「数列の極限」指導をめぐる諸問題

山　口　　格
（室蘭工業大学講師）

1．は じ め に

高等学校の数学の教材として微積分がはじめて登場してから約40年経過した。この間に，微積分は高校数学の中心に位置づいているようになった。しかし高校の微積分の教え方については批判も多い。大学で数学を教えているものの多くは何らかの意味で高校の微積分については不満ないし，不充分さを感じているといってもいいすぎではないだろう。そのような意見の一つとして吉田洋一のものをみてみよう。

「高校で微積を課することには，じつは，わたしは反対なのである。“論証，論証”とやかましくいっておきながら，微積のところへ来ると，とたんにいいかげんな議論でごまかしている。――また高校ではごまかさざるを得ないだろう。高校数学の目的は生徒のあたまを混乱させることにあるのだろうか。（中略）とりあえず，高校数学から微積を追放することを提唱するだけに止める。そうすると微積は大学一年で初めて学ぶことになるが，その際できるなら厳密な論理によったものを教えることにしたい。と同時に，あまりごたごたすると学生が理解しにくいだろうから，あっさりとしたものにしなければならない。」[1]

この文章の「高校ではごまかさざるを得ないだろう。」という判断に注目したい。また高校の数学教科書の著者である小平邦彦も次のように言っている。

「高校数学を学んだ人は実数とはどんなものか一応知っているわけである。しかし高校数学の実数論は現代数学の立場から見れば厳密性に欠ける点があって，本講座の基礎としては不十分である。」[2]

高等学校の現場でも，微積分廃止論ではないが，厳密さについては，上の2人と同様の意見がある。数学教育協議会の浅野芳夫は「高校で極限をあつかうことにどれ程の意味があるかも疑問です。高校で厳密な論理展開ができないものとすれば，中途半端な形の「極限論」にはふれない方がよいともいえます。」[3]と発言している。

さて小論はこれらの批判にこたえる形で，厳密な微分積分を高等学校で教える道を提唱しようとしているものではない。むしろここで試みようとしていることは，従来の高校数学の再編成を，自分の数学論にそって展開しようとしているのである。厳密さということは，ある場合にはとても重要であるが，他の場合にはとても重荷になることもある。終始一貫厳密さをモットーとする必要はない。

本稿はこのような現状の中で，微積分の中心ともいえる「数列の極限」を教える方法を，科学として数学を教えるという立場に立って将来授業書として確定させる前段の作業として考察したものである。

2．指導要領と教科書について

現行の指導要領と教科書をみると，極限に関しては次の諸点が問題点となる。

第一に現在使われている高等学校の「微分・積分」のほとんどの教科書では，数列の収束の定義は次のようになっている。

「一般に，無限数列

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$

の項 a_n が，n が限りなく大きくなるにつれて，一定の値 α に限りなく近づくとき，数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい，α を数列 $\{a_n\}$ の極限値という。」[4)]

あとでくわしく述べるが，この定義の不備はいわば周知の事実であって，歴史的にも18世紀風の定義ともいえるものである。しかしながらこれを改良するうまい手だてがないということで，上記浅野芳夫のような意見が出ているのである。また最近ある教科書では，極限を巻末に微分積分を終了してからつけ足しとしてやむをえずという形でおいているものなどが出ている。[5)]

第二にすべての教科書では，コーシーの収束判定条件などの記述がなされていない。これは指導要領にないためであるが,極限値がわからないときに収束を判定する条件にふれていないので,極限値を求めてしまってからはじめて収束がわかるという論理としてはさかさまの行為を常に強いられることになっている。

第三にほとんどの教科書で，不等式による量評価が弱いことである。これは上のように極限の存在を問題にするという意識が弱いのだから，不等式は必要でないということになっているのであろう。しかしながら「はさみうちの原理」にもふれていない教科書もある。

第四に指導要領では「簡単な初等関数の範囲で微分法・積分法を活用する」とあるが，指数関数の微分積分はやることになっているのに，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ を極限のところで扱うことはしないのである。指数関数のような初等関数について微積分を展開することを保障するだけの極限の取扱いが保障されていないと言える。

学問としての微積分を高等学校で教えるという立場にたてば，微積分の基礎としての極限論を強化する試みは不可避ではなかろうか。しかし上に紹介したように，多くの識者の意見はこの点で「高等学校では無理である」と，極限論をなんらかの意味できちんとやる方向に否定的なのが現状である。

