HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	研究ノート : 定差方程式モデルと状態空間表現モデル
Author(s)	京野, 禎一; KYONO, Teiichi; 松田, 友義 他
Citation	北海道大学農經論叢, 38, 285-297
Issue Date	1982-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/10968
Type	departmental bulletin paper
File Information	38_p285-297.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

研究ノート

定差方程式モデルと状態空間表現モデル

京 野 禎 一 ・ 松 田 友 義

目　　次

1. は じ め に

経済成長や経済循環のように，時間的な関係が決定的に重要な役割を果たす分野，いわゆる動学分野の問題を定式化するために，通常，定差方程式あるいは微分方程式によるモデルが用いられてきた。

経済関係をシステムとしてとらえる経済システム論の分野においても，目標が予測あるいは制御にあるとするならば，システムモデルは動学的なものとして作られる必要があると考えられる。なぜなら，経済システムは意志決定が極めて重要な部分を成すシステムであり，通常この意志決定の効果は時間的な広がりの中で測られるものだからである。特に経済システムにおいては，制御はほとんどの場合経済政策の実行という形で為されることを前提としており，また経済政策はその効果を考える限りにおいて，その日その日の経済状態に基づいて行なわれるものではなく，現在における政策決定が将来にも影響を及ぼすことを考慮して為されていることは明らかである。この意味からも，経済システムは動学的なものとして，即ち，ダイナミックシステムとして考えられるべきものと考える。

経済学の一分野である経済システム論[1)]は，経済学としての特質を十分に

1) アメリカ・西欧では「経済システム論」という言葉が多用されるのに対して，ソ連・東欧では主に「経済サイバネティクス」という言葉が用いられる。

取り込むまでには至っていないように思われる。しかし，応用システム論としての他分野，ことに工学分野における発展には目覚しいものがある。最近のシステム工学論・制御論における成果を，経済システムのモデリングに応用することは，経済学の発展のためにも有益な結果をもたらし得るものと考える[2)]。

我々は，このような視点から，これまで経済システムの解析と制御について研究を続けてきた。しかし，経済システムをダイナミックシステムとしてとらえモデル化するに当たって，常にひとつの困難に直面しなければならなかった。この困難というのは，当面分析対象とする経済システムの内部構造，つまり入出力の因果関係をあらかじめ特定できないということであった。また，この困難は現実により近似した経済システムを考えれば考えるだけその度合が増して行く性質のものであった。

経済システムの内部構造の複雑さは，経済関係が持つ相互依存の複雑さによるものと解釈できるが，従来はこの関係を無視したり，一方的な関係だけを仮定するということでこの困難が回避されてきた[3)]。我々に与えられるのは経済システムに対する入力と出力の観測値のみであり，何らかの理論的前提[4)]を仮定しない限り，内部構造を推定することは困難であるとされてきた。本稿で論ずる定差方程式体系においても，観測された入出力（経済システムの場合はいずれの変数も経済変量の観測値から成り，ことにフィードバックを前提としたシステムにおいては，どれを入力としどれを出力とするかは分析目的によって決めざるを得ない）の関連を述べることはできても，それらの間の因果関係を完全に記述することはできないと思われる。

ダイナミックシステムをモデル化するには基本的にふたつの方法がある。ひとつはインプット・アウトプットモデルであり，もうひとつは状態空間表

2)　システム論の創始者の一人であるフォン・ベルタランフィーは，その著書の中で，各分野毎の特定の対象に関するシステム論（応用システム論）とともに，それらのシステムに共通する概念や特質あるいは原理に関する研究領域（一般システム論）の必要性を説いている（ベルタランフィー[3]）。

3)　例えば，計量モデルにおいて1部の変数を外生変数として，その値はモデルの外部から決定されるとする考え方を上げることができる。これは他の内生変数からのフィードバックはないと仮定することに等しい。

4)　普通この前提は構造方程式という形で表現される。

現モデルである。本稿では前者の例として一般的な定差方程式モデルを，後者の例として自己回帰式より導かれた状態空間表現モデルを考える。状態という変数は，それだけでは定差方程式の形で用いられ何ら本質的な興味を引くものではないが，モデルの内部構造を表現するのに便利であり，このことから状態空間表現モデルは別名内部モデルと呼ばれる。

システムの制御を考える場合，システムという言葉が暗黙の内に語っているように，対象とする変数が多数ある場合が多く，さらにこれらの変数間にフィードバックを仮定すると，相互依存関係の経路は変数の数の2乗に比例して増加して行くことになる。このような複雑な関係を入出力関係だけで記述すること，まして，定差方程式体系のように時間の異なる多数の変数を同時に含む体系によって表すことはほとんど不可能に近いと思われる。

