



Title	小学校における「代数」指導のための基礎的考察 : 教科書分析の試み
Author(s)	岡野, 勉
Citation	教授学の探究, 4, 105-116
Issue Date	1986-03-28
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/13536">https://hdl.handle.net/2115/13536</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	4_p105-116.pdf



# 小学校における「代数」指導のための基礎的考察

—教科書分析の試み—

岡 野 勉

(北海道大学大学院教育学研究科修士課程1年)

## 0. はじめに——代数と文字

「代数学とは何か?」という問いをもって様々な数学の入門書をひも解いてみると、そこには、たとえば次のような叙述を見出すことができる。

「文字の算術、あるいは代名詞の算術ともいうべき学問が代数学なのである。」<sup>1)</sup>

「計算は普通の算術では数によって行なわれ、代数学者の間では、文字によって行なわれる。いずれも同じ原理の上に築かれており、同じ目的を持っているが、算術は一定で特殊であり、代数は不定で普遍的である。」<sup>2)</sup>

「代数が数学の世界で演ずる役割は、日常生活における筆記または速記の役割に似ている。それらは簡潔に声明したり説明したりするのに用いられる。」<sup>3)</sup>

これらの叙述は、代数学における「文字」の役割を強調する点で共通している。ふつうの計算では数を使って計算するが、代数では、数の特殊性を捨象した一般的な「文字」を使って計算する。「文字」は、すべての数を代表するという点でひとつの威力を持っている。代数学の発展を「記号化」「文字化」を指標として分類する数学者もいる<sup>4)</sup>。

しかし、これらの叙述は、代数学における「文字」の威力だけを強調する点で一面的でもある。この種の説明は数学者による一般向け啓蒙書によくみられるが、代数を説明するのに「文字」の威力を述べるだけで十分であろうか? また、これらの説明から生まれてくる指導プランでは、いかにして早い時期から「文字」を導入するかという点に重点がおかれることになるが、はたして、「文字」を教えるだけで代数を教えたことになるだろうか?

たとえば、つぎのような問題を解くことを考えてみよう。

「ここに重さ3gの球と重さ5gの球が混ぜ合わされている。全体の個数は646個で、全体の重さは2,506gである。3gの球と5gの球はそれぞれ何個あるか?」

ひとつの解法として、次のようなものが考えられる。

「5gの球は3gの球と同じものに何か2gのものが付着していると考えれば、3gの球が646個あることになり、その重さの総計は $3 \times 646 = 1938$ である。したがって、付着物の重さの総計は $2506 - 1938 = 568$ となり、付着物の個数は $568 \div 2 = 284$ である。そこで、この284が5gの球の個数であるとわかり、3gの球の個数はその残りであるから、 $646 - 284 = 362$ とわかる。」<sup>5)</sup>

これは、いわゆる「ツルカメ算」式の解法である。これに対して「代数的」な解法は、3gの球の個数をたとえば $a$ 、5gの球の個数を $b$ として、 $a + b = 646$ 、 $3a + 5b = 2506$ という式を立てて $a = 362$ 、 $b = 284$ を求める。このような「代数的思考」について、雨宮一郎は次のように書いている。

「“3gの球の個数”のことを $a$ と略記したことは便宜上のことであって、本質的ではない。本

質的なことは、いくつかの数の間に成り立つ“関係そのもの”に注目したことである。算術では演算はただ遂行されるものであるのに対して、演算の機能として表された関係自身に注意を向け、それを思考の対象とすることで新しい思考の世界が開けている。これが代数の思考である。」<sup>9)</sup>

代数における「文字」の役割には、確かに強力なものがある。しかし、代数の本質は「文字」にのみ存在するのではない。すべての学問と同様、代数学も固有の研究対象をもっている。ブルバキによると、それは「代数的構造」である<sup>7)</sup>。これまで考察してきた「文字」も、この「代数的構造」を記述するのにふさわしく考案された道具なのであり、代数の指導は「代数的構造」をその原初的な形において教えることにほかならない。「文字」は、この「代数的構造」の記述に必要な限りで指導されればよい。

## 1. ブルバキの代数論

「代数学とは何か？」という問いに対して、ブルバキは次のように書いている<sup>8)</sup>。

「代数を学ぶ、それは本質的には計算することである。言いかえるなら、一つの集合の元に《代数算法》を施すことである。そのもっともよく知られた例は、初等算術における《四則》に見られる。」