3．従来のプランについて

ここでは従来の微積分のプランについてのくわしい検討は行なわないが，学問としての微積分を高等学校で教えるという立場に立てば，目ぼしいものはほとんどないのが実状であろう。わずかに大田邦郎の「高等学校における微積分の初歩としての二次関数の指導過程」[6)]がある。しかしこれは微積分を教えるプランというよりは，微積分の考えで二次関数を教えるという体裁のものである。本稿筆者の意図は微積分そのものを教える方法が目標であって，大田論文の意図とはずれがある様である。

数学教育協議会における従来のプランは，いずれも量の変化の解析という点に中心があるように思われる。大田プランでも等加速運動を問題にして，具体的な量の変化を解析することに重点がある。しかし大田プランでは極限は避けて，計算を形式的に遂行しているに止まっている。筆者は極限の具体的指導法を提起する道を試論としてここに述べたい。「量の変化の解析」という

視点は初等数学から高等数学の入口を眺めた場合，興味ある方法であるが，数学独自の論理構成をもった解析学そのものの内的論理を大胆に展開する方法をさぐる方がより大切であると思われる。

4：内容の具体的検討

(1) 極限の定義

数列の収束の定義は教科書では

「一般に無限数列

$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$

の項 a_n が，n が限りなく大きくなるにつれて，一定の値 α に限りなく近づくとき，数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい，α を数列 $\{a_n\}$ の極限値という」

となっているが，このような定義はまずい。

例えば

n がかぎりなく大きくなれば，a_n は α にかぎりなく近づく

ことの対偶をとると

a_n と α の近さにかぎりがあれば，n の大きさにかぎりがある。

になるが，今

$$a_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right),\quad \alpha = 1$$

としてみると，この対偶ではあてはまりそうな気もする。しかし明らかにこの数列は収束しない。つまりこのような定義のしかたは，「論理的形式」として不備なのである。極限の概念は変化の状態を一定の論理形式にのせるわけだから，ギリシャの昔からいろいろ苦心されてきた。一応の形が $\varepsilon-\delta$ 論法として固まったのは19世紀である。今の高等学校の教科書にある定義はそれ以前のスタイルである。20世紀初頭に出た，C. Jordan の Cours d'Analyse（1909）の第1巻にすでに次のように定義されている。

On dit que la suite $x_1,\ldots,x_n\ldots$ converge vers la limite c si, pour toute valeur de la quantité positive ε, on peut assigner un entier ν, tel que l'on ait

$$|x_n - c| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de n supérieures à ν.

現在にいたるもこの書法は変りがない。

さて数列の極限に対する $\varepsilon-\delta$ 式記述を検討する為にここでは次のようにこの記述を固定しておこう。

「任意の正の数 ε に対して，正の整数Nを適当にとれば

$n \geqq N$ のとき　$|a_n - a| < \varepsilon$

とすることができる。」

これが数列 $\{a_n\}$ の極限が a ということの定義である。これを記号的に書けば

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N ; n \geqq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

となる。

この論法は大学生にとっても仲々やっかいに思われているが，その原因は ε（イプシロン）などと，使いなれないギリシャ文字が出ることや，$\forall$（任意の）$\exists$（存在する）という「論理的双対」が使用されることや，絶対値付不等式に不慣れなことなどもあげられる。しかし a_n が a に

近づくという状態を上の論理形式にとじこめることによって直観的理解から遠くはなれていることが最大の原因であろう。

この難点をいくぶん改良するために次のようなことを考えた。ギリシヤ文字$\varepsilon>0$のかわりに10^{-m}（mは正の整数）を任意にとる。これは論理的にはεを取るのとかわりがない。そうすると次のようになる。

<u>収束の定義</u>　数列$\{a_n\}$がaに収束するとは，どんなに大きな整数mを与えても，それに対して正の整数Nを見いだして

$$n>N ならば \quad |a_n-a|<10^{-m}$$

となるようにできることをいう（Nはmに関係してきまる）。

このように書いてみると前の定義とそんなに変りないように見えるが，内容を直観的に把握するにはこの方が良いのである。例をとって説明しよう。いま数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

が

$$a_1=0.10000\cdots$$
$$a_2=0.16000\cdots$$
$$a_3=0.16600\cdots$$
$$a_4=0.16660\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n=0.\underbrace{16666\cdots6}_{n-1個}\underbrace{000}_{0が続く}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

と与えられたとしよう。明らかにこの数列の極限aは

$$0.16666\cdots$$

である。$\dfrac{1}{6}$を無限小数に表すと0.16666…になるから$a=\dfrac{1}{6}$といえる。上の数列の第4項a_4は小数第4位までaに一致する。同様に第n項a_nは小数第n位までaと一致する。このようにnが大きくなればa_nとaの無限小数表示は一致する桁数が大きくなる。

