需要分析の新しい計量モデル

— トランスログ費用関数による接近 —

修　震傑・長南史男

目　　次

本論文は，個人の支出費用関数を価格，効用について二次トランスログ関数で展開して，個人選好の理論に基づいて個人の消費モデルを導き，これを市場で集計して新しいモデルを作り出す。また，これまでに計量されてきた需要分析モデルにはいくつかの問題が存在しており，この問題についても指摘する。

1．今までのモデルの考察

1954年，Stone［13］による需要分析及び消費者行動の計量的研究以来，多くの計量モデルが開発されてきた。Theil の Rotterdam モデル［14]，Deaton, Muellbauer の Almost Ideal Demand System (AIDS) モデル［3］［5］は最もよく使われているものである。Stone モデル，Rotterdam モデルは理論的に市場の集計データを直接利用して推定する。これらのモデルでは市場，あるいは社会の行動が，あたかもある個人の行動と同様に社会の消費を定めており，この個人は社会の代表人と呼ばれている。しかし，この代表人の定義については触れらず，代表人にあらわしうる条件にも触れられていない。すなわち，代表人という重要な概念を非常にあいまいに使っている。この点は，すでに多くの研究者によって指摘されてきた［3］[11］が，この他にも，なお幾つかの疑問が存在している。

DeatonとMuellbauerのAIDSモデルでは，この代表人は厳密に定義され，規定された。これはかなりの進歩である。なぜなら，この代表人の問題を解決しなければ，個人の選好理論を市場の集計レベルで応用するとき，論理的な障害が残される。AIDSモデルは個人の選好理論から出発し，個人の消費モデルを集計して社会の消費モデルを推定する。この発想はこれ以前のStoneの発想より完璧である。しかしながら，本論文ではこの費用関数の仮定に疑問を唱える。AIDSモデルの費用関数の中では，二つの特定関数を仮定している。つまり，一つは消費者個人の最低限の生活費用関数（この時効用ゼロである），もう一つは最低限生活の向上，改善のときに必要な，追加費用関数である。しかも，AIDSモデルでは，負値定性条件が常に成立するとはかぎらない，つまり，支出額が充分に大きいとき，負値定性条件は満足しない。この時，消費者行動は費用最小化あるいは効用最大化を保証しない。本論文はこれらの既存モデルに対する疑問をまず第一に指摘する。

1）Stoneモデルに対する批判

Stoneモデルを批判するために，Stoneモデルの主要な部分を以下に示す。

定義により，

$$e_i = \frac{\partial \log g_i(x,\ p)}{\partial \log x} \quad , \quad e_{ij} = \frac{\partial \log g_i(x,\ p)}{\partial \log p_j} \qquad (1-1)$$

e_{ij}はMarshallの交差弾力性で，e_iは支出弾力性である。$g_i(x,\ p)$はMarshallの需要関数である。（1－1）式より

$$\log q_i = \alpha_i + e_i \log x + \Sigma_j e_{ij} \log p_j \qquad (1-2)$$

（1－2）式を推定するとき，i財と無関係の財jが現れないようにしたいが，i財と無関係の財jとの代替効果は無いとしても，所得効果はゼロとは言えない。したがって（1－2）式のMarshallの交差弾力性をHicksの交差弾力性に代える。

$$e_{ij} = e_{ij}^* - e_i w_j \qquad (1-3)$$

により，（1－2）式は

$$\log q_i = \alpha_i + e_i(\log x - \Sigma_j w_j \log p_j) + \Sigma_j e_{ij}^* \log p_j \qquad j \in N$$

になる。

$$\Sigma_j e_{ij}^* = 0 \qquad (1-4)$$

により

$$\log q_i = \alpha_i + e_i \log(x/p^*) + \Sigma_j e_{ij}^* \log(p_j/p^*) \qquad j \in N \quad (1-5)$$

になる。但し　$\log p^* = \Sigma_j w_j \log p_j$

無関係の財との間に $e_{ij}^* = 0$ がある。したがって，

$$\log q_i = \alpha_i + e_i \log(x/p^*) + \Sigma_j e_{ij}^* \log(p_j/p^*) \qquad j \in K \quad (1-6)$$

K は i 財と関係がある財の集合である。

（1－6）式に無関係の財は現れず，i 財と関係がある財 j の K 集合の中で推定できる。（1－6）式が Stone モデルと呼ばれているものである。（1－1）式から（1－2）式になるためには，次の前提条件がある。すなわち，e_i，e_{ij} は constant であり，x，p_1，… p_n がお互いに独立であるということ。

Stone モデルは弾力性が定数であることを前提としており，この仮定が現実に合わないという点が多数の研究者によって指摘された。この点をさらに批判するつもりはない。

ここでは財 i と財 j とが無関係であるとき，Hicks の交差弾力性はゼロであるから，（1－6）式に j 財が現れなければよいという点について批判する。

まず，われわれはこの無関係の意味を吟味することから始める。（1－6）式を推定するとき，理論上，$j \notin K$，$j \in N$ の財 j の価格 $\log p_j$ は，（1－6）式に現れていても，無関係の i 財の $\log q_i$ には影響がない。だから，自由度の節約，共線性を避けるためには（1－6）式に現れない方がよい。

