数学教育における不等式の研究

山　口　　格
（室蘭工業大学講師）

第１章　順序の公理と不等式

§1. はじめに

数学というものを量にかかわる学問として理解すれば，不等式はその量の評価にとって最も基本的な道具であり，表現形式であろう。しかし数学教育において不等式に正面から言及した研究はことのほか少ないように思われる。高等学校までの数学の授業で不等式が，系統だてて教えられる実践はあまり聞かない。現在の中学校や高等学校では条件付不等式のほうが絶対不等式よりも重視して教えられているようである。ところが学生が高等数学の学習の方へ一歩足を踏み入れると，解析学における収束の証明や誤差の評価など，不等式を満たす解を求める問題よりも，不等式を用いて数学的明言を行うことの方がいちじるしく多くなるのである。高校までの不等式の扱いと，大学での不等式の扱いのこのような差異は学習者にかなりとまどいを与えているようである。不等式には多くの種類がありながら，一般的な原理はほとんどなく，統一的な扱いが困難なこともこれまで研究の対象からはずれていた原因の一つであろう。しかし一つの不等式にいくつもの証明があって，統一的な扱いが困難だということは，数学解析の奥深さ多様さをかいま見せるものとして興味を感じられる。

§2. 問題の設定

そこで問題の設定を適切におこなうことは不等式の場合なかなかむずかしいのであるが，ここでは須田勝彦が次のように述べているのに注目したい。

「解析学において，不等式の扱いは等式の扱い以上に本質的であるといえる。それだけに不等式の問題は，整理すること自体が困難であるにしても，少なくとも次の三つの問題群を含むことになろう。

〔問題群一〕　実数の基本性質は，演算の公理，順序の公理，連続の公理という三つのグループに整理されている。この順序の公理に相当する諸性質をどう教えるか。（どのように形式的でなく，生徒の知的関心にこたえる形に改善しうるかという問題でもある。）

〔問題群二〕　たとえば三角不等式のように，本質的に距離，または距離空間の概念とかかわった重要な不等式（コーシー・シュヴァルツの不等式や，積の定積分と定積分したものとの積の関係等々）など，解析学で登場して来る基本的な不等式を選び出し，適当な問題などの形で指導過程に組みこむこと。

〔問題群三〕　小・中学校における不等号，不等式の指導の問題全体とも関連して来ることではあるが，近似による数概念の把握の問題あるいは，近似とは何かという問題。」[1)]

問題群一にかかわっていえば，順序に関する性質をいくつか天下りに与えても，生徒の知的関心をひくことはできない。順序の性質の内部にひそむ深い構造を光にさらすことが必要なの

である。

問題群二では解析学で登場する基本的な不等式にはどんなものがあるか，それらはどのようにして証明されるか，それらの不等式の応用はどのようにされるか，などが問題になる。

このような形での課題の設定は学問としての数学を教えることの可能性を追求する立場にとって必要かつ適切であると考えられる。ここでは上の問題群一と問題群二に関して，一つの解答を提出することを目論んでみた。

§3. 実数の公理について

はじめに論議をするのに便利なように実数の公理を記しておこう。

実数の公理

実数体とは集合 R でつぎの公理群をみたすように，1° R×R から R への 2 つの写像 $(x, y)\mapsto x+y$ および $(x, y)\mapsto xy$ と，2° R の要素の間の関係 $x\leq y$（$y\geq x$ とも書く）の定義されているもののことである；

（I） R は体である。

（II） R は順序体である。すなわち，つぎの公理がなりたつ：

（II.1） $x\leq y$ で $y\leq z$ なら $x\leq z$：

（II.2） “$x\leq y$ *and* $y\leq x$” は $x=y$ と同値：

（II.3） R の要素 x, y は $x\leq y$ か $y\leq x$ のどちらかである；

（II.4） $x\leq y$ なら $x+z\leq y+z$；

（II.5） $0\leq x$ で $0\leq y$ なら $0\leq xy$.

関係 “$x\leq y$ *and* $x\neq y$” のことを $x<y$ または $y>x$ と書く。

（III） R はアルキメデス順序体である。すなわち，つぎのアルキメデスの公理をみたす：任意の実数 $0<x$ および $0\leq y$ にたいし，$y\leq n\cdot x$ となる整数 n が存在する。

（IV） R は区間縮小公理をみたす：閉集合列（$[a_n, b_n]$）が，各 n について $a_n\leq a_{n+1}$，$b_{n+1}\leq b_n$ のとき，この列の共通分は空でない。

ここに記した実数の公理はディュドネによるものである[2]。

高等学校の教科書の記述を一つ例にとってみてみよう。数研出版の「新編　数学 I」(昭 58 年版）には次のようにある。

「実数の大小関係については，次の性質が基本的である。

1　任意の 2 つの実数 a, b について $a>b$, $a=b$, $a<b$ のうち，どれか 1 つの関係だけが成り立つ

2　$a>b$, $b>c$ ならば $a>c$

3　$a>b$ ならば $a+c>b+c$, $a-c>b-c$

4　$a>b$, $c>0$ ならば $ac>bc$, $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