我々は，このような困難を克服するために自己回帰モデルと，それから導出した状態空間表現モデルを利用してきた（赤池 [1]）。自己回帰モデルの適用については既に他で触れている（松田 [2]）ので，本稿においては状態空間表現モデルの意味について主に論ずることとする。

2. 定差方程式

時間あるいは期間を異にする，離散時間についての変数を含む方程式を一般に定差方程式と呼び，これまで経済学の動学分野において欠かすことのできないモデリングの手法とされてきた。定差方程式の解法については，種々の解説書が出ているのでそれに譲り，ここでは定差方程式において因果関係がどのように扱われているかについて考えることとする。

まず最も簡単な例として1階の定差方程式による定式化，修正クモの巣理論による期待価格形成の問題を取り上げる（永木 [4]）。

期待価格形成式は次のように表される。

$$(P_t^* - P_{t-1}^*) = \beta(P_{t-1} - P_{t-1}^*) \tag{2.1}$$

ここで β は期待係数であり，$0<\beta\leqq 1$ を満たしている。(2.1)式の意味は，t 期の期待価格 P_t^* と $(t-1)$ 期の期待価格 P_{t-1}^* の差が，$(t-1)$ 期の期待誤差に期待係数 β を乗じた値に等しくなるように期待価格 P_t^* が決定されるということである。この表現は一見すると P_N^* が形成されるメカニズム，因果関係を

明示しているように見える。しかし，これを用いて実際に $N-1$ 期の期待価格 P_N^* を求めてみると，これが因果関係の完全な記述になっていないことがわかる。

(2.1)式を

$$P_{t+1}^* = (1-\beta)P_t^* + \beta P_t \tag{2.2}$$

のように変形し[5]，$t=0, 1, 2, \cdots N$ を次々と代入し，逐次的に解を求めると[6]

$$\begin{aligned}
P_1^* &= (1-\beta)P_0^* + \beta P_0 \\
P_2^* &= (1-\beta)P_1^* + \beta P_1 \\
&= (1-\beta)\Big\{(1-\beta)P_0^* + \beta P_0\Big\} + \beta P_1 \\
&= (1-\beta)^2 P_0^* + \beta(1-\beta)P_0 + \beta P_1 \\
P_3^* &= (1-\beta)P_2^* + \beta P_2 \\
&= (1-\beta)\Big\{(1-\beta)^2 P_0^* + \beta(1-\beta)P_0 + \beta P_1\Big\} + \beta P_2 \\
&= (1-\beta)^3 P_0^* + \beta(1-\beta)^2 P_0 + \beta(1-\beta)P_1 + \beta P_2 \\
&\vdots \\
P_N^* &= (1-\beta)^N P_0^* + \beta(1-\beta)^{N-1}P_0 + \cdots + \beta(1-\beta)P_{N-2} + \beta P_{N-1}
\end{aligned}$$

となり，最下段の式を整理すると P_N^* は

$$P_N^* = (1-\beta)^N P_0^* + \beta\sum_{i=0}^{N-1}(1-\beta)^{N-1-i}P_i \tag{2.3}$$

となる[7]。

---

5) (2.1)式をそのまま P_t^* について解いたのでは

$$P_t^* = (1-\beta)P_{t-1}^* + \beta P_{t-1}$$

となり，時間原点を表す $t=0$ を考えたとき

$$P_0^* = (1-\beta)P_{-1}^* + \beta P_{-1}$$

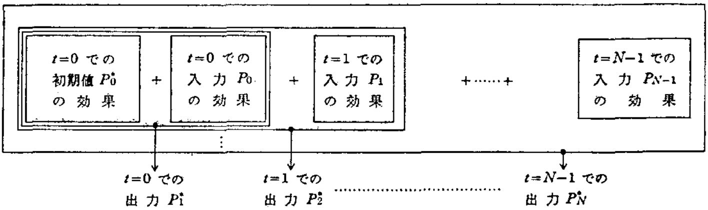
のように，理論的に不可能な負の時点での入出力を仮定せざるを得なくなるためである。

6) 定義方程式の解法には，このように逐次的に解を求める方法の他に，演算子を用いた z 変換法等がある。

7) 永木 [4] においては (2.1)式で表される定差方程式の解は

$$P_t^* = \beta\sum_{i=0}^{t-1}(1-\beta)^i P_{t-1-i}$$

とされており，初期値 P_0^* の影響が無視されている。これは $(1-\beta)\leq 1$ であることから，N を長く取ることによって $(1-\beta)^N P_0^*$ が無視できるようになるという