しかし，（1－6）式に現れない財 j の条件は $e_{ij}^* = 0$ ではない。以下ではこの点を検討する。

（1－6）式の $\log q_i$ と関係があるかないかに関して，財 j は次の条件を満足しなければならない。

$\log q_i$ と $\log p_j$ に関係がないとき

$$\frac{\partial \log q_i}{\partial \log p_j} = 0 \qquad (1-7)$$

loqi と logpj に関係があるとき

$$\frac{\partial \log q_i}{\partial \log p_j} \neq 0 \qquad (1-8)$$

（1－7）式を展開すると，

$$\frac{\partial \log q_i}{\partial \log p_j} = \frac{\partial(\alpha_i + e_i \log(x/p^*) + \Sigma_j e_{ij}^* \log(p_j/p^*))}{\partial \log p_j}$$

$$=\frac{\partial(\alpha_i+e_i\log x-e_i\Sigma_j w_j\log p_j+\Sigma_j e_{ij}^*\log p_j-\Sigma_j e_{ij}^*\Sigma_j w_j\log P_j)}{\partial\log p_j}$$

$$=-e_iw_j+e_{ij}^*-w_j\Sigma_j e_{ij}^*=-e_iw_j+e_{ij}^*=e_{ij}$$

つまり，（1－6）式と関係がない条件はMarshallnの交差弾力性がゼロになるという条件であり，Hicksの交差弾力性がゼロになるという条件ではない。つまり，Hicks交差弾力性がゼロという意味での無関係を満足しても，j財は（1－6）式から消えない。Stoneモデルの誤りはここではっきり見える。われわれはHicks交差弾力性がゼロという意味での無関係と（1－6）式についての無関係との，二つの無関係の意味を区別しなければならない。簡単に言うと，価格指数で修正された支出（あるいは所得）は効用ではない。Hicks交差弾力性はHicks需要関数にもとづいて計算されたパラメータであり，Hicks需要関数は補償変分（compensating variation）に基づいて得られた関数で，“効用”が一定とするとき補償されたものである。しかし，（1－6）式の中には支出が現れており，したがってHicks需要関数ではない。（1－6）式はHicks需要関数にある程度接近しえたかも知れないが，決してHicks需要関数そのものではない。線形関数に基づいた価格指数は生計指数にはなれない［1］。

もしも，（1－6）式の中のX/P^*は効用が補償された所得であると，無理に見なせば

$$\log q_i=\alpha_i+e_i\log(X/P^*)+\Sigma_j e_{ij}^*\log(p_j/P^*)$$

需要関数q_iはHicks需要関数である。つまり

$$\frac{\partial\log q_i}{\partial\log p_j}=e_{ij}^*,\quad \frac{\partial\log(X/P^*)}{\partial\log p_j}=0$$

で，補償された所得X/P^*はp_jと関係がない。

このとき

$$\frac{\partial\log(X/P^*)}{\partial\log p_j}=\frac{\partial\log X}{\partial\log p_j}-\frac{\partial\log P^*}{\partial\log p_j}$$

$$=\frac{\partial\log X}{\partial\log p_j}-w_j=0 \qquad (w_j\neq 0) \qquad (1-9)$$

補償されていない所得Xはp_jと関係がなければならない。

したがって，X/P^*がP_jと関係しないという仮定は，XがP_jと関係しな

いという（１－２）式が成立する仮定と矛盾している。この二つの仮定はジレンマに落ちてしまう。

一口で言うと，X/P^* を効用が補償された所得と見なせば，（１－１）式から（１－６）式を導くことはできない。すなわち，（１－６）式の q_i は X/P^*，p_1，… p_k についての一次近似展開でしかない。そのとき（１－２）式は成立しない。これはStoneモデルの論理上の誤りである。この点に注意が必要である。Stoneモデルで，補償変分（compensating variation）に基づいたヒックス交差弾力性の代わりに等価変分（equivalent variation）に基づいた“ある交差弾力性”の概念を使えば，合理性があるかも知れない。紙面の制約で，ここでは詳しく検討しない。ただ，この問題を興味ある人に提示するだけである。

Stoneモデルで推定するとき，良い結果が得られなかったが。弾力性が一定という非現実な仮定以外に，モデルを導くときの非論理性にもその原因があると言えるだろう。

Rotterdamモデルは，Stoneモデルを微分して得られたモデルであるから，もちろんこの問題が残されている。

２） AIDSについての疑問

AIDS ［３］は次の通り定義されている。

$$\log C(u, p) = \log A(p) + u \log B(p) \qquad (1-10)$$

$$\log A(p) = \alpha_0 + \Sigma_i \alpha_i \log p_i + (1/2)\Sigma_i \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_i \log p_j \qquad (1-10\,A)$$

$$\log B(p) = \beta_0 \Pi\, p_i{}^{\beta_i} \qquad (1-10\,B)$$

あるいは文献［５］により，

$$\log C(u, p) = (1-u)\log A(p) + u \log B(p) \qquad (1-10')$$

そのとき

$$\log A(p) = \alpha_0 + \Sigma_i \alpha_i \log p_i + (1/2)\Sigma_i \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_i \log p_j \qquad (1-10\,A')$$

$$\log B(p) = \log A(p) + \beta_0 \Pi\, p_i{}^{\beta_i} \qquad (1-10\,B')$$

この二つの式は，事実同じである。

（１－10）式から

$$w_i = \alpha_i + \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i u\, \beta_0 \Pi\, p_k{}^{\beta_k} \qquad (1-11)$$

ちょうど

$$u = \frac{\log(x/A)}{\beta_0 \Pi p_k \beta_k} \quad (1-12)$$

だから

$$w_i = \alpha_i + \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i \log(X/A) \quad (1-13)$$