5　$a>b$, $c<0$ ならば $ac<bc$, $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$」

ディユドネの公理（II.1）から（II.5）までと上の高校教科書の 1 から 5 の性質を比較してみると両者はよく符合している。それでは高校教科書では上の 1～5 を実数の公理の一部分としてのせているのであろうか。「実数の大小関係については，次の性質が基本的である。」という教科書の記述はもちろん公理としてのせているわけではない。実数の大小関係を整理すると次

の1〜5が基本となりますというような意味であろう。しかし他方では次のような問もみられる。

「問　性質3を用いて，次のことを証明せよ。$a>b \Longleftrightarrow a-b>0$」

これは明らかに1〜5を公理的に扱う意図がある問である。

このように高校教科書の記述の立場は数学的にはあいまいな立場であるといわざるを得ない。

それではディユドネのように公理をもって記述したらどうであろうか。すなわち，実数は体としての演算の公理の外に（II.1）から（II.5）をみたす順序 $x \leq y$ が定義されているとするのである。（公理(III)，(IV)についてはここでは言及しない。）この場合に実際に任意の2数 a，b の順序はどうつけるかが問題であろう。

また小学校いらい親しんで来た自然数，整数，有理数を実数体Rの中にどのように実現させるかという問題もある。このようなことは高等学校で扱うには少々むづかしいようである。そこでディユドネ流の公理的方法以外の方法を検討してみよう。

Hardy–Littlewood–Pōlya は1934年に次のように述べた。

「We can secure an axiomatic basis for theorems of inequality by taking, in addition to the 'indefinables' and axioms already referred to, one new indefinable and two new axioms. We take as indefinable the idea of a *positive* number, and as axioms the two propositions:

I. Either a is 0 or a is positive or $-a$ is positive, and these possibilities are exclusive.

II. The sum and product ot two positive numbers are positive.」[4)]

これは Artin–Schreier の1927年の仕事である[4)]。この Hardy–Littlewood–Pōlya の指摘は，須田勝彦が問題群一として挙げていることと関連がある。順序の公理に関する諸性質を，上の二つの公理によって整理することを試みてみよう。

§4. 公理と不等式の定義

実数の公理系のうち可換体であることは自由に用いることにして，次の二つの命題を公理として認めることにしよう。Rを実数全体の集合とし，P をRの0を含まない集合とするとき，

公理1　a をRの任意の元とするとき，a は0であるか，$a \in P$ か $-a \in P$ の三つの場合のどれか一つだけが起こる。

公理2　$\forall a \in P$，$\forall b \in P \Longrightarrow a+b \in P$，$ab \in P$ である。

さて不等式を定義する。

定義　$a-b \in P$ であるとき，そのときに限り，$a>b$ である。

命題1　a，b を任意のRの元とするとき，次の三つのうちの一つだけが成り立つ。

$a=b$，$a>b$，$b>a$

これは a，$b \in$ R なら $a-b \in$ R だから，公理1の a の代りに $a-b$ を考えればよい。

命題1で $b=0$ としてみると，$a=0$，$a>0$，$0>a$ となる場合の一つだけが成り立つことが出来る。従って命題1は公理1と同値である。$a \in$ R のとき，$a+x=0$ となる x のことを $-a$ と書く。$a \in P$ のとき a を正の数，$-a$ を負の数と呼ぶ。

命題2　正の数 a と負の数 b の積 ab は負の数である。

負の数の集合を N と書こう。$a \in P$，$-b \in P$，$a(-b) \in P$　（公理2），$\therefore\ -[a(-b)] \in N$，

$-[a(-b)]=-[-(ab)]=ab$（これは代数の演算）　$\therefore\ ab \in N$　▶

（注）　命題２の証明でつかった－の符号とかっこを交換できることは次のようにしてわかる。

$$a(-b)+ab=a(-b+b) \qquad \text{分配法則}$$
$$=a\cdot 0=0$$
$$\therefore\ a(-b)=-(ab) \qquad \blacktriangleright$$

命題３　２つの負の数 a，b の積 ab は正の数である。

$-a\in P, -b\in P$，$(-a)(-b)\in P$　（公理２）

一方，$(-a)(-b)=ab$　　$\therefore\ ab\in P$　　▶

命題３と公理２によって０以外のすべての実数の平方は正の数になる。すなわち

命題４　すべての実数 a について，$a^2\geqq 0$ が成り立ち，等号は $a=0$ の場合に限る。

これまで集合 P というのは公理１と公理２によって規制されるというだけでどんな集合かはっきりしなかった。ここでは P にどんな要素が入っているかを調べてみよう。

$a=1$ を取ろう。$a\neq 0$ であるから $a^2\in P$（命題４）。$a^2=1^2=1\in P$

$a=2$ はどうであろうか，$1\in P$ がわかったので，$2=1+1$ であるから公理２により，$2\in P$ である。

以下同様にしてすべての自然数は P の要素であることがわかる。

$a=\dfrac{1}{2}$ の場合，$2a=1$，$2\in P$，$1\in P$ でもし $a\notin P$ なら，$a\in N$（公理１），命題２より $2a$ は負になる，これは矛盾，したがって $a=\dfrac{1}{2}\in P$ である。