一般に2つの数xとyが近ければ，xとyの無限小数表示は小数点以下何桁かまで一致する。このことを考えに入れたのが上の

$$n>N ならば |a_n-a|<10^{-m}$$

の表示である。

いまの例では，a_mとaとは最初のm桁が一致している。たとえばmを6とする。

$$a_6=0.166666\,\vdots\,00\cdots$$

そしてこの項のあとの項はすべて

$$a=\frac{1}{6}=0.166666\,\vdots\,6\cdots$$

との差が10^{-6}より小さくなるのでN＝6とすればよい。同様にどのmについてもN＝mとすればよい。10^{-m}という不等式の右辺は一致する桁数を表すと考えると直観的にははるかに把握しやすくなる。

(2)　極限が推測できない場合

a_nの形が簡単なものは極限が容易に推測される。しかし極限の推測がむずかしいものの中に

重要な例が多い。現行の教科書では極限が推測しにくいものはあつかっていない。こういったものも扱う方が良いということで，ここで$\sqrt{2}$に収束する有理数列を作る問題をとりあげてみよう。[7)]

例．$\sqrt{2}$が有理数でないことは知っているとする。$\sqrt{2}$への収束の速い近似列をつくろう。それは次の二つの考え方に基づいて構成される。

(1)　二つの数uとvの平均$\dfrac{u+v}{2}$は，uとvの間にある。

(2)　$\sqrt{2}<u$なら$v=\dfrac{2}{u}<\sqrt{2}$でありその逆も成り立つ。

次に(1)と(2)からu_nが$\sqrt{2}$に対する近似ならば

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)\cdots①$$

はさらに良い近似であることがわかる。ここでためしに(2)をみたすよう$\sqrt{2}<u_1$として$u_1=2.0$を取ろう。①の式に$n=1$として代入すると

$$u_2=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{2}\right)=\frac{1}{2}\ (2+1)\ =1.5$$

電卓を用いて次々にu_{n+1}を計算してみよう。

$u_1=2.0$

$u_2=1.5$

$u_3=1.4166\cdots$

$u_4=1.41421566\cdots$

$u_5=1.41421356\cdots$

$u_6=1.41421356\cdots$

(3)　数値計算について

上の例のような場合電卓を用いての数値計算は容易で有益である。数値計算による収束の体験は極限が推測されにくいものに対しても重要である。また数値計算を実行するには収束が速くなければならない。収束の速さを問題にした例を考えるべきである。数値計算の例としてはフィボナッチ数列なども良い。

(4)　コーシーの収束判定条件

(1)で述べた収束の定義では，数列$\{a_n\}$の極限aがわかっていないときは，この定義をあてはめるのはむずかしい。そこでコーシーの収束判定条件を次の形で教える必要が出て来る。

コーシーの収束判定条件　どんな大きなmを与えても

n，$k>N$のとき$|a_n-a_k|<10^{-m}$

ならば，数列$\{a_n\}$は収束する。Nはmに関係してきまる。

(5)　不等式による量評価について

上にあげた$\sqrt{2}$に収束する有理数列のような例が教科書にあまり書かれていないのは，極限値の存在を明記できないからであろう。

極限値の存在については，実数の連続性とかかわるのであるが，不等式による量評価は解析学としてオーソドックスな手法である。前述の例でいうと次のようになる。u_1を任意の正数として

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\ \left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$$

によって数列u_1, u_2, $\cdots u_n$, …をつくる。この数列は$\sqrt{2}$に収束する。このことを証明してみよう。

$$u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)-\sqrt{2}=\frac{1}{2u_n}(u_n{}^2+2-2u_n\sqrt{2})$$

$$u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2u_n}(u_n-\sqrt{2})^2 \cdots\cdots ②$$

これより次のことがわかる。

(a) u_nが正であったとすれば，$u_{n+2}-\sqrt{2}$が正であるから，u_{n+1}はつねに$\sqrt{2}$より大きい。

(b) $n \geqq 2$に対して$u_n > u_n-\sqrt{2}$　したがって$\dfrac{u_n}{u_n-\sqrt{2}}>1$となる。

そこで②の右辺に$\dfrac{u_n}{u_n-\sqrt{2}}$をかけると，右辺は増加して

$$u_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{u_n-\sqrt{2}}{2}$$

これは，$\sqrt{2}$と近似u_{n+1}との差が，$\sqrt{2}$とu_nの差の半分以下であることを示している。そこで

$$u_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})<\frac{1}{2^2}(u_{n-1}-\sqrt{2})<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}(u_2-\sqrt{2})$$