になる。

$$\log C(u=0,\ p) = \log A(p),\ \frac{\partial \log C}{\partial u} = \log B(p) \quad (1-14)$$

ここで，logA（p）は最低限の生活費用と考えられ，logB（p）は効用の限界費用と考えられ，効用が向上するときの追加支出である。最低限生活費用logA（p）は対数の二次展開であるから，問題があまりないだろう。限界支出logB（p）は$\beta_0 \Pi p \beta$となるが，この仮定がなければ，後の展開がかなり複雑になる。しかし，このような仮定は根拠がない。効用の仮定はできるだけ避けた方がよいと思う。なぜならば，需要分析は生産分析とは違って，仮定された生産関数は実証できるが，効用は実証できないのである。

以上の疑問について無視できるとしても，次の疑問についてわれわれは十分な注意を払わなければならない。

AIDS の Slutsky 行列の要素は

$$S_{ij} = \frac{C}{p_i p_j} = (\gamma_{ij} + \beta_i \beta_j \log(X/A) - w_i \delta_{ij} + w_i w_j = \frac{C}{p_i p_j} = L_{ij} \quad (1-15)$$

負値定性条件は

$$L_{ii} = \gamma_{ii} + \beta_i^2 \log(X/A) - w_i + w_i^2 < 0 \quad (1-16)$$

実際はxが充分大のとき，w_iは解が存在しない。証明は次の通り。

$0 < w_i < 1$　だから　$-1 < -w_i + w_i^2 = -w_i(1-w_i) < 0$

$\gamma_{ii} + \beta_i^2 \log(X/A) > 1$

つまり　$$\log X > \frac{1-\gamma_{ii} + \beta_i^2 \log A}{\beta_i^2} = \frac{1-\gamma_{ii}}{\beta_{i2}} + \log A \quad (1-17)$$

このとき，w_iは存在しない。これはAIDSの欠点であろう。推定式（1−13）は効用最大化（あるいは費用最小化）に基づいて得た計測式であるから，logXが充分大であるとき，推定モデルは適応できない場合がある。と

くに支出額について外挿するとき，答えは最大解でないという恐れがある。われわれは新しいモデルにおいて，この負値定性条件が直接X，p_iに依存しないものを望んでいる，つまり，推定式の一致性を望んでいる。

2．新しいモデルの導出

新しいモデルは二段階に分け，まず個人の選好にもとづいて個人需要の推定式を導き，つぎにこの個人の行動にもとづいて社会的な行動を導く。

1）個人の行動

新しいモデルを導く前に費用関数（あるいは支出関数）の五つの性質を示す。この五つの性質は費用関数に関して基本的な要求であり，満足しなければならない。

性質1　価格Pについて一次斉次性　　$C(u,\ \theta P)=\theta C(u,\ P)$

性質2　Uについて単調増加，Pについて単調不減，少なくとも一つのp_iに対して単調増加である。

性質3　価格Pに凸性である。つまりp_iについて負値定性。

性質4　価格Pについて連続，一次，二次微分存在する。

性質5　Shephard lemmaである。

上の五つの性質を念頭に置きながら，新しいモデルを導く。

ここで唯一の仮定は，費用関数$C(u,\ P)$がトランスログ関数で表せることである。

$$\log C=\alpha_0+\Sigma_i+\left[\frac{\partial \log C}{\partial \log p_i}\right]_0 \log p_i+$$
$$+\frac{1}{2}\Sigma_i\Sigma_j\left[\frac{\partial^2 \log C}{\partial \log p_i\,\partial \log p_j}\right]_0 \log p_i \log p_j+$$
$$+\left[\frac{\partial \log C}{\partial u}\right]_0 u+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \log C}{\partial u^2}\right]_0 u^2+\Sigma_i\left[\frac{\partial^2 \log C}{\partial \log p_i\,\partial u}\right]_0 \log p_i u \qquad (2-1)$$

$$\log c=\alpha_0+\Sigma_i w_{i\,0}\log p_i+\frac{1}{2}\Sigma_i\Sigma_j\gamma_{ij}\log p_i \log p_j+\alpha_1 u+$$
$$+\frac{1}{2}\alpha_2 u^2+\Sigma_i\beta_i \log p_i u \qquad (2-1\mathrm{A})$$

ここで

$w_i = (\partial \log c / \partial \log p_i) = (p_i / c)(\partial c / \partial p_i) = p_i h_i / c = p_i q_i / c$

つまり w_i は普通の消費品 i の支出シェアである。

hi は Hicks 需要関数である。

（２－１Ａ）式は自動的に性質４を満足する。テーラー展開により，

$$\log c = \log A_{(p)} + \alpha_1 u + (1/2)\alpha_2 u^2 + \log B(p) u$$

$$= \log A_{(p)} + (\log B_{(p)} + \alpha_1) u + (1/2)\alpha_2 u^2 \qquad (2-2)$$