このようにすれば有理数についてはすべて決定することができる。

無理数については，切断の下組に正の数があれば，正の数と決めることにする。

以上のようにして集合 P を確定することができるが，このような手続きは高校生の知的興味をよびおこす教材になりうるものである。

§５．不等式の基本的諸性質について

上の公理１と公理２だけから不等式に関するすべての基本的諸性質を導き出すことができる。これらの性質をまとめて書くと次のようになる。

1°　推移律　$a>b,\ b>c \Longrightarrow a>c$

2°　加　法　$a>b,\ c>d \Longrightarrow a+c>b+d$

3°　乗　法　$a>b,\ c>0 \Longrightarrow ac>bc$

　　　　　　$a>b,\ c<0 \Longrightarrow ac<bc$

4°　減　法　$a>b,\ c>d \Longrightarrow a-d>b-c$

5°　乗　法　$a>b>0,\ c>d>0 \Longrightarrow ac>bd$

6°　除　法　$a>b>0,\ c>d>0 \Longrightarrow \dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$

7°　累乗と累乗根　m，n 正整数　$a^{\frac{m}{n}}>b^{\frac{m}{n}}$，$b^{-\frac{m}{n}}>a^{-\frac{m}{n}}$

ここにあげた諸性質はディュドネの公理や高校教科書の“基本的性質”を包含している。これらの諸性質を２つの公理から導くことは数学の理論体系を演繹する見本となって高校生の興味を引くことであろう。証明はいずれも短いものである。ここでそのいくつかを述べておこう。

命題５　$a>b$ でかつ $b>c$ ならば，$a>c$ である。一般に書けば，$a_1\geqq a_2$，$a_2\geqq a_3$，…，$a_{n-1}\geqq a_n$ であれば，$a_1\geqq a_n$ で，$a_1=a_n$ となるのは，すべての a_i が等しい場合のみである。

証明　この推移律は，数学的帰納法によって証明してもよいが，直接的証明を $n=4$ の場合に

試みよう。

$a_1 \geqq a_2$, $a_2 \geqq a_3$, $a_3 \geqq a_4$ とする。不等式の定義から，$a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, $a_3 - a_4$ は P の要素であるか，0 であるかのいずれかである。したがってこれらの和を考えると

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) = a_1 - a_4$$

は公理 2 によって，P の要素か 0 かのいずれかである。0 になるのは $a_1 - a_2 = 0$, $a_2 - a_3 = 0$, $a_3 - a_4 = 0$ である場合に限る。従って $a_1 \geqq a_4$ で等号が成り立つのは $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ の場合のみである。

▶

命題 6　$a > b$ でかつ $c > d$ であれば，$a + c > b + d$ である。一般には $a_1 \geqq b_1$, $a_2 \geqq b_2$, …, $a_n \geqq b_n$ であれば，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ で等号が成り立つのは，$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_n = b_n$ のときに限る。

証明　この場合も数学的帰納法が良いのであるが，直接的証明を試みよう。

仮定から $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$, …, $a_n - b_n$ は P の要素であるか 0 であるかのいずれかである。従って

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

は P の要素であるか 0 であるかのいずれかである。(公理 2 を n 個の和，積に一般化した形をあらかじめ証明しておく必要があるが，これは容易である。)　▶

第 2 章　古典的な不等式

§ 1.　古典的な不等式

数学では古典的ないくつかの不等式がある。ここではそれらの古典的な不等式を取り上げて研究してみよう。これは第 1 章，§ 2 の問題群二に対する一つの解答の準備になるであろう。古典的な不等式のリストをはじめにまとめておこう。

古典的な不等式の表

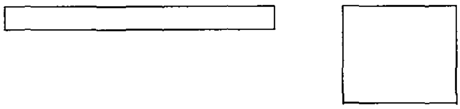
名　　　称	不　　　等　　　式
相加平均、相乗平均に関する不等式	$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$
コーシーの不等式	$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n)^{\frac{1}{2}}$ $\geqq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$
ヘルダーの不等式	$(a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^p)^{\frac{1}{q}}$ $\geqq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$
三角不等式	$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^{\frac{1}{2}} + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)^{\frac{1}{2}}$ $\geqq \{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2\}^{\frac{1}{2}}$
ミンコウスキーの不等式	$(a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + b_2^p + \cdots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}$ $\geqq \{(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p\}^{\frac{1}{p}}$

ここで $a_i \geqq 0$, $b_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とし，$p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ とする。これらの古典的な不等式は，表を一見するとすぐわかるように相互に関係がある。ヘルダーの不等式およびミンコウスキーの不等式で $p = 2$ となった場合が，それぞれコーシーの不等式および三角不等式である。等号は次の場合に成り立つ。相加平均，相乗平均の不等式では $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき，ヘルダー