「あらゆる特殊性を捨象してしまえば、普通の代数算法の土台に共通に横たわる概念はきわめて単純である。すなわち、同一の集合  $E$  の二元  $a, b$  に一つの代数算法を施すとは、対  $(a, b)$  に集合  $E$  の確定した第三の元  $c$  を対応させることにすぎない。」

「集合  $E$  上に一つあるいは複数の算法（内算法や外算法）を与えることによって、 $E$  上に一つの構造が定義される。正確な意味での代数構造の名が与えられるのは、このように定義される構造に対してであり、この構造の研究こそがいわゆる代数学をなすのである。」

ここには次のことが明瞭に述べられている。すなわち①代数学が「代数的構造」を研究する学問であること、②「代数的構造」は集合  $E$  に《代数算法》を与えることによって定義されること、③《代数算法》の土台に共通に横たわる概念は、同一（内算法の場合）または異なる集合（外算法の場合）の二元の対  $(a, b)$  に対して、確定した第三の元  $c$  を対応させることであること、④この《代数算法》には加・減・乗・除の四則演算も含まれること、の四点である。

このような観点からすれば、現在小学校で指導されている加・減・乗・除の最も簡単な演算の始まりから「代数」の指導が始まっていると考えることができる<sup>9)</sup>。問題は、これらの四則演算が、上のような意味での《代数算法》であるという立場から、「代数的構造」につながる形で指導されているかどうか？という点にある。

## 2. 教育内容としての「実数の代数的性質」

以上の考察にもとづき、小学校における代数の主要な教育内容のひとつとして、「実数の代数的性質」を仮説的に設定しよう。それは次のように規定される。

「(1) 加法の一意性  $a + b = c$

これは、二つの実数  $a, b$  が与えられたときに、 $a + b$  なる実数  $c$  が、必ず、しかもただ一つに限って存在するのをいうのである。すなわち加法が可能で、しかも一意的に可能なので

ある。

(2) 加法の結合法則  $(a+b)+c=a+(b+c)$

結合法則は括弧のつけようによって生ずる加法の過程の変換が、最後の和に影響を及ぼさないことをいうのであるが、三つの数の間にその法則が成り立てば、それから容易に、三つよりも多くの数に関しても成り立つことを証明することができる。ゆえに、結合法則を上のようにいい表すのである。

(3) 加法の交換法則  $a+b=b+a$

(4) 乗法の一意性  $ab=c$

(1)と同様

(5) 乗法の結合法則  $(ab)c=a(bc)$

(1)と同様

(6) 乗法の交換法則  $ab=ba$

(7) 加法に対する乗法の分配法則  $(a+b)c=ac+bc$

(8) 減法の一意性  $a, b$  が与えられたとき、 $a+x=b$  は必ず、しかもただ一つの解をもつ。

その解を求めるのがすなわち減法である。

0に関する四則の法則は、これらの原則中に含まれている。 $a$  が任意の実数であるとき、

$$0+a=a$$

$$0 \cdot a=0$$

前者は明白としておいて、分配法則と減法の一意性とから、後者を導こう。

分配法則によって、 $(0+b)a=0 \cdot a+ba$

すなわち  $ba=0 \cdot a+ba$

ゆえに、減法の一意性によって、 $0 \cdot a=0$

を得る。

(9) 除法の一意性  $a \neq 0$  と  $b$  とが与えられたとき、 $ax=b$  は必ず、しかもただ一つの解をもつ。

$a=0$  とすれば、 $ax=0$  であるから、 $b \neq 0$  ならば  $ax=0$  は不可能で、 $b=0$  ならばまったく不定である。ゆえに除法においては、除数  $a$  に関して  $a \neq 0$  という制限が必要である。」<sup>10)</sup>

小学校における教育内容として、これら(1)~(9)が明確に位置づけられているとはいえない。とくに、交換、結合、分配の諸法則は教科書において前述のような形であらわれてはいる(第6学年)が、いずれも、計算を簡単にする、あるいは検証するための「工夫」として位置づけられている。また、これら諸法則は、第1学年の最初から、加・減・乗・除の演算を説明する際の「暗黙の前提」として用いられており、法則そのものを教えることは、いずれの学年においても意図されていない。また、加法の単位元である数0の扱いについても、数10や十進位取り記数法との関連で問題を含んでいる。