その中には

$$\log A(p) = \alpha_0 + \Sigma_i w_{i0} \log p_i + (1/2)\Sigma_i \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_i \log p_j \qquad (2-2A)$$

$$\log B(p) = \Sigma_i \beta_i \log p_i \qquad (2-2B)$$

（２－２）式により

$$U = -\frac{\log B + \alpha_1}{2\alpha_2} + \frac{\log B + \alpha_1}{2\alpha_2}\left[1 + \frac{4\alpha_2(\log C - \log A)}{(\log B + \alpha_1)^2}\right]^{1/2}$$

$$= -\frac{\log B + \alpha_1}{2\alpha_2} + \frac{\log B + \alpha_1}{2\alpha_2}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{4\alpha_2(\log C - \log A)}{(\log B + \alpha_1)^2} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{8}\frac{(4\alpha_2(\log C - \log A))^2}{(\log B + \alpha_1)^4} + \cdots\right] \qquad (2-3A)$$

$x = C$，　x は支出額である。

$$U = \frac{\log(X/A)}{\log B + \alpha_1} - \frac{\alpha_2 \log^2(X/A)}{(\log B + \alpha_1)^3} + \cdots \qquad (2-3B)$$

ここで，直接効用関数を仮定すると簡単になるが，過多の仮定をすればするほど現実から外れる。それに，直接効用関数を仮定するということは論理的に疑問がある。したがって，ここでは効用関数の形を仮定せず，（２－２）式から求める。

（２－３Ｂ）の分母（$\alpha_1 + \log B$）は，（２－１Ａ）より

$$\left[\frac{\partial \log C}{\partial u} u\right] = u_0 = \alpha_1 + \log B(p) = \alpha_1 + \Sigma_i \beta_i \log p_i$$

トランスログ関数の定義により，logC（u，p）の三次微分及び三次以上の微分は存在しない。

C 関数が U について単調増加により

$$\alpha_1 + \Sigma_i \beta_i \log p_i > 0, \qquad \alpha_1 > 0$$

上式は任意の $\log p_i$ にも成立するから，$-\log p_i$ を入れ替えても成立

つまり　$\alpha_1 - \Sigma_i \beta_i \log p_i > 0$

だから　$\alpha_1 - |\Sigma_i \beta_i \log p_i| > 0$　　（２－３Ｃ）

ここでは性質２を引用した。

注意したいことは，（２－３Ｃ）式は常に成立するということではない。成立しない場合，logC（u，p）の三次微分及び三次以上の微分を省略できず，そのとき，二次トランスログ関数で表せない。しかし，この問題は本論文の前提と一致せず，本論文の議論の範囲を超えている。

（２－３Ｂ）式は以下のように展開できる。

$$U = \frac{\log(X/A)}{\log B + \alpha_1} - \frac{\alpha_2 \log^2(X/A)}{(\log B + \alpha_1)^3} + \cdots$$

$$= \frac{\log(X/A)}{\alpha_1 + \Sigma_i \beta_i \log p_i} - \frac{\alpha_2 \log^2(X/A)}{(\alpha_1 + \Sigma_i \beta_i \log p_i)^3} + \cdots$$

$$= \frac{\log(X/A)}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2 \log^2(X/A)}{\alpha_1^3} - \frac{\log B \log(X/A)}{\alpha_1^2} \cdots \qquad (2-3)$$

$$= P((\log(x/A),\ \log B)$$

効用 U は log（x／A），logB についての二次元の多項式で表せる。（２－３）式は（２－２）から導かれた近似式である。

$$w_i = \frac{\partial \log C}{\partial \log p_i} = \frac{\partial \log A(p)}{\partial \log p_i} + \frac{\partial \log B(p)}{\partial \log p_i} u = \frac{\partial \log A(p)}{\partial \log p_i} + \beta_i u$$

（２－４）

$$w_i = w_{i0} + \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_j + \left[\frac{\beta_i}{\alpha_1} - \frac{\beta_i \Sigma_j \beta_j \log p_j}{\alpha_1^2}\right] \log(X/A) -$$

$$-\frac{\alpha_2 \beta_i}{\alpha_1^3} \log^2(X/A) \qquad (2-4A)$$

$$w_i = w_{i0} + \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_j + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \log \frac{X}{A} \qquad (2-4B)$$

w_i は支出シェアであるから，常に正である。したがって性質２を満足する。次に p_i について負値定性を検討する。

$$S_{ij} = \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{1}{p_j} \frac{\partial (c/p_i * \partial \log c / \partial \log p_i)}{\partial \log p_j}$$

$$=\frac{C}{p_{ip}j}\left[\frac{\partial^2 \log C}{\partial \log p_i \partial \log p_j}+w_iw_j-\delta_{ij}\right]$$

$$=\frac{C}{p_ip_j}\left[\gamma_{ij}+w_iw_j-w_i\delta_{ij}\right]=\frac{C}{p_ip_j}L_{ij} \qquad (2-5)$$

ただし　$L_{ij}=\gamma_{ij}+w_iw_j-w_i\delta_{ij}$

（δ_{ij} は Kronecker 記号である）

C と P は非特異性かつ常に正であり，L_{ii} と S_{ii} の符号は同じである。

だから，負値定性の条件は $L_{ii}<0$ である。費用関数の性質 3 を課した。

$$\frac{\partial w_i}{\partial \log p_j}=\frac{\partial^2 \log C}{\partial \log p_i \partial \log p_j}$$

$$\frac{\partial^2 \log C}{\partial \log p_i \partial \log p_j}=\frac{\partial^2(\log A+(\log B+\alpha_1)+(1/2)\alpha_2 u^2)}{\partial \log p_i \partial \log p_j}=\gamma_{ij}$$