の不等式では (a_i^p) と (b_i^q) の二組の数列が比例するとき，それ以外の不等式では (a_i) と (b_i) が比例する場合である。

§ 2. 相加平均，相乗平均に関する不等式

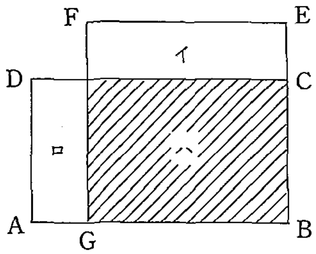
最初にある最大最小問題から一つの不等式を導き出そう。ユークリッド原本第6巻の定理27に，ある定められた周長の長方形の中で面積が最大のものを求めよという問題がある。周囲の長さが4mの様々な長方形をくらべてみよう。一辺の長さが2mに近いものは面積が小さい，横が2mに近くなれば従は短くなるからである。そこで一辺の長さが大きすぎず小さすぎない適当な長方形の面積が最大となるだろうと考えられる。



第1図

そこで4mの周長の長方形の中で面積が最大となるのは何かという問題ができる。

この問題を次のようにして解こう。ここではToeplitz と Rademacher が約半世紀前に書いた書物 Von Zahlen und Figuren に従って述べることにする。与えられた長さUを全周長とする長方形ABCDと一辺の長さが$\frac{1}{4}$Uである正方形BEFGとを考える。今この正方形の面積の方が長方形のよりも大であることを示してみよう。図では正方形と長方形との共通部分ハは斜線を引いてある。正方形はこのハの部分とイの部分とから成り，元の長方形は同じくハの部分とロの部分とから成っている。さてAB+BCは長方形の全周の半分であるから，正方形の全周の半分であるGB+BEに等しい。故にAG+GB+BC=GB+BC+CE。従ってAG=CEである。即ちイの縦はロの横の長さに等しい。イの横の長さは正方形の一辺の長さであり，ロの縦はその一部分であるから，イの横の長さより長くない。一辺の長さが等しい2つの長方形においては他辺の長いものの方が大きい面積をもつから，イはロよりも大である。故にイ＋ハはロ＋ハよりも大，すなわち正方形は長方形よりも大なる面積をもつ。以上で与えられた周長の長方形の中，正方形の面積が最大なることがわかった。



第2図

今長方形の両辺の長さをそれぞれ x, y とすれば，面積は xy である。上に述べたことより，この面積は全周長が $x+y+x+y=2(x+y)$ なる正方形の面積よりも小さい。そして正方形の一辺は全周の4分の1であるから $\frac{1}{2}(x+y)$ であり，その面積は $\frac{1}{4}(x+y)^2$ である。上のギリシャ的な話し方を現代風の数学の語で置き換えれば次のようになる。二つの正の数 x, y に対して

(1) $xy \leqq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

が成立する。これはまた

(2) $\sqrt{xy} \leqq \frac{x+y}{2}$

とも書ける。すなわち2数の相乗平均は相加平均よりも小であるかまたは等しい。等しい場合

は長方形が元来正方形であった場合である。このときは$x=y$である。故に上の等号は$x=y$のときにのみ成立する。(2)の不等式を相加平均，相乗平均に関する不等式とよぶ。

§3. 代数的な証明

前節で述べた相加平均，相乗平均に関する不等式を次のように定式化してこれに今度は代数的な証明を与えよう。

命題1　a，bを負でない実数とするとき，

(3)　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

が成り立ち，等号は$a=b$のときに限って成り立つ。

証明を与える前に(3)を少し変形しておこう。$a=c^2$，$b=d^2$となる負でない実数c，dを考え，(3)に代入して

(4)　$\dfrac{c^2+d^2}{2} \geqq cd$

を得る。これより

(5)　$c^2+d^2-2\,cd \geqq 0$

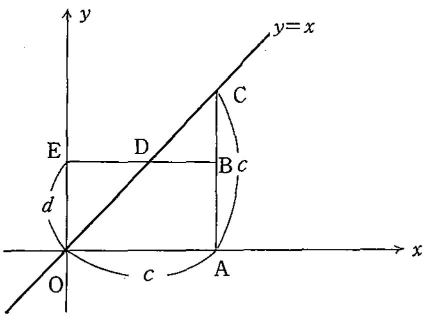
であるが，この同値な不等式(5)が成り立つことは$c^2+d^2-2\,cd=(c-d)^2$としてみると，任意の実数の2乗はつねに負にはならない（前章命題4）ことから

(6)　$(c-d)^2 \geqq 0$

が成り立つことがわかる。(6)(5)(4)(3)と逆にたどって(3)が正しいことが証明される。

§4. 幾何学的証明

ところで前節で(4)の形に不等式を直しておいたので次のようなもう一つの幾何学的証明が得られる。



第3図

座標平面上に$y=x$のグラフを画く。点C，Dをこの直線上の点として，座標を$(c,\ c)$，$(d,\ d)$とする。A$(c,\ 0)$，B$(c,\ d)$，E$(0,\ d)$の各点を図のように取る。