図—1　定差方程式モデルにおける因果関連

(2.3)式より，解はふたつの部分から成ることがわかる。第1項は$t=0$での値（初期値）の影響が累積した部分であり，第2項は$t=0$から$t=N-1$までの価格P_i $(i=0, 1, \cdots, N-1)$の影響の累積した部分である。

この期待価格形成の問題をシステムとしてとらえたとき，このシステムは図-1のように機能していると考えることができる。即ち，ある時点$(N-1)$での出力P_N^*は，$t=0$での初期値P_0^*と，$t=N-1$までの現在および過去の入力$P_0, P_1, \cdots, P_{N-1}$についての情報の全てを含んでいる。このことは逆の観点からとらえると，P_N^*を求めるためには初期値ならびに現在および過去の全ての入力に関する記憶が必要となるということである。この意味で定差方程式モデルは，過去における入力とそれらの影響の累積による出力との関係を示しているにすぎず，それぞれの出力がどのような因果関係によって形成されてきたかということ，つまり期待価格形成のメカニズムを完全に記述する表現になっているとは言えない。これが定差方程式モデルを，インプット・アウトプットモデルとする理由である。また，定差方程式の論理からすると，$t=N$期の出力P_{N+1}^*を予測するためには，初期値P_0^*とともに$t=0, 1, 2, \cdots, N$に渡る全ての入力に関する演算を繰り返すことになり，これは制御という観点からは，決して効率的な表現とはなっていないと言える。

3.　状態空間表現

経済システムの制御は，通常将来変動を何らかの形で予測し，それに対処するために何らかの処置を取るという形で行なわれると考えられる。即ち，

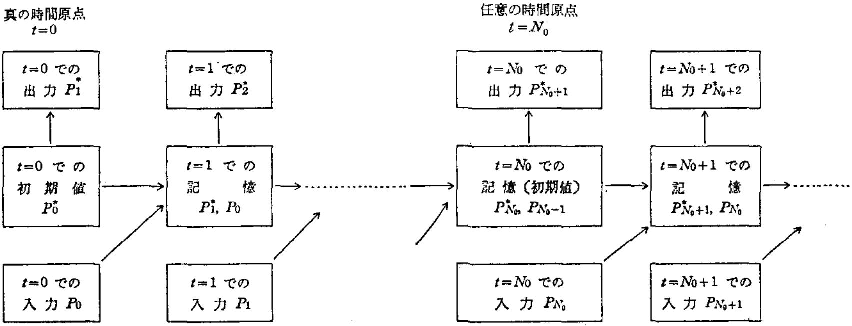
考えに基づくものであろうと思われる。しかし，我々が関心を持っているのは期待価格がどのような因果連鎖の末に形成されるかという論理であり，我々の視点からはこれを無視することはできない。

将来変動を予測できるということが前提とされているのである。前述の定差方程式のように，入出力の関係だけからも将来変動を予測することは可能である。しかし，対象とするシステムの内部構造，入力と出力との因果関係を知ることができればそれに越したことはない。定差方程式においては，その因果関係は過去の入力，初期値についての全ての情報を含む入出力関係として記述されていた。つまり，時間原点を変える毎に，入出力関係の新たな記述を必要とした。これを時間原点にとらわれずに，各時点毎の出力が決定できる形に変換したものが本稿で解説するダイナミックシステムの状態空間表現である。

まず，因果関係を各時点毎に把握できるように，入力を出力に変換するための媒介項として新たな変数を考える必要がある。そのためには，先の論議からもわかるように，定差方程式における出力決定の論理を各時点毎に完結するような形に変えてやらなければならない。つまり，任意の時間原点における初期値と，それ以後の入力についての記憶を持つ変数を定義する必要があるということである。このように考えた場合のダイナミックシステムの因果連鎖，機能は図–2のように表わすことができる。これは(2.1)式における期待価格形成の論理を各期毎に完結させたものに外ならない。即ち，1期前の入力と，当期の記憶とから出力が決定され，しかもこれが任意の時点について成り立つという形式である。