（2－2式より）

$$\frac{\partial w_i}{\partial \log p_j}=\frac{\partial(P_ih_i/C)}{\partial \log p_j}$$

$$=e_{ij}^*w_i-w_iw_j+w_i\delta_{ij} \qquad \text{（本来の定義により）}$$

ここで，h_i は Hicks 需要関数。

だから

$$e_{ij}^*=(\gamma_{ij}+w_iw_j-w_i\delta_{ij})\frac{1}{w_1}=\frac{L_{ij}}{w_i} \qquad (2-5\ A)$$

ただし　$L_{ij}=(\gamma_{ij}+w_iw_j-w_i\delta_{ij})$

ここで e_{ij}^* は Hicks 交差弾力性。

$$\frac{\partial w_i}{\partial \log x}=\frac{\partial^2 \log c}{\partial \log p_i \partial \log x}=\beta_i\frac{\partial u}{\partial \log x} \qquad \text{（2－4式により）}$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial \log X}=\frac{\partial(p_ih_i)}{\partial \log X}=p_i\frac{\partial h_i}{\partial x}-\frac{p_ih_i}{x}=e_iw_i-w_i \qquad \text{（本来の定義により）}$$

両式の右辺が等しいので

$$e_i=\frac{\beta_i}{w_i}\frac{\partial u}{\partial \log x}+1$$

u に（2－3）式を代入して

$$e_i = \frac{1}{w_i}\left[\frac{\beta_i}{\alpha_1} - \frac{\beta_i \Sigma_j \beta_j \log p_j}{\alpha_1^{\ 2}} - \frac{2\alpha_2 \beta_i}{\alpha_1^{\ 3}} \log(X/A)\right] + 1$$

（２－３）式を一次近似して，uに（logx／A）／α_1を代入すると

$$e_i = \frac{\beta_i \partial u}{w_i \partial \log x} + 1 = \frac{\beta_i^*}{w_i} + 1 \qquad (2-5\ B)$$

ただし　$\beta_i^* = \beta_i / \alpha_1$

（ここで e_i は支出弾力性）

Slutsky 方程式により

$$s_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial g_i}{\partial x} q_j + \frac{\partial g_i}{\partial p_j}$$

したがって

$$e_{ij} = e_{ij}^* - e_i w_j \qquad (2-5\ C)$$

（ここで e_{ij} は Marshall の交差弾力性，g_i は Marshall 需要関数）

以上の分析により，（２－４Ａ），（２－４Ｂ）式の中のパラメーターが与えられると，Marshall の交差弾力性，Hicks の交差弾力性のすべてが分かるようになる。（２－４Ｂ）式を求めることは問題がないだろう。費用関数の性質，自由度の節約などにより，（２－４）式中のパラメーターを以下簡略に分析する。

費用関数 c（u，p）の全ての価格 p について一次同次性によるコスト関数の性質１を課する。

$$\log(\theta c) = \alpha_0 + \Sigma_i w_{i0} \log(\theta p_i) + (1/2)\Sigma_i \Sigma_j \gamma_{ij} \log(\theta p_i)\log(\theta p_j) +$$
$$+ \alpha_1 u + (1/2)\alpha_2 u^2 + \Sigma_i \beta_i u \log(\theta p_i)$$

だから

$$\Sigma_i w_{i0} + (1/2)(\Sigma_i \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_i + \Sigma_j \Sigma_i \gamma_{ji} \log p_j) +$$
$$+ (1/2)\Sigma_i \Sigma_j \gamma_{ij} \log\theta + \Sigma_i \beta_i u = 1$$

ここで　$\Sigma_i w_{i0} = 1$　（２－６Ａ）

であるから

$$(1/2)(\Sigma_i \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_i + \Sigma_i \Sigma_j \gamma_{ji} \log p_j) +$$
$$(1/2)\Sigma_i \Sigma_j \gamma_{ij} \log\theta + \Sigma_i \beta_i u = 0$$

θ，u が価格 P について独立であるから，上式の中の γ，β は

$$\Sigma_i \Sigma_j \gamma_{ij} = 0 \qquad (2-6\ B)$$

$\Sigma_i \beta_i = 0$　　(2－6 C)

logc(u, p)は二次微分可能で，$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$　　(2－6 D)

したがって，　$\Sigma_i \gamma_{ij} = 0$　，　$\Sigma_j \gamma_{ij} = 0$　　(2－6 E)

以上，前述した費用関数C(u, P)の五つの性質をすべて課した。

(2－4)式の推定式は

$$w_i = w_{i0} + \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i U$$

条件：$\Sigma w_{i0} = 1$　　$\Sigma_i \beta_i = 0$

$\Sigma_i \gamma_{ij} = \Sigma_j \gamma_{ij} = \Sigma_i \Sigma_j \gamma_{ij} = 0$　　$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$

$L_{ij} < 0$

効用Uは(2－3)式のように決める。問題の重要さと計算の複雑さとのトレードオフによって(2－3)式の長さを決める。

最も重要な式は

$$U = \frac{1}{\alpha_1} \log \frac{x}{A}$$

このとき

$$w_i = w_{i0} + \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i^* \log(X/A) \qquad (2-7)$$

logAはlog$P = \Sigma_i w_i \log p_i$で入れ替えたら，問題は更に簡単になり，普通の最小自乗法でも推定できる。$\Sigma w_i \log p_i$はlogAと近似し，僅か0.8%以内の誤差であり［5］，logPはStone指数と呼ばれている。推定式は線形になる。

$$w_i = w_{i0} + \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i^* \log(X/P^*) \qquad (2-7\,A)$$