△OACの面積は$\dfrac{c^2}{2}$，△ODEの面積は$\dfrac{d^2}{2}$である。長方形OABEは，二つの三角形OACとODEにおおわれているからこれらの面積の間には

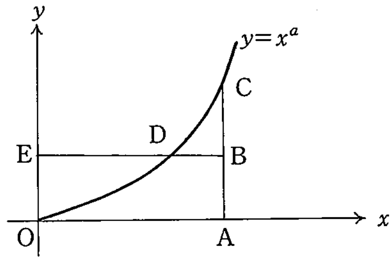
(7)　△OAC＋△ODE≧長方形OABE

の関係がなりたつ。長方形OABEの面積はcdであるから(7)を記号で書くと

$$\frac{c^2+d^2}{2} \geqq cd$$

すなわち(4)と同じ不等式が得られた。等号がなりたつのは△BCDの面積が0になる場合に限り，CとDが重なる場合である，このときは$c=d$となる場合である。

このような幾何学的方法はこの不等式を一般化するのに利用できる。3では直線$y=x$を用いたが，この直線の代りに曲線$y=x^a$を用いてみよう。($a>0$とする)



第4図

この場合も明らかに面積の関係として

OAC+ODE≧OABE

が成り立つ。OACの面積は$\int_0^c x^a dx = \frac{c^{a+1}}{a+1}$　ODEの面積は$\int_0^d y^{\frac{1}{a}} dy = \frac{a}{a+1} d^{\frac{a+1}{a}}$となる。従ってこの面積の関係は記号で表わすと

$$\frac{1}{a+1} c^{a+1} + \frac{a}{a+1} d^{\frac{a+1}{a}} \geqq cd$$

である。ここで$p=a+1$，$q=\frac{a+1}{a}$とおいてみると$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{a+1}+\frac{a}{a+1}=1$となる。この$p$，$q$を用いて上の関係を整理すると

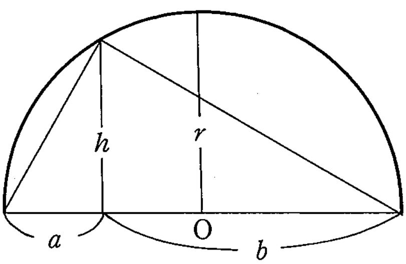
(8)　$$\frac{c^p}{p}+\frac{d^q}{q} \geqq cd$$

を得る。これはYoungの不等式と呼ばれている古典不等式の一つである。

§ 5. もう一つの幾何学的証明

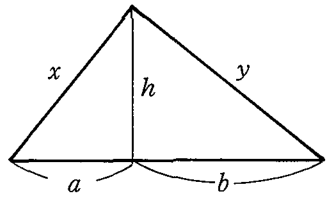
さて幾何学的証明が出たのでもう一つついでに，図形をつかった証明を述べておこう。

第5図は直径が2つの線分の長さaとbの和に等しい半円で，hは直径をa，bに分ける点で



第5図

この直径に垂直に立てた直線が円周と交わる点までの距離，rはこの円の半径である。このhを計算してみよう。



第6図

第6図のように x, y をとると
ピタゴラスの定理より

$$a^2+h^2=x^2$$

$$b^2+h^2=y^2$$

を得る。辺に加えると

$$a^2+b^2+2h^2=x^2+y^2$$

ところが $x^2+y^2=(a+b)^2$（ピタゴラスの定理）であるから　$a^2+b^2+2h^2=(a+b)^2$

$$2h^2=2ab$$

$$\therefore\ h^2=ab \qquad h>0 \text{ より，} h=\sqrt{ab}$$

即ち h は a と b の相乗平均である。ところが r は $\dfrac{a+b}{2}$ であり，第5図より $r \geqq h$ すなわち

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

を得る。

§6. 3つの数に関する場合

今までの2数についての相加平均・相乗平均の不等式は3数についてもなりたつ。

命題2　三つの負でない実数 a, b, c について

(9)　$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

がなりたつ。等号は $a=b=c$ のときに限りなりたつ。

3乗根の記号を消すため，

$$a=x^3,\quad b=y^3,\quad c=z^3$$

とおいて，(9)に代入する

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqq xyz$$

この不等式は次の不等式と同値である。

(10)　$x^3+y^3+z^3-3xyz \geqq 0$

そこでこの(10)の不等式が任意の負でない実数 x, y, z に対して成り立つことをいえばよい。(10)の左辺を因数に分解してみよう。

(11)　$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$

x, y, z は負でない実数であるから，$x=y=z=0$ となる場合を除いては $x+y+z>0$ である。
それゆえ第2の因数

(12)　$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \geqq 0$

を示せばよい。前に用いた(5)の不等式

$$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy\geqq 0$$

を利用する。

(13) $x^2+y^2\geqq 2xy \quad x^2+z^2\geqq 2xz \quad y^2+z^2\geqq 2yz$

という三つの不等式を辺に加えて

(14) $2(x^2+y^2+z^2)\geqq 2(xy+yz+zx)$

を得る。これは(12)と同値である。▶

§ 7. n 個の数の場合

2 個，3 個の数についての相加平均，相乗平均に関する不等式の証明をみてきたが，この関係は一般に n 個の数についても成り立つのである。

命題 3　任意の正の整数 n について，n 個の負でない実数を a_1，a_2，a_3，…，a_n とするとき

(15) $$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\geqq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