これらの事実を具体的に解明するために、次に教科書分析を試みる<sup>11)</sup>。ただしここでは、数の範囲を0を含む自然数に、演算を加法のみに限定する。すなわち、ここで教育内容として分析の対象とするのは次の(1)~(4)である。

(1) 加法の一意性  $a+b=c$

(2) 加法の結合法則  $(a+b)+c=a+(b+c)$

- (3) 加法の交換法則  $a+b=b+a$   
 (4) 加法の単位元 0  $0+a=a+0=a$

### 3. 教科書分析

#### 3-1 カテゴリーの設定

教科書の記述は、外面的な形式の上では、文、式、さし絵、図などから構成されている。これらは単独で、あるいはいくつかが複合してひとまとまりの意味をなしている。ここで「ひとまとまりの意味をなす」とは、教科書において設定されている教育内容の体系に照らして「ひとつの命題に書きかえることができる」ことを、その判定条件としよう。そして、それをここでは分析の単位として措定する。これを、数学における命題とは異なる意味ではあるが、仮に命題と呼んでおこう。

ふつうの数学書の記述は、定義、公理、定理、証明などから論理が構成されている。定理、証明において、それを構成する命題は公理、定義あるいはそれに先立つ定理であり、それらが4種類の結合関係(and, or, not, if...then)によって論理的に結びついている。小学校の算数教科書において、その記述を構成する諸命題間のつながりは、このように明確な形になっているとはいえない。ここでは、さまざまな命題間の論理的なつながりとして、命題Aが命題Bを「導く」という関係と、命題Aと命題B（あるいはさらにいくつかの命題）が「並列される」という関係を区別しておくことにする。

たとえば、第2学年（上）の単元2「たし算・1」では、 $25+49=74$ 、 $49+25=74$ という命題（A、Bとする）の後に、「たされる数とたす数とを入れかえてたしても、答えはおなじになります」という命題（Cとする）があるが、これは、命題Aと命題Bを並列させた上で、そこから命題Cを導いているわけである。

このように、教科書の記述の最小単位である命題は、「導く」「並列される」という2種類の関係で論理的につながっていると考えることができる。そして、これらさまざまな命題そのものにもレベルの区別を考えることができる。

#### <集合論的事実S>

このレベルの設定が必要なのは、「数は、集合の一つの属性を“大きさ”という観点からとらえたものである」、(加法について)「2つの集合の和集合を求めるという観点に立」つという叙述（教師用指導書）に見られるように、現行の教科書においても、数とその演算が集合にもとづくものと考えられているからである<sup>12)</sup>。

集合論的事実のレベルは、しばしばさし絵によって表現されているが、集合論において成立する事実・法則そのものではない。集合論的事実のレベルとは、命題に書きかえることによって、集合論において成立する事実・法則に対応するレベルである。

さらに、ここでは自然数の概念および十進位取り記数法の原理まで、このレベルに含めて考える。これらの概念は本来別のレベルで考えられるべきであるが、子どもがこれらを習得する過程については、現在のところ十分に説明されていないからである。

以上の点を踏まえ、ここでは命題に書きかえることによって次の(1)~(7)に対応するものを集合論的事実のレベルと考える。

- (1) 2つの集合A、Bに対して、 $A \cup B$ が存在する。

- (2) 交換法則  $A \cup B = B \cup A$  が成立する。
- (3) 結合法則  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  が成立する。
- (4) 要素をもたない集合が存在する。これを空集合といい、 $\phi$  であらわす。
- (5)  $A \cup \phi = \phi \cup A = A$  が成立する。
- (6) 1対1対応のつく有限集合の類によって自然数が定まる。
- (7) 任意の自然数は十進位取り記数法によって表現される。

### <定義D>

定義とは一般に、ある概念の内容を明確に規定したものであり、たとえば「広さのことを面積といいます」というように、A(概念の内容)をB(概念の名前)という、といった形で書かれるのが普通である。しかしながら、教科書においては、必ずしもこのような形で定義が書かれているとは限らない。ある命題が、それ以前の諸命題の内容とは異なる新しい内容を表現している場合がある。このような場合、その命題を新しい内容の定義であると考えることができる。