(2－7 A)式は回帰分析でパラメータを求めるとき，極く簡単で，問題がないだろう。(2－7)式はある程度の計算技術を導入すれば，解答できるであろう［6］。

最も精密な推定式は(2－4 A)式であるが，(2－4 A)式を計算するためには複雑な数学が必要となる。これからの議論は簡単な(2－7)式にもとづいて分析する。紙面の制約から(2－4 A)式はただ(2－7)の元として示すにとどめよう。

以下では新しいモデル(2－7)式，(2－7 A)式を，とりあえずK－モデルと呼ぶ。

K－モデルの推定式はAIDSモデルの推定式と表面上全く同じである。しかし，この推定式のパラメータから計算して得られた弾力性の値はAIDSモ

デルの推定式のパラメータから計算して得られた弾力性の値とは異なる。

2）市場の集計

以上の分析は個人の選好に基づいた個人の消費行動である。しかし，市場の（あるいは社会的な）行動はまだ解らない。われわれが手にいれることのできるデータの殆どが市場の集計的なデータ（社会的なデータ）であるから，（２－７），（２－７Ａ）式はまだ使えない。

個人の支出式は

$$w_i = \frac{\partial \log C^h}{\partial \log p_i} = \alpha^h + \Sigma_j \gamma_{ij}^h \log p_j + \beta_i U^h$$

もしも，「社会的選好」が存在すれば，社会的な行動はまるである個人が行動すると同様に社会的な需要を決める。社会的選好の存在条件は，社会の支出関数が存在するということである。つまり

$$w_i^R = \frac{\partial \log C(u,\ p)}{\partial \log p_i} = \alpha + \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i U^R \qquad (2-8)$$

ここで，支出額は人によって異なるが，価格は各人に対して同一であると仮定する。

$$w_i^R = \frac{p_i q_i^R}{x} = \frac{p_i \Sigma q_i^h}{\Sigma_h x^h} = \frac{\Sigma x^h w_i^h}{\Sigma_h x^h} \qquad (2-9)$$

価格が各人に対して同一であるという仮定は常に成立するわけではない。例えば，大量に購入する人に割引きを実施するとき，この仮定は成立しない。もしも（２－８）式が誰に対しても成立するならば

$$\alpha^h = \alpha \quad , \quad \beta^h = \beta \quad , \quad \gamma^h = \gamma$$

この仮定は個人の選好は個人の趣味，性格，支出の歴史と無関係という意味である。この仮定は真実ではないが，ここでは支出，価格の要因に注目したいから，趣味とか，支出の歴史などの要因を省略しよう。もしも，趣味などの要因が（２－８）式に対し平均値ゼロの正規分布のノイズとなるならば，この要因を含めようと省略しようと本質的な差異は無いだろう。

$$w_i^h = \frac{\partial \log c^h}{\partial \log p_i} = \alpha + \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i u^h(x,\ p)$$

$$w_i^R = \frac{\Sigma x^h w_i^h}{\Sigma_h x^h} = \alpha + \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta \frac{\Sigma_h x^h u^h}{\Sigma_h x^h}$$

$$= \alpha + \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i U^R \qquad (2-10)$$

$$U^R = \frac{\Sigma_h x^h u^h}{\Sigma_h x^h} \qquad (2-10A)$$

w_i^R は社会の財 i に対する支出シェアである。この時，社会的な行動はまるで個人の行動と同じである。この「個人」は社会的な代表人と呼ばれている。この代表人の効用は社会のすべての個人効用 $u^h = U(x^h, p)$ を，その個人の支出が社会の支出に占める支出シェアをウエイトとして加重平均したものである。

u^h は無差別曲線で表された効用であり，序数であり，基数ではない。だから，効用を正規化しなければ，各人の間で効用を比較するのはナンセンスなことである。（2－10A）式において各個人の効用を加えるとき，各個人の効用の式を正規化すること，あるいは同じような効用関数を持っているという仮定が必要である。各個人の具体的な無差別曲線は違っていても，同じ曲線族を持っているという仮定がなければ，（2－10A）式は殆ど無意味である。同じ無差別曲線族を持っているという仮定は，支出額が不一致であるにもかかわらず，同じ支出関数を持っていることと等価である。この前段 α^h，β^h，γ^h などのパラメータが一致するという仮定は問題を簡単化するだけではなく，論理上で必要となってくる。もしも個人の効用 u^h が正規化されなければ，u^R は社会的な消費量 q によって唯一には決められない。当然，この時，u^R は社会的な効用あるいは社会的な代表人の効用ではない。u^R はただ個人の効用の組合せであり，経済的な意味はないだろう。u^R がもしも社会の代表人の効用でなければ，（2－10）式は社会的な代表人の支出シェアを表現せず，社会的な代表人の概念はナンセンスとなることであろう。すなわち，社会的な（あるいは市場の）行動は個人の選好に基づいて議論できない。個人の選好の理論を市場の行動に応用するためには，社会的な代表人の行動を推定するとき，u^R が社会的な効用として認定されなければならない。u^R が代表人の効用であれば，個人の効用 u は正規化されなければならないし，同じ様な効用関数を持たなければならない。この仮定は信じにくいかも知れないが，代表人の概念を引用する代償であろう。代表人の概念を使用せずに，市場分析ができるかどうか，この問題は本論文の課題を超えており，ここでは分析しない。