次に，上述の記憶に当たるものを状態として次のように定義する。

状態とは，ダイナミックシステムについての動きを規定するのに必要最小限の現在および過去に関する情報を示すものであり，一義的にシステムの出



図—2　ダイナックシステムの因果関連

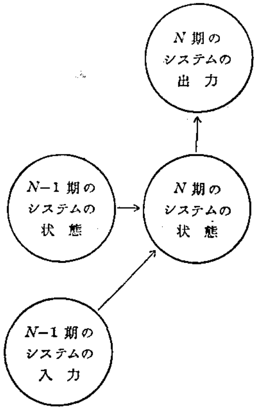
力を決定するものである。また，状態がベクトルで表されるものとして，それのつくるベクトル空間を状態空間と呼ぶ。

状態を上のように定義すると，状態空間表現モデルによる因果関係の最小単位，即ち，各期毎の出力決定様式は図–3のようにして表される。

システムの内部構造が時間的に不変である[8]と仮定すると，図–3は次のように定式化できる。

$$z(s) = \Phi z(s-1) + Gy(s-1) \qquad (3.1)$$

$$x(s) = Hz(s) \qquad (3.2)$$



図—3 状態空間表現モデルにおける因果関連の最小単位

上式において $z(s)$ は状態を $x(s)$ は出力，$y(s)$ は入力をそれぞれ表す，Φ, G, H はそれぞれ適当な次元の行列・ベクトルである。特に Φ は時点 $(s-1)$ における状態 $z(s-1)$ から，時点 s における状態 $z(s)$ への移行を規定する行列で，状態遷移行列と呼ぶ[9]。(3.1)式は $(s-1)$ 時点における状態 $z(s-1)$ と入力 $y(s-1)$ によって，s 時点におけるシステムの状態 $z(s)$ が決定されることを示し，(3.2)式は出力 $x(s)$ が，状態 $z(s)$ の関数となっていること，状態によって出力が一義的に決定されることを示している。通常この(3.1)式を状態方程式，(3.2)を出力方程式と呼ぶ。

上述のように状態という新たな変数を定義することによって得られる状態空間表現モデルと，先に述べた定差方程式を比較すると，どちらも1階の定差方程式の形をしており，形式的には何ら変わるところはない。また，どちらのモデルにおいても将来の出力を決定することができ，その点でも異なるところはない。状態という変数あるいは状態空間表現は上述のようにそれだけでは，1本の定差方程式を2本の方程式に分解しただけで，何ら本質的な

8) このようなシステムを時不変なシステム (time-invariant system)，あるいは定常システム (stationary or fixed system) と呼ぶ。それに対して，時間とともにパラメーターが変化するシステムを時変システム (time-varying system)，あるいは非定常システム (nonstationary system or variable system) と呼ぶ。

9) このように，離散時間についての状態空間表現モデルが，定差方程式の形を取ることから，状態差分方程式という別の呼び方もある。

興味を引くものではない。しかし，その出力決定様式の差，即ち因果関係の記述という点においてふたつのモデルは本質的に異なっており，制御という観点からは，内部構造を明示できる状態空間表現の方がより優れていると結論できる。

4. 互　換　性

前述のように，定差方程式モデルと状態空間表現モデルは形式的には同じである。この事実からも予想されるようにふたつのモデルの間には互換性がある。両モデルの間の関係をより明らかにするために，次にこの互換性について論ずることとする。

先の期待価格形成式を再び利用することにする。

$$P_t^* = (1-\beta)P_{t-1}^* + \beta P_{t-1} \tag{4.1}$$

ここで状態変数を次のように定義する。

$$z_t = (1-\beta)z_{t-1} + \beta P_{t-1} \tag{4.2}$$

$$P_t^* = z_t \tag{4.3}$$

(4.2) 式が状態方程式，(4.3) 式が出力方程式である。(4.2), (4.3) を合わせたものが，期待価格形成式の状態空間表現モデルである。(4.2) 式は t 時点の状態 z_t が $(t-1)$ 時点の状態 $z(t-1)$ と入力 P_{t-1} によって決定されていることを，(4.3) 式は t 時点の出力 P_t^* が t 時点の状態 z_t によって決定されることを示している。

(4.3) 式より

$$z_{t-1} = P_{t-1}^*$$

であるから，これを (4.2) 式に代入することによって

$$P_t^* = (1-\beta)P_{t-1}^* + \beta P_{t-1}$$

というもとの定差方程式が得られる。

適当に状態変数を定義してやることによって，定差方程式モデルを状態空間表現モデルに変換できることは上の例からも明らかであるが，1階の定差方程式モデルによって表し得るシステムは入力がひとつしかないと仮定された極めて簡単なシステムであり，この例からは状態空間表現の有利性を明らかにすることはできない。そこで次に2階の定差方程式モデル，高階の定差