加法に関しては、数え主義による定義(数え足し)、集合の合併にもとづく定義、「自然数を量空間の倍変換」とする田村二郎による定義<sup>13)</sup>などがある。

### <代数的法則AL>

ふつうの数学の記述では公理に相当するものを考える。前述した「実数の代数的性質」であり、ここでは前節で限定した(1)~(4)とする。

### <代数的事実AF>

ALを公理とすると、AFはそこから論理的に導かれる諸命題すなわち定理と考えることができる。ここでは、ALとAFをこのような関係にあるものとし、ALから論理的に導かれる命題をすべてAFとする。例えば、加法に結合法則が成立するというALから導かれる、「 $a + b + c$  という記法も意味をもつ」、「繰り上がりのある加法は結合法則によって説明することができる」、などがAFの例となる。

### <算術的事実F>

数およびその演算についての定義は前提とした形で、例えば、 $9 + 4 = 13$ ,  $15 + 8 = 23$  といったように、個別の演算結果だけを記述するレベルである<sup>14)</sup>。

#### 3-2 加法の定義について

最初に加法を学習するのは第1学年の単元「たしざん・1」においてであるが、ここでは、まず次のようなさし絵と文章がある。

「みんなで なんびき いますか

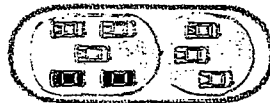
3と2を あわせると 5に なります。

$3 + 2 = 5$  こたえ 5ひき

「みんなで なんだいに なりますか。

5に3を たすと 8に なります。

$5 + 3 = 8$  こたえ 8だい



このような加法の説明のしかたについて、教師用指導書には次のように書かれている。

「一口に加法というが、加法で解決される事象の現実のあり方はさまざまである。その中でも基本的なパターンとして注目されるのが、いわゆるよせ算（合併）とたし算（増加）である。…初めて学ぶ児童の立場を考慮した場合には、よせ算とたし算を一応区別して、初歩の学習を導く手だてを考えるのが妥当である。」

さらに「合併」とは、「同時に存在しているグループの要素を対象にして、『みんなで何びきいるか』を考える算法」であり、「(A, B 2つの集合が) 対等に扱われ、両手がかかえこむようなしぐさで表現される」のに対し、「増加」では、「新しく全体集合ができるのに時間経過があることを想定し、用語も『みんなで何台なりますか』と微妙な使いわけにまで気を配っている。」「集合Aが先行して中心になり、そこに集合Bが加わってゆくから、一方だけが動くようなしぐさで表現される。」

ここでは、「加法で解決される事象の現実のあり方」の「基本的なパターン」として、「合併」と「増加」の2つが区別され、両者の相違が説明されている。教科書の叙述もそれぞれに対応している。しかし、これらはともに、2つの集合A, Bに対して $A \cup B$ が存在するというSを前提とした上で、Dにもとづいた形で $N(A)$ と $N(B)$ から $N(A+B)$ を求めているわけであるから、対応するSは同一である。つまり、同一のSについて、「合併」「増加」という2つの異なった意味づけを行なっているわけである。

さらに、このDから、 $2+2=4$ ,  $2+3=5$ ,  $2+4=6$ ,  $4+4=8$ などのF(いずれも1位数+1位数=1位数)が導かれている。

### 3-3 結合法則について

(1) 「たしざん・1」では、加法が二項演算、すなわち $a+b$ の形で定義されていたわけであるが、単元11「たしざんひきざん・1」においては、それが突然 $a+b+c$ の形に拡張されている。教科書の叙述をみよう。

「



こどもが3にんあそんでいます。そこへふたりきました。また4にんきました。  
こどもはみんなでなんにんになりましたか。

$$3+2+4=9 \quad \text{こたえ } 9 \text{ にん}$$

」

指導書では、この単元の意図について次のように説明している。

「(これまでの学習をとおして) 児童は繰り上がり、繰り下がりのない加減計算のしかたと、加法、減法を適用する場合については一応理解したことになる。今後は、繰り上がり、繰り下がりのある場合の加減計算に発展するわけであるが、それに先立って、本単元で三口の加減計算を取り上げ、それを1つの式に表したり、また、その計算ができるようにする。ここで3口の数の計算を取り上げたのは、繰り上がり、繰り下がりのあり計算を進める際の数処