（2－10A）式は以下のような意味を持つ。つまり，社会的効用は個人の

単純な集計ではなく，支出の大きさによる加重和である。著者はこの“不公平”な結果を提唱するつもりは無いけれども，少なくとも，需要分析するとき，この結果を受け入れなければならない。

（2－10)，（2－10A）式は，まだ応用できない。それは u^h の式によって決められるからである，u^h の式は前の分析の通り，（2－3）式である。u^h の最も簡単な表記は

$$U^h = \frac{\log(x^h/A)}{\alpha_1}$$

この式を（2－10）式にいれると

$$w_i^R = \alpha + \Sigma_j \gamma_{ij}\log p_j + \beta_i^* \frac{\Sigma_h x^h \log(x^h/A)}{\Sigma_h x^h}$$

$$w_i^R = \alpha + \Sigma_j \gamma_{ij}\log p_j + \beta_i^* \log(X^R/A) \qquad (2-11)$$

ただし $\log x^R = \dfrac{\Sigma_h x^h \log x^h}{\Sigma_h x^h}$ （2－11A）

x^R は社会的な代表人の支出であり，社会的な平均支出の概念と等しくならない。社会の全ての各個人が同じ支出を支払うときこそ，社会代表人の支出額は社会の平均支出額と一致する。しかし，全ての人が同じ支出額という仮定は極端な仮定である。

（2－11）式を微分して

$$\Delta w_i^R = \Sigma_j \gamma_{ij} \Delta \log p_j + \beta_i^* \Delta \log(X^R/A) \qquad (2-12)$$

$$= \Sigma_j \gamma_{ij} \Delta \log p_j +$$

$$+ \beta_i^* \{\Delta \log x^R - \Sigma_j w_j \Delta \log p_j - (1/2)\Sigma\Sigma\gamma_{ij} \Delta(\log p_i \log p_j)\}$$

logA を $\log P^* = \Sigma w^i \log p^i$ で入れ替えると

$$w_i^R \Delta \log q_i = b_i \{\Delta \log X^R - \Sigma w_j \Delta \log p_j\} + \Sigma_j c_{ij} \Delta \log p_j$$

（2－12A）

$$b_i = w_i e_i = p_i \frac{\partial q_i}{\partial x}, \quad c_{ij} = w_i e_{ij}^* = \frac{p_i p_j s_{ij}}{x} \qquad (2-12B)$$

この式は表面上で Rotterdam モデルと一致しているけれども，Rotterdam モデルの支出額は社会の平均支出である。K－モデルの支出額は社会代表人の支出額であり，（2－10A）により決められる。

X^R は社会の平均支出で，logA を $\log P^*$ で入れ換えたら，（2－11）式は

Stone モデルと Rotterdam モデルと一致する。しかし，社会の平均支出が社会代表人の支出と等しいという条件は，社会の全ての人の支出が同じという条件である。この仮定は納得できないだろう。

（2－11）式を推定するとき，Maximum likelihood 法で推定すれば，logA を $\log P^*$ で入れ換える必要はない。したがって，Rotterdam モデルはいくら精密化しても，（2－11）式のようにはならないだろう。

$$\log x^R = \frac{\Sigma_h \log x^h x^h}{\Sigma_h x^h} = \frac{\Sigma_0^\infty f(x) x \log x}{\Sigma_0^\infty f(x) x} = \frac{\int_0^\infty f(x) x \log x dx}{\int_0^\infty f(x) x dx} \qquad (2-13)$$

f(x)は個人についての支出の分布であり，上式の積分は求められる。分布密度関数がわからなければ，ランクで接近するしかない。支出の分布についての仮定は実証できるから，支出の分布を求めるのはそれほど難しくないだろう。

（2－13）式の積分は定積分である。$\log x^R$ は分布関数のパラメータに依存するし，各個人の支出額がわからなくても $\log X^R$ を計算できる。

分母の積分は社会の平均支出である。

例として，支出の分布が対数正規分布であるとき（2－13）式の $\log x^R$ は（注）

$$\log x^R = \mu + \sigma^2 \qquad (2-14)$$

μ は logX の平均値で，$\Sigma_h \log x^h / n$ と等しく，σ^2は logX の分散である。X_0を平均支出とすると，$x_0 = \exp(\mu 1/2 \sigma^2)$。

$$\log x^R = \log X_0 + (1/2)\sigma^2$$

（2－11）式に代入すると

$$w_i^R = \alpha_i + \Sigma_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i^* \log \frac{x_0 + (1/2)\sigma^2}{A} \qquad (2-15)$$

$\beta_i > 0$ とき i 財は贅沢品で，$\beta_i < 0$ とき i 財は必需品である。社会の平均支出が一定であっても，社会の支出（あるいは所得）に不平等があるとき，贅沢品の支出シェアは平等であるときより大きく，必需品の支出シェアは平等のときより小さい。これはわれわれの感覚と一致している。Stone, Rotterdam モデルはこの不平等の要因を反映できない。

3．結　び

本論文では，個人の費用関数を効用と価格について二次トランスログ関数

で展開して，消費財需要の推定式を導いた。この個人の需要の推定式を市場で集計して，社会の消費需要の推定式を導いた。この推定式は同次性，単調性などの費用関数の五つの性質をすべて満足している。K－モデルの推定式はAIDSモデルと同じであるが，弾力性を求めるときK－モデルはAIDSモデルと違う。負値定性条件もAIDSモデルと違う。特例として，社会の支出額の分布が対数正規分布するときの，最も簡単な推定式を導いた。この推定式からみると,社会の平均支出水準はもちろん支出シェアに影響があるが,社会の不平等も支出シェアに影響を与える。平均支出が変わらなくても，社会の支出が平等なとき，市場の必需品の支出シェアは増加する傾向があり，不平等なとき，贅沢品の支出シェアが高まる。K－モデルの推定式はAIDSモデルの推定式と形が同じであるから，今までのAIDSモデルの実証はK－モデルの傍証になる。もう一度強調したいことは，これによって計算された弾力性の値がAIDSモデルとは異なるということである。