方程式モデルを状態空間表現に変換することを考えてみる。

2階の定差方程式の例として，定差システムによる乗数・加速度モデルを利用する。このモデルは以下のように表される。

$$C_t = (1-s)\,Y_{t-1} \tag{4.4}$$

$$I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \tag{4.5}$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \tag{4.6}$$

ここで，C_t, I_t はそれぞれ消費関数，投資関数を，G_t は政府支出の関数を，Y_t は国民所得関数を表す。(4.4), (4.5) 式を (4.6) 式に代入することによって，次のような2階の定差方程式モデルが得られる。

$$Y_t = \frac{v}{s}\,Y_{t-1} - \frac{v}{s}\,Y_{t-2} + \frac{1}{s}G_t \tag{4.7}$$

次に状態変数ベクトル z_t を次のように定義する。

$$z_t = [z_{1,t}\ z_{2,t}]'$$

$$z_{1,t} = \frac{v}{s}z_{1,t-1} + z_{2,t-1} + \frac{1}{s}G_t \tag{4.8}$$

$$z_{2,t} = -\frac{v}{s}z_{1,t-1} \tag{4.9}$$

$$Y_t = z_{1,t} \tag{4.10}$$

(4.9), (4.10) 式を (4.8) 式に代入することによって，もとの定差方程式，(4.7) 式が得られる。上式を行列とベクトルを用いて表現すると，

$$\begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{s} & 1 \\ -\frac{v}{s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \end{bmatrix} G_t$$

$$Y_t = [1\ \ 0] \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix}$$

となり，

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_{t-1} + \boldsymbol{b}G_t \tag{4.11}$$

$$Y_t = \boldsymbol{H}\boldsymbol{z}_t \tag{4.12}$$

のような表現が得られる。(4.11), (4.12) 式が (4.7) 式の定差システムの状態空間表現モデルである。

次に高階の定差方程式で表されるシステムを考える。n 個のラグを持つ n 階の定差方程式システムは一般に次のように表される。

$$\begin{aligned} y_t &= a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \cdots + a_n y_{t-n} \\ &\quad + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \cdots + b_n x_{t-n} \end{aligned} \tag{4.13}$$

次に n 個の状態変数からなる状態ベクトル $\boldsymbol{z}_t$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{z}_t = [z_{1,t}, z_{2,t}, \cdots, z_{n,t}]' \tag{4.14}$$

$$z_{1,t} = y_t \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} z_{2,t-1} &= z_{1,t} - a_1 y_{t-1} - b_1 x_{t-1} \\ &= z_{1,t} - a_1 z_{1,t-1} - b_1 x_{t-1} \end{aligned} \tag{4.16}$$

とする。上式を変形すると

$$z_{1,t} = a_1 z_{1,t-1} + z_{2,t-1} + b_1 x_{t-1} \tag{4.17}$$

となる。以下同様にして

$$\begin{aligned} z_{k+1,t-1} &= z_{k,t} - a_k y_{t-1} - b_k x_{t-1} \\ &= z_{k,t} - a_k z_{1,t-1} - b_k x_{t-1} \end{aligned} \tag{4.18}$$

となり，変形すると

$$z_{k,t} = a_k z_{1,t-1} + z_{k+1,t-1} + b_k x_{t-1} \tag{4.19}$$

となる。最後に

$$z_{n,t} = a_n z_{1,t-1} + b_n x_{t-1} \tag{4.20}$$

とする。これらをまとめると，もとの n 階の定差方程式を次のような1階の定差方程式

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_{t-1} + \boldsymbol{b}x_{t-1} \tag{4.21}$$

$$y_t = (1\ 0\ 0 \cdots 0)\,\boldsymbol{z}_t \tag{4.22}$$

に直すことができる。ここで

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

である。(4.21), (4.22) 式はもとの n 階定差方程式の状態空間表現である。このように状態空間表現は，因果関係を表すために，1期前の状態を知ることによって出力を一義的に決定できるばかりでなく，一般の高階定差方程式を全て1階の方程式に変換することを可能とする。これが状態変数の定義にある必要最小限の情報を示すという意味であり，因果関係の最小単位を意味するということである。

次に状態空間表現モデルが，互いに互換性を持つという意味で，数学的に定差方程式と等価であるということを示すために，先の状態空間表現モデルを定差方程式モデルに還元してみよう。