理を円滑にできるようにすることを意図したものである。」

児童は、つぎの「たしざん・2」において、1位数+1位数=2位数の繰り上がりのある加法を学習することになっているが、そこでは、例えば、 $8+5$ の計算は、 $8+5=8+(2+3)=(8+2)+3=10+3=13$ という具合に説明される。ここでは、このような計算の仕方にあらかじめ慣れておくことが意図されているのである。

このような $a+b+c$ の型の計算は、「式の左のほうから順に(事实现象の変化と同様に)計算する」とされ、例えば $3+2+4$ の計算では、「まず3と2の和5を求め、次に5と4の和9を求めることになる」とされている。つまりここでは逐次計算が意図されていながら、そのことを明記する( )については何もふれられていない。 $3+2+4$ の計算をここでは $(3+2)+4$ として計算するわけであるから、それを意味する( )を明記する必要がある。さらに加法に結合法則が成立するがゆえに、 $3+2+4=(3+2)+4=3+(2+4)$ であることも、何らかの形で指導する必要がある。加法に結合法則が成立しないならば、 $a+b+c$ 型の「加法」は演算としての意味をもたないからである。

ここでは、Sにもとづき、さらに逐次計算が意図されているわけであるからDにもとづいているということではできる。しかしながら、 $a+b+c=(a+b)+c$ というAFが、ALすなわち加法の結合法則を暗黙のうちに前提とした形で導かれている。さらに、このようにして導かれたAFから、 $2+2+3=7$ 、 $4+1+3=8$ 、 $3+4+2=9$ 、 $7+3+9=19$ といったFが導かれている。

(2) ひきつづき、単元13「たしざん・2」に進もう。ここでは、1位数+1位数=2位数の繰り上がりのある加法が指導される。教科書の叙述はつぎの通り。

「ひろしさんはどんぐりを9こ、いもうとは4こひろいました。

ふたりで どんぐりをなんこひろいましたか。



しきをかいて、けいさんのしかたをかんがえましょう。

$9+4$ のけいさんのしかた

①9に4のなかの1をたして10 ②10にのこりの3をたして13

$9+4=13$  こたえ 13こ

ここでは、 $9+4=13$ の計算を、 $9+(1+3)=(9+1)+3=10+3=13$ というしかたで説明している。指導書にもあるように、加数分解(ここでは、4を1と3にわけること)によって10の補数を見つけ、繰り上がりを「10といくつ」ととらえることがポイントなのである。さらに、「繰り上がりのある加法計算の方法」として、 $9+4=(3+6)+4=3+(6+4)=3+10=13$ (被加数分解)、また $6+8=(5+1)+(5+3)=(5+5)+(1+3)=10+4=14$ (加数、被加数をそれぞれ「5といくつ」に分解する)といった方法もあげられている。

これらの計算の説明においては、いずれも、明らかに結合法則および交換法則が利用されている。1位数+1位数=2位数という繰り上がりのある加法はALによって説明される(これはひとつのAFである)わけであるが、その際、このALは何らかの形で明記されているわけ

はない。つまりここでは、S、Dにもとづいて、前述のAFが(1)におけると同様、ALを暗黙のうちに前提とした形で導かれ、さらにこのAFから、 $8+7=15$ 、 $4+8=12$ 、 $9+2=11$ 、 $6+8=14$ 、…といったさまざまなFが導かれている。

(3) 教科書にはじめて筆算が登場するのは、第2学年(上)の単元2「たし算・1」においてである。〈計算(1)〉では、2位数+2位数(または1位数)の繰り上がりのない加法( $24+15$ )が、〈計算(2)〉では、繰り上がりのある加法( $25+9$ )が指導される。筆算においては、位をそろえて各位ごとに計算するわけであるが、ここでも結合法則および交換法則が使われている。

たとえば、 $24+15$ 、 $25+9$ の計算(筆算)は、次の計算と同じことをしているわけである。

$$\begin{aligned} 24+15 &= (20+4) + (10+5) & 25+9 &= (20+5) + 9 \\ &= (20+10) + (4+5) & &= 20 + (5+9) \\ &= 30+9 & &= 20+14 \\ &= 39 & &= 20+(10+4) \\ & & &= (20+10)+4 \\ & & &= 30+4 \\ & & &= 34 \end{aligned}$$