（注）　社会について個人の支出額の分布が対数正規分布であるとき

$$\log x^R = \frac{\int_0^\infty f(x) x \log x dx}{\int_0^\infty f(x) x dx} = \mu + \sigma^2$$

の説明：

分子は

$$\int_0^\infty f(x) x\log x dx = \int_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma x} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)}{2\sigma^2}\right\} x\log x dx$$

$$\int_0^\infty f(x) x\log x dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}\right\} \exp(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{x+\mu\ 1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp(x+\mu) dx$$

$$= -\sigma \int_0^\infty x\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-x) dx$$

$$+ \sigma \int_0^\infty x\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp(x) dx$$

$$+\sigma\ \mu\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2\ \sigma^2}\right)\exp(-x)\,dx$$

$$+\sigma\ \mu\int_0^\infty x\exp\left(-\frac{x^2}{2\ \sigma^2}\right)\exp x dx$$

$$\sigma=\frac{\exp(\mu)}{(2\pi)^{1/2}\sigma}$$

Laplace 変換によって

$$=-\alpha\ \pounds_1\left\{x\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right\}+\alpha\ \pounds_{-1}\left\{x\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right\}+$$

$$+\alpha\ \mu\ \pounds_1\left\{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right\}+\alpha\ \mu\ \pounds_{-1}\left\{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right\}$$

$$=-\alpha\ \sigma^2[1-(\pi/2)^{1/2}\sigma\ \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{2^{1/2}}{2}\sigma\right)]+$$

$$+\alpha\ \sigma^2[1-(\pi/2)^{1/2}\sigma(-1)\exp\frac{1}{2}\sigma^2\,\mathrm{erfc}\left(-\frac{2^{1/2}}{2}\sigma\right)+$$

$$+\sigma\ \mu(\pi/2)^{1/2}\sigma\ \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{erfc}\,[(1/2)^{1/2}\sigma]+$$

$$+\alpha\ \mu(\pi/2)^{1/2}\sigma\ \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{erfc}\,[-(1/2)^{1/2}\sigma]$$

$$=(\mu+\sigma^2)\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)[\mathrm{erfc}\,((1/2)^{1/2}\sigma)$$

$$+\mathrm{erfc}\,(-(1/2)^{1/2}\sigma)]\frac{1}{2}$$

$$=(\mu+\sigma^2)\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

分母は

$$\int_0^\infty f(x)\,x dx=\exp(\mu+\sigma^2/2)$$

だから　$\log x^R=\mu+\sigma^2$

参考文献

[1] S. D. Braithwait, The Substitution Bias of the Laspeyres Price Index : An Analysis Using Estimated Cost-of-Living Indexes, The American Economic Review, March 1980, VOL. 70 NO. 1

[2] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, (中文訳「科学出版社」1981年)

[3] A. S. Deaton and J. Muellbauer, Economics and Consumer Behavior, (Canbridge University Press 1980)

[4] A. S. Deaton, The Analysis of Consumer Demand in The United Kingdom 1900–1970, Econometrica, Vol. 42, No. 2 March, 1974 p341–367

[5] A. S. Deaton and J. Muellbauer, An Almost Ideal Demand System, The American Economic Review, June 1980 VOL. 70 NO. 3 p312–326

[6] Thomas B. Fomby R. Carter Hill Stanley R. Johnson, Advanced Econometric Methods, Springer-Verlag New york Inc. 1984

[7] C. E. V. Leser, Forms of Engel Functions, Econometrica, Vol. 31, No. 4 (October, 1963) 694–703

[8] A. Lewbel, The Rank of Demand System : Theory and Nonparametric Estimation, Econometrica, Vol. 59, No. 3, May. 1991, 711–730

[9] Hiroshi Mori and Biing-Hwan Lin, Japanese Demand for Beef by Class : Results of the Almost Ideal Demand System Estimation and Implication for Trade Liberalization, (「農業経済研究」第61巻第4号, 1990)

[10] J. Muellbauer, Prices and Inequality : The United Kingdom Experience, The Economic Journal, (March 1974) p32–55

[11] 澤田　学「Almost Ideal Denand System と食料需要分析」(北海道大学「農経論叢」第37集　1981)

[12] 澤田　学「食料需要と価格，所得，世帯属性　需要体系分析による接近」(「農業経済研究」第57巻第4号，1986)

[13] R. Stone, Linear Expenditure System and Demand Analysis : An Application to the Pattern of British Demand, The Economic Journal, (Sept. 1954) p511–527

[14] H. Theil, The Information Approach to Demand Analysis, Econometrica, Vol. 33, No. 1 (January, 1965) p67–87

[謝辞]

本論文をまとめるに当たり，北星学園大学澤田裕教授，帯広畜産大学澤田学助教授より貴重な助言をいただいた。また，北大理学部数学科陳蘊岡講師より，数学のことをチェックしていただいた。記して謝意を表する。