(4.21) 式から $z_{1,t}$ は $z_{1,t-1}$, $z_{2,t-1}$ 等で表現できることがわかる。即ち

$$\begin{aligned} y_t &= a_1 z_{1,t-1}+z_{2,t-1}+b_1 x_{t-1} \\ &= a_1 y_{t-1}+b_1 x_{t-1}+z_{2,t-1} \end{aligned} \tag{4.24}$$

とすることができる。同様に (4.25) から

$$z_{2,t-1} = a_2 z_{1,t-2}+z_{3,t-2}+b_2 x_{t-2} \tag{4.25}$$

だから，これを (4.28) に代入すると

$$\begin{aligned} y_t &= a_1 y_{t-1}+b_1 x_{t-1}+a_2 z_{1,t-2}+b_2 x_{t-2}+z_{3,t-2} \\ &= a_1 y_{t-1}+a_2 y_{t-2}+b_1 x_{t-1}+b_2 x_{t-2}+z_{3,t-2} \end{aligned} \tag{4.26}$$

この操作を続けると

$$\begin{aligned} y_t = {} & a_1 y_{t-1}+a_2 y_{t-2}+\cdots+a_{n-1} y_{t-n+1} \\ & +b_1 x_{t-1}+b_2 x_{t-2}+\cdots+b_{n-1} x_{t-n+1}+z_{n,t-n+1} \end{aligned} \tag{4.27}$$

また

$$z_{n,t-n+1} = a_n z_{1,t-n}+b_n x_{t-n} \tag{4.28}$$

だから，上式にこれを代入すると

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \cdots + a_{n-1} y_{t-n+1} + a_n y_{t-n} + b_1 x_{t-1} + \cdots + b_{n-1} x_{t-n+1} + b_n x_{t-n} \tag{4.29}$$

となる。(4.29)式はもとの定差方程式(4.13)と同じである。また，上で述べた定差方程式と状態空間表現の関係は，変数 x, y がスカラーの場合ばかりではなく，ベクトルの場合でも同様に成り立つことが知られている (Aoki [5])。

以上の論述から明らかなように，状態空間表現モデルを用いると，高階の定差方程式モデルで表さざるを得ないような複雑なシステムも，1階の定差方程式で表すことが可能となる。これは，経済システムのように，多数の変数の間に時間的な遅れを伴ったフィードバック関係が存在すると考えられるシステムの定式化にとって，極めて有効な手法と言えるであろう (榊原 [6])。

6. おわりに

以上で定差方程式と状態空間表現の関係をある程度明らかにできたと思うが，最後に両者の特徴を整理しておこう。

まず，定差方程式モデルと状態空間表現モデルは片方から他方を引き出すことができるという意味で数学的に等価である。従ってどちらのモデルを用いても出力を決定することが可能である。しかし，制御を考えるという立場からは，入出力の関係ばかりではなく，システムの内部構造を知っていることが必要であり，その点について状態空間表現の方が優れていると言える。

また，本稿においては触れなかったが，状態変数として自己回帰モデルの係数を用いることによって，システムの解析と制御が一貫した手法で行なえるという有利性をも持つ。自己回帰モデルと連動させて用いる場合には，システムを構成する要素を適当に選ぶだけで，定差方程式モデルのように変数間の関連を特定化する必要もなく，経済システムのように因果関係が一方的でなく相互依存という形で複雑なフィードバックループをなしていると考えられる場合には，特に有効な手法である。あらかじめ理論的制約をおく必要がないということは，データ，即ち，現実から直接システム構造を導き出すことを可能とし，現実説明力を一層強化するものと考える。

さらに，状態空間表現モデルには，この他にも可制御性・可観測性・等価性等の制御にとって好ましい性質があることが知られている。それらについてはシステム工学等の専門書を参考にされたい。

参考文献

[1] 赤池弘次・中川東一郎： ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンスライブラリ情報電算機=9, サイエンス社, 1972.
[2] 松田友義： 食肉経済システムの時系列解析—牛肉を中心として—, 農経論叢, 第36集, pp. 59-82, 1980, 3.
[3] フォン・ベルタランフィー・長野敬他訳： 一般システム理論, その基礎・発展・応用, みすず書房, 1973.
[4] 永木正和： 野菜の価格と市場対応, 明文書房, 1977.
[5] Masanao Aoki: Optimal Control and System Theory in Dynamic Economic Analysis, North-Holland, 1977.
[6] 榊原英資・薬師寺泰蔵： 社会科学における理論と現実—実証分析における一つの試論, 日本経済新聞社, 1981, 6.