ここでは、S、Dにもとづいて、筆算形式による2位数+2位数(または1位数)の加法FがALすなわち交換・結合法則を前提とした形で導かれる。(これはひとつのAFである。)さらに、このようにして導かれたAFから多数のFが導かれる。他の筆算についても同様の点が指摘できる。

(4) SにもとづいてALが導かれるのは、第2学年(下)の単元12「たし算とひき算・2」〈3つの数の計算〉においてである。この単元では「具体的な場面をとおして、加法について成り立つ性質として、結合の法則的な事実に着目させる」ことが目標とされている。教科書の叙述をみよう。

「あそんでいる子どもはぜんぶでなんにんですか。」

ひろしさんたちはつぎのようにかんがえて計算しました。

ひろし



$3+2$  と  $4$  をたす。

$$(3+2)+4=9 \quad \text{答え } 9 \text{ 人}$$

かず子



$$3+(2+4)=9 \quad \text{答え } 9 \text{ 人}$$

☆  $8+4+6$ の計算を、ひろしさんやかず子さんのかんがえかたでしましょう。

$$\text{ひろし } (8+4)+6 \quad \text{かず子 } 8+(4+6)$$

たし算ではたすじゅんじょをかえても、答えはおなじになります。」

ここでは、「加法で、3つのグループに分かれて遊んでいる子供全体の数を求めるといった合併の場面をとおして、加法の結合法則に着目させる」ことが目指されている。さし絵によって示唆されるSから、Dにもとづいて $F_1$ および $F_2$ (さらに同様の $F_n$ )を導き、さらに $F_1=F_2$ で



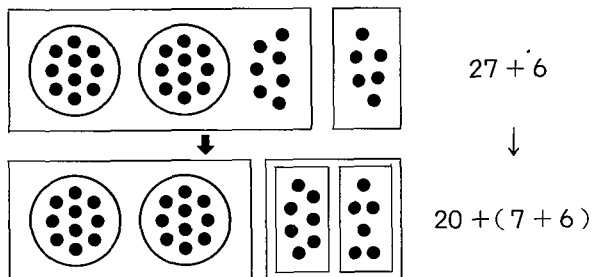
あることからALを導いている。ALが導かれた後には、「つぎの計算をしましょう。また、たす順序をかえて計算しましょう」として、 $2+4+5=11$ 、 $3+9+20=32$ 、 $6+8+2=16$ …などのFが導かれている。

(5) こうして結合法則が導かれると、次にそれは暗算の説明の過程に用いられる。同じ単元の〈あん算〉には、次のような叙述がある。

「えんぴつを27本もっています。6本もらいました。ぜんぶで何本になりましたか。

$$27+6$$

27+6をつぎのようにかんがえて、あん算で計算してみましょう。



☆ ほかのあん算のしかたもかんがえましょう。」

ここでは、 $27+6=(20+7)+6=20+(7+6)=20+13=33$  という計算をしているわけであり、結合法則が利用されていることは明らかである。ここでは、SからDにもとづいて、2位数+2位数(または1位数)の繰り上がりのある加法の暗算による計算というFが、(4)であらかじめ導かれたALにもとづいて説明され(AF)、そこから $49+2=51$ 、 $5+56=61$ 、 $8+6+9=23$ …などのさまざまなFが導かれている。また、第3学年(上)の単元2「たし算とひき算」の〈たし算やひき算の暗算〉にも、繰り上がりのある2位数+2位数のつぎのような暗算があり、同様の点が指摘できる。「 $54+38$ の暗算のしかたを考えましょう。① $54+30=84$ 、② $84+8=92$ 」

### 3-4 交換法則について

加法の交換法則については、第2学年(上)の単元2「たし算・1」〈計算(2)〉において、つぎのような叙述があるのみである。

「 $25+49$ と $49+25$ の計算をして、答えをくらべましょう。

(上記以外の計算についても試みさせたりえて、下記のような結論を導く。)