が成り立つ。等号は $a_1=a_2=\cdots=a_n$ の場合に限り成り立つ。

この一般の場合の不等式の証明を調べてみよう。これまでと同じ方法で因数分解を用いることが最初に考えられる。たとえば $n=4$ の場合には，次の形の不等式になる。

$$\frac{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4}{4}\geqq x_1x_2x_3x_4$$

これに同値な不等式として

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4-4x_1x_2x_3x_4\geqq 0$$

が因数分解できるかという問題である。しかしこのやり方で一般に

$$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n-nx_1x_2\cdots x_n\geqq 0$$

の左辺を因数分解することによる証明法はわかっていない。

そこでここでは，数学的帰納法による技法の一つである「前向き数学的帰納法」と「後向き数学的帰納法」による証明について述べる。

§ 8. 前向き数学的帰納法

$n=2$ から始めよう。命題 1 によって $a\geqq 0$，$b\geqq 0$ の実数に対して

(16) $$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

が成り立っている。

任意の負でない実数 a_1，a_2，a_3，a_4 について

(17) $a=\dfrac{a_1+a_2}{2}$，$b=\dfrac{a_3+a_4}{2}$

とおいて，(16)の a，b に(17)を代入しよう。

$$\frac{\dfrac{a_1+a_2}{2}+\dfrac{a_3+a_4}{2}}{2}\geqq\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)}$$

これより

(18) $$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqq \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)}$$

という不等式を得る。この右辺に注目して(16)をもう一度適用すると

(19) $$\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)} \geqq \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}}$$

を得る。(18)と(19)を不等式の推移律で結ぶと

(20) $$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

が得られる。これは(15)の $n=4$ の場合である。

今の場合は $n=2$ よりスタートして $n=4$ に到達した。このようなことは引きつづき行うことができる。(20)式をもとに今と同じことを適用してみよう。b_1, $b_2\cdots$, b_8 を負でない実数として

$$a_1=\frac{b_1+b_2}{2},\quad a_2=\frac{b_3+b_4}{2},\quad a_3=\frac{b_5+b_6}{2},\quad a_4=\frac{b_7+b_8}{2}$$

として(20)に代入すると,

$$\frac{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8}{8} \geqq \sqrt[4]{\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)\left(\frac{b_3+b_4}{2}\right)\left(\frac{b_5+b_6}{2}\right)\left(\frac{b_7+b_8}{2}\right)}$$

となる。前と同じように

$$\frac{b_1+b_2}{2} \geqq \sqrt{b_1b_2}\quad \frac{b_3+b_4}{2} \geqq \sqrt{b_3b_4}\quad \frac{b_5+b_6}{2} \geqq \sqrt{b_5b_6}\quad \frac{b_7+b_8}{2} \geqq \sqrt{b_7b_8}$$

を用いて右辺を評価すれば

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_8}{8} \geqq \sqrt[4]{\sqrt{b_1b_2}\sqrt{b_3b_4}\sqrt{b_5b_6}\sqrt{b_7b_8}}$$

従って

(22) $$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_8}{8} \geqq \sqrt[8]{b_1b_2b_3\cdots b_8}$$

を得る。これは $n=8$ の場合であり。この方法で $n=2$, 4, 8の場合に不等式が成り立つことをみた。この方法を続ければ, n が2の累乗の場合に不等式が成り立つことがわかるであろう。

命題4　相加平均・相乗平均に関する不等式は, n が 2^k, $k=1$, 2, $\cdots$ の形のとき成り立つ。

証明　$k=1$ のとき。$n=2^1$ のときは真であることがわかっている。$n=2^k$ のとき真であると仮定して, 2^{k+1} のときも真であることを導く。$2^{k+1}=2^k\cdot 2=2n$ であるから $2n$ の場合に真であることをいうことになる。$n=2^k$ として, n 個の任意の負でない実数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n に対して

(23) $$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

が成り立つと仮定する。任意に与えられた $2n$ 個の負でない実数を, $b_i(i=1, 2, \cdots 2n)$ として

$$a_1=\frac{b_1+b_2}{2},\quad a_2=\frac{b_3+b_4}{2},\quad \cdots\cdots,\quad a_n=\frac{b_{2n-1}+b_{2n}}{2}$$