であり十分大きなnに対して$(u_2-\sqrt{2})/2^{n-1}$はいくらでも小さくなるから，$\lim_{n\to\infty} u_n=\sqrt{2}$である。

(6) 極限の線型性及び四則について

高校の教科書では極限の線型性及び四則を用いて極限値を求める計算にそうとう力がさかれている。しかし極限の線型性及び四則についてそれが成り立つことの証明はなされていない。(1)で述べた定義でこれらの性質を証明するには絶対値についての性質に習熟しなければならない。しかしこれも解析学としてはいつも用いる手法なのである。

(7) 数列の極限のその他の題材

その他の題材としては

1) 単調数列の極限と$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

2) $\{r^n\}$

3) Bolzano–Weierstrass

等がある。数列の収束の問題を考えるとき，まずその数列が収束するかどうか判別し，次にその極限値を求めるのが普通の順序であるが，数列の収束の定義の中にその極限値が入っているため，極限値をみつけてから収束することを証明しなければならない。これでは論理的にも順序が逆で不便であるから，数列そのものの性質から収束列かどうか判定できる方法が必要である。その最も基本的なものは

　有界な単調数列は収束列である

という命題である。これの証明には上限の存在を用いる。つまり実数の連続性が必要になる。この命題をやっておくと

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

が扱える。重要な$\{r^n\}$については現行教科書がくわしくふれている。Bolzano-Weierstrassについては教科書ではふれられていない。本論5においてこれにふれる。

5．実数の連続性について

前項(7)にも述べたが，数列の極限を科学的に扱うには，どうしても実数の連続性を何らかの意味で扱わねばならない。更にくわしくこのことを述べれば，$\sqrt{2}$に収束する有理数列

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$$

の収束を考えるのに，このような有理数列の極限となる数の存在を仮定しなければならない。つまりたよるべき要素の全体としての実数の概念をきちんときずいておくことが不可欠になるのである。極限について多くの人が高校での科学的な扱いを無理と判断する理由は，この実数論が一つの原因となっているはずである。もちろん教科書ではこんなことにはふれられていない。

いうまでもなく，解析学を展開するには実数の連続性が基礎となっている。しかしデデキントの切断やカントルの方法で構成的に述べることはなくても，実数の連続性を使う立場で公理的に定式化することはできる。この立場で問題を整理しておこう。

(A)　アルキメデスの公理。任意の正の数α，βに対して，適当に自然数nをとれば，$n\alpha>\beta$。

(B)　上に有界な集合は上限をもつ。

(C)　コーシーの収束判定条件。基本列は収束する。

(D)　区間縮小列の収束（カントルの条件）

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対して，

$$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\ ;\ b_1\geqq b_2\geqq\cdots$$

$$a_n\leqq b_n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)\qquad\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

が成り立てば，この2つの数列は共に収束しかつ極限値は等しい。

(E)　上に有界な単調増加数列は収束する。

(F)　（ボルツアノ・ワイエルシュトラスの定理1）

有界な無限集合は少なくとも1つ集積点をもつ。

(G)　（ボルツアノ・ワイエルシュトラスの定理2）

有界な数列 $\{a_n\}$ に対して，その適当な部分列

$$a_{n1},\ a_{n2},\ \cdots\ (n_1<n_2<\cdots)$$

をとり出してこれが収束するようにできる。

(H)　ヒルベルトの完全性公理。実数の体系に，何か他のものを数として追加して，より大きい体系をつくり，もとの数の間の演算はそのまま保存して，しかもこの新しい体系が四則演算および，数の順序関係に関して，実数の体系と同じ性質を保つようにすることはできない。

実数の連続性は次の7つの互いに同値な性質として自由に用いられている。

1°　(A)+(H)

2°　(A)+(C)

3°　(A)+(D)

4°　(E)

5°　(B)

6°　(F)

7°　(G)

数列の極限を扱うには2°又は3°あるいは4°を用いると都合がよい。

6．前提となる事項について

極限を4，(1)で述べたように行うには，実数の無限小数展開を前段に用意する必要がある。

〈注〉

1）吉田洋一　「初等数学同好会」，『数学セミナー』，1972年10月
2）小平邦彦　岩波講座「基礎数学」，解析入門Ⅰ，p 1
3）浅野芳夫　「研究の現状と問題点－高校微積分③」，『数学教室』，1984年8月
4）東京書籍　「微分・積分」（昭和59年版），p 3
5）三省堂の教科書　「微分・積分」（昭和59年版）
6）大田邦郎　「北大教育学部紀要第40号」，1982年
7） P. Lax, S. Burstein, A. Lax　Calculus with Applications and Computing vol. 1. 1976 Springer より