たされる数とたす数を入れかえてたしても、答えはおなじになります。

$$25+49=74 \quad 49+25=74$$

$25+49$ の計算の答えは、 $49+25$ の計算でたしかめることができます。」

( )は指導書からの引用

ここでは、 $25+49=74$ 、 $49+25=74$ という $F_1$ 、 $F_2$ さらに同様の $F_n$ が並列され、さらにそこからALが導かれている。これは加法の交換法則であるのだが、指導書によると「計算の法則として一般化することを意図しているものではない。」上記引用の最後の1行からも明らかのように、ここでは、「この性質〔上記、引用者〕を用いれば、加法計算の検算ができることを理解させ、今後は自力で検証できるようにするところにねらいがある」とされている。

自然数において、二数 $a$ 、 $b$ が与えられると、それに対応して $a+b$ なる自然数 $c$ が必ず、し

かもただ一つに限って存在する。この $(a, b) \rightarrow c$ という対応関係にまちがいがいがないかどうかを検証するのが「検算」であり、自然数の加法については交換法則を利用することができるのは確かである。しかしながら、ここで利用できるというのは、それが法則として一般化されているからである。計算の法則として一般化されていない性質を、「加法計算の検算」に利用することはできない。

### 3-5 加法の単位元 0 について

#### (1) 0 の導入について

最初に、数 0 がどのように導入されているかをみよう。0 がはじめて登場するのは、第 1 学年の単元 2「すうじ」においてである。指導書によると、単元の目標として「1 つもないことを 0 と書き表すことを知らせる」とある。教科書では、子どもたちが玉入れ遊びを行なっているさし絵があり、その結果がその下に図示されている。各人の入れた数を調べる際に、1 つも入らなかった子の玉の数を 0 と書き表すことが指導される。ここでは、S にもとづいた形で、空集合の表現として 0 が導入されている。

さらに、単元 6「たしざん・1」においては、 $0+a=a$ の計算が指導される。ここでもまた、前回と同様の場面設定のなかで、「1 かいめと 2 かいめにはいったかずをあわせると、いくつになりますか」という問題が出される。はるおの 1 回めが 1 個、2 回めが 3 個であるから、合計  $1+3$  で求められるのと同様に、みちこ、ただしの合計もそれぞれ、 $2+0=2$ 、 $0+4=4$  という計算が成り立つことが指導される。加法の単位元としての 0 が S にもとづいて指導されている。

#### (2) 位取り記数法と関連で

前述の導入において、0 は、いずれも空集合の表現として導入されている。しかしながら、すでに単元 2「すうじ」において、0 のまえに、1 から 10 までの数の意味とその書き方（記数法）が指導されている。ここでの数 10 の 0 は 1 の位の空位を表現しているわけであるが、0 のこの意味については、まったく指導されていない。当然、子どもは 10 を「じゅう」というひとつの字として理解する。ここで数 10 を教えるとするれば、0 のこの意味、および十進位取り記数法の原理も合わせて指導すべきだろう<sup>15)</sup>。

単元 8 において「20 までの数」が指導されるが、ここでも、空位の表現としての 0 の意味、および十進位取り記数法の原理は指導されない。「位取りの原理を指導することは無理」であるから、「その（数の）大きさをとらえるにあたって、『10 といくつ』といった考えかたを重視し、それを基礎として命数法を指導し、さらに記数法の指導に進めるがよい」とされている<sup>16)</sup>。

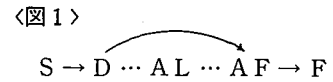
単元 17「100 までの数」において、ようやく、2 位数についての位取りの原理（1 の位、10 の位）と空位の表現としての 0 の意味が指導されることになる。このように、これらの内容をここまで指導せず、「10 といくつ」といった考え方を導入するのは、繰り上がりのある 1 位数+1 位数の加法（暗算）が結合法則を利用した加数分解によって説明されていたこと、さらには第 2 学年（上）の単元 2「たし算・1」までは暗算が中心であり、筆算が指導されないことによるものであろう。

## 4. ま と め

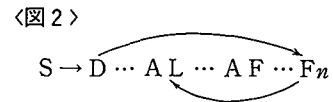
以上、3-1 で設定したカテゴリーにもとづき、3-2~5 において、それぞれの内容にそった形で教科書の記述内容の分析を試みた。ここでは、分析結果のうち、結合法則と交換法則につ

いて若干の考察を加えることでまとめとしたい。

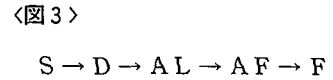
結合法則 3-2(1)~(5)において、AL が導かれるのは(4)においてであるが、それ以前の(1), (2), (3)においては、命題内容の論理的な展開の仕方について、類似のパターンを指摘することができる。すなわち(1), (2), (3)においては、S から D にもどついで AF から F を導いている。