とおき, (23)に代入する。前と同じようにして

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{2n}}{2n} \geqq (b_1b_2\cdots b_{2n})^{\frac{1}{2n}}$$

を得る。すなわち n の場合から $2n$ の場合が導かれたことになる。不等式は $k=1$ のとき真であるから，前向きの数学的帰納法の原理によって，すべての k に対して真であることがわかる。つまり不等式(23)は 2 の累乗の形のすべての n に対して成り立つことがわかった。

§9. 後向きの数学的帰納法

2 の累乗の形をした整数に対しては，証明できたが，そのほかの整数に対してはどうしたらよいであろうか。ためしに $n=3$ について考えてみる。これは前に違った方法で証明したのであるが，もう少し一般性のある方法はないか考えてみよう。$n=2^2=4$ の場合はすでに前向きの数学的帰納法で証明されているが，この場合から $n=3$ の場合を導いてみよう。$n=4$ の場合は

(24) $$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqq (a_1a_2a_3a_4)^{\frac{1}{4}}$$

であるが，ここで $a_1=b_1$，$a_2=b_2$，$a_3=b_3$ とおき a_4 を

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{b_1+b_2+b_3}{3}$$

となるように選ぶとしよう。これらの値を(24)に代入すれば

$$\frac{b_1+b_2+b_3}{3} \geqq \sqrt[4]{b_1b_2b_3\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)}$$

が得られる。両辺を 4 乗して $\dfrac{b_1+b_2+b_3}{3}$ で割ってみると

$$\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)^3 \geqq b_1b_2b_3$$

となる。これより同値な不等式

(25) $$\frac{b_1+b_2+b_3}{3} \geqq \sqrt[3]{b_1b_2b_3}$$

を得るが，これは $n=3$ の場合なのである。今やった技法は Specialization（特殊化）の技法と呼ばれる。これをもっと一般にして $n=2^k$ から $n-1$ の場合を証明するのを後向きの数学的帰納法と呼ぶ。

今 n に対して不等式(23)が真であると仮定すれが，$n-1$ の場合も真であることを示そう。

(26) $a_1=b_1$，$a_2=b_2$，…，$a_{n-1}=2_{n-1}$

として，a_n の値を

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}$$

が成り立つように定める。これを(23)に代入すれば

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1} \geqq \sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_{n-1}\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}\right)}$$

を得る。両辺を n 乗して $\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}$ で割れば

$$\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geqq b_1b_2\cdots b_{n-1}$$

を得る。これは $n-1$ の場合と同値である。命題 3 の証明はこれで完成した。▶

§10. 微分法による証明

代数的な証明は今まで見たように特殊な技巧を要する。次に微分法による証明を $n=3$ の場合についてみよう。a, b, $c>0$ として

(27) $$(abc)^{\frac{1}{3}} \leqq \frac{a+b+c}{3}$$

を証明する。

(27)の両辺を3乗して b で割って，(27)に同値な不等式

(28) $$ac \leqq \frac{1}{b}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

を得る。これを証明してみよう。a, c を任意の正数とするとき，関数

(29) $$f(b)=\frac{1}{b}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

は，区間 $b>0$ において最小値が $\geqq ac$ であることをみる。$b\to 0$ のときあるいは $b\to\infty$ のとき $f(b)\to\infty$ である。よって $f(b)$ はある正数で最小値をとる。(内点で最小値をとるということ) この点で従って $f'(b)=0$ となる。

$$f'(b)=-\frac{1}{b^2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3+\frac{1}{b}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2=0$$

b^2 を掛け，$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ で割る。

$$-\frac{a+b+c}{3}+b=0$$

従って

$$b=\frac{a+c}{2}$$

f は $b=(a+c)/2$ で最小値をとり，この点における f の値は

$$f\left(\frac{a+c}{2}\right)=\frac{1}{(a+c)/2}\left\{\frac{a+c+(a+c)/2}{3}\right\}^3=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$$

である。よって，任意の点 b に対し $f(b)\geqq\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$，相加平均と相乗平均の不等式の $n=2$ の場合より

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2\geqq ac$$

なので，

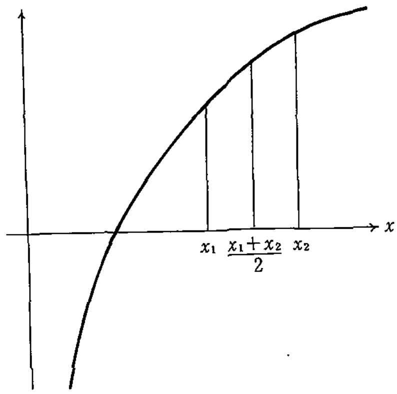
(30) $$f(b)\geqq ac$$

を得る。等号は $b=\frac{a+c}{2}$ かつ $a=c$ のときに限り成立する。すなわち $a=b=c$ のときである。代数的証明の場合は $n=3$ の場合を一般の場合に適用出来なかったが，微分法による証明では，$n=3$ の場合を一般の場合に適用することは容易である。▶

