehensive manner.

In studying the consumption and demand structure of Kinki farmers in 1957, the authors adopted Frisch's method as the analytical tool. All of the consumer's goods and services are classified into three aggregate

commodities; i.e., food, non-food goods and non-food services. Price and income elasticities of the three commodities are calculated, as are shown in Tables 2 and 5 in Section IV, respectively. The economic implications of these results are discussed in Section V, and are summarized in the ten statements. The first eight statements assert as follows:

a) As the farm size increases, both total expenditure and individual expenses spent on the three commodities rise.

b) The budget proportion of food to the total expenditure (Engel's coefficient) falls, as the total expenditure rises, with the exception that it is higher in the 0.5 to 1.0 ha. class than in the 0.3 to 0.5 ha. class.

c) The elasticity of marginal income utility computed from the wald-type indicator rises in absolute terms with an increase in income, and is nearly equal to -0.5 on the average.

b) The income elasticity of demand for food increases with a rise in income; its average level is equal to 0.74 and the range between the highest and the lowest elasticities is equal to 0.10. The income elasticities of non-food goods and services fall with a rise in income, its average level and the range are equal to 1.28 and 0.20, respectively, for the former, and they are equal to 1.10 and 0.06, respectively, for the latter.

e) The three commodities are substitutes for each other.

f) All of the direct and cross price elasticities fall with a rise in income, and the range between the highest and the lowest levels for each ela sticity is several times as great as that for each income elasticity.

g) If we neglect the substitution among the three commodities, nearly thirty percent of accuracy may be lost, on the average, in the prediction of demand of these commodities.

h) The substitution effect is generally greater than the income effect; the former is greater than the latter by 1.5 to 4.5 times.

Finally, the authors discuss the importance of demand elasticity in relation to production planning. According to the conventional procedure, the prediction of demand is possible through demand elasticities, when the information of price and income changes is available. On the other hand, the elasticities of revenues with respect to the quantities sold were employed to predict the variations of revenues in each productive sector provided that all productive sectors operate the level of quantities sold. Two statements follow in this connection:

i) The direct elasticities of revenues for the food, non-food goods, and non-food services sectors are equal to 0.26, 0.51 and 0.45, respectively.

j) Revenues of the food sector decrease by 0.17 percent when either of the other sectors increases its quantity sold by one percent. Revenues of the non-food goods sector decrease by 0.14 percent with one percent rise in the quantity sold of food, and decrease by 0.17 percent with one percent rise in the quantity sold of non-food services. Revenues of the non-food services sector fall by 0.14 percent with one percent increase in the quantity sold of food, and decrease by 0.17 percent with one percent increase in the quantity sold of non-food goods