§11. 凸関数を使った証明

ここでもう一つ図形を用いた証明を与えよう。曲線 $y=\log x$ を考える。

この曲線が上に凸なことは微分法からすぐわかる。従って曲線上の任意の2点を結ぶ弦は曲



第7図

線の下側にある。故に $x_1,\ x_2>0$ に対し

(31) $$\log\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqq\frac{\log x_1+\log x_2}{2}$$

（等号は $x_1=x_2$ に限る）が成り立つ。これは

(32) $$\frac{x_1+x_2}{2}\geqq\sqrt{x_1x_2}$$

と同値である。

同じ理由から

(33) $$\log\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\geqq\frac{\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n}{n}$$

が $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n>0$ に対し成り立つ，これから命題3は明らかである。

このように凸関数の性質はなかなか有用なのである。

§ 12. 斉次性を使った証明

不等式の両辺の斉次性に注目した証明を与えよう。

$$A(x_1,\ \cdots,\ x_n)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\qquad G(x_1,\ \cdots,\ x_n)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

と両方の平均を書いておくと，我々の命題は次のようになる。

命題5　負でない数 $x_1,\ \cdots,\ x_n(n\geqq1)$ に対して，

$$G(x_1,\ \cdots,\ x_n)\leqq A(x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

が成り立つ。等号はすべての x_i が等しいとき，その時に限り成り立つ。

さて $A=A(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ と書くと，相加平均，相乗平均に関する不等式は，

$$x_1x_2\cdots x_n\leqq A^n$$

に同値となる。

この2つの平均は同次（homogen）である。すなわち $x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ と書くと

$$\mathrm{A}(\lambda x)=\lambda\mathrm{A}(x),$$

$$\mathrm{G}(\lambda x)=\lambda\mathrm{G}(x)\quad(\lambda\geqq0\text{ に対して})$$

となる。従って証明の際に $\mathrm{A}(x)=1$ と仮定しておいてよい（$\lambda=A^{-1}$ とおけばよいから）。

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=n \Longrightarrow x_1x_2\cdots x_n<1$$

すべての x_i が等しい場合（$x_i=1$ になる）と，或る x_i が 0 の場合（$x_1x_2\cdots x_n=0$）はこの命題は自明である。従って，$x_i>0(n=1, \cdots, n)$ に対して

$$x_1+\cdots+x_n=n, \text{ 或る } x_k \neq 1 \Longrightarrow x_1x_2\cdots x_n<1$$

を証明すればよいことになる。数学的帰納法を用いよう。$n=1$ の場合はおこらない。$n=2$ の場合 $x_1=1+\varepsilon$，$x_2=1-\varepsilon(\varepsilon>0)$ とすると，$x_1x_2=1-\varepsilon^2<1$ となる。帰納法の n から $n+1$ にうつるところは次のようにする。

$n+1$ 個の正の数 x_0，x_1，$\cdots x_n$ を次のようにとる。

$$x_0+x_1+\cdots+x_n=n+1$$

今 $x_0<1$ で $x_1>1$ とする。$x_0=1-\alpha$，$x_1=1+\beta(\alpha, \beta>0)$ とおく。$x_1'=x_0+x_1-1=1-\alpha+\beta$ に対して，$x_1'+x_2+\cdots+x_n=n$ となる。仮定から $x_1'x_2\cdots x_n\leqq 1$（$x_1', x_2, \cdots, x_n$ はすべて等しいこともあり得る）となる。$x_0x_1=1-\alpha+\beta-\alpha\beta<x_1'$ より

$$x_0x_1x_2\cdots x_n<x_1'x_2\cdots x_n\leqq 1$$

を得る。よって帰納法が終了した。▶

上に述べた切れ味の良い証明は西ドイツのヴァルターの本5）からとった。

§13. おわりに

第2章では相加平均・相乗平均に関する不等式のいろいろな証明法を述べてきた。ここに述べたのだけでも9種にのぼるが，実はこの他にも証明法は多数ある。ベッケンバックとベルマンの本には，ここに述べたものの一部分をふくみ12種の証明があげてある。様々な証明法が数多く存在するということは，この不等式が，量の世界の一つの中心的存在で量を扱う数学の多様な方法の各方面と深くつながっていることを示している。

不等式の研究には，コーシーの不等式や三角不等式の研究や，これらの不等式の応用の研究等が必要であるが，それらについては稿を改めることにしよう。

〈注〉

1) 須田勝彦，北海道の教育，84年
2) J. Dieudonné Foundations of Modern Analysis, 1969
3) G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya Inequalities 1934
4) E. Artin, O. Schreier Algebraische Konstruktion reeller Körper. Abhandl. a. d. math. Seminar Hamburg, 5 (1927) 85−99
5) W. Walter Analysis I 1985, Springer

その他第2章は次の書物を参考にした。

E. F. Beckenbach, R. Bellmann Inequalities Ergebnisse der Math. 1961。および同じ著者による Introduction to Inequalities 1967