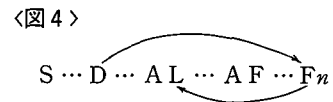
その際 AL は、D から AF を導く際の論理的な前提となっているわけであるが、この点については全くふれられていない



〈図 1〉。(4)において AL が導かれるわけであるが、それは S から D にもどついで  $F_1, F_2, F_n$  を導き、それらを並列させてそこから AL を導くという形で行なわれる



〈図 2〉。このようにして AL が導かれると、(5)では、S から D にもどついで、(3)で導かれた AL を利用して AF から F を導くのである



交換法則 3-4 について、AL は、S にもとづかない形で  $F_1, F_2$  さらに  $F_n$  が並列され、そこから導かれるというパターンになっている

〈図 4〉。S にもとづかない点を除いては結合法則が導かれるパターンと同様のパターンになっている。そして、結合法則が暗算もしくは計算の工夫のために利用されていたのに対して、交換法則は「計算結果の検証（検算）」に利用されている。いずれにおいても、AL を導くことに目的があるのではなく、F を導くことが最終的な目的となっている。AL は導かれたとしても、そのための手段にすぎない。

以上、0 を含む自然数の加法に範囲を限定して、実数の代数的性質 2(1)~(4)について教科書分析を試みた。分析に際しては、数とその演算を集合論的事実にもとづくものとしてカテゴリーを設定した。現行教科書においては同様に、減法については補集合、乗法については直積集合を求める演算とすれば同様の分析が可能であろう。

〈注〉

- 1) 遠山 啓『数学入門(上)』岩波新書 1959年 p. 76
- 2) 同上
- 3) ソーヤー著、東健一訳『数学のおもしろさ』岩波書店 1955年(原著1954年) p. 79  
また、近藤洋逸は次のように書いている。

「いうまでもなく代数は未知数を算出する術である。しかも計算は迅速を必要とするから、計算中に何回も出てくる数を記号であらわし、また計算の操作をも簡略に記号で示すのである。…代数を未知数の算術とただだけでは算術との区別がつかないから、もっと代数の性格をはっきりさせてみよう。12に15を掛けたらいくらになるかといった簡単な問題は代数ではなく算術の問題だから、すぐに計算にとりかかれるが、[たとえば、2からある未知数の3倍を引いたものが、この未知数に3/5を加えたものに等しい。その未知数を求めよ、といった]すこしめんどろな問題だと、ただちに未知数の計算はできないので、計算しやすいように式を変形する。これが代数の特色だ。」

近藤洋逸編『数学の歴史』毎日新聞社 1953年 p. 95 [ ]は引用者

- 4) 19世紀中頃のドイツの数学者ネッセルマンによると、代数学の発展は、①修辭的代数、②省略的代数、③記号的代数の3段階に分けることができる。①修辭的代数は言語的代数とも呼ばれ、「記号が全く使われず、計算の全過程が言葉だけで述べられるもの」、②省略的代数とは、「本質的には言語中心であるが、たびたびくり返し用いられる概念や演算については言葉で表す代りにきまった省略記号を用いるもの」、③記号的代

数とは、「すべての式や演算が完全に発達した省略言語——それは普通の言葉から独立したもので、言葉によって補足説明される必要のないもの——で表現される段階である。」大矢真一・片野善一郎著『数字と数学記号の歴史』裳華房 1978年 p. 92~94, または矢ヶ部巖著『教職数学シリーズ基礎編①代数』共立出版 1981年 p. 248~249, を参照

- 5) 雨宮一郎『微積分への道』岩波書店 1982年 p. 2
- 6) 同上 p. 4
- 7) ブルバキ『数学原論 代数 1』東京図書 1968年 p. 2
- 8) 同上 p. 1
- 9) このような着想は、須田勝彦担当、昭和59年度本学部講義「教科教育論Ⅰ」の講義レジュメによる。
- 10) 高木貞治『代数学講義』共立出版 1965年 p. 1~2
- 11) 以下、3-2~5において分析の対象としたのは、小平邦彦・古屋茂監修『新しい算数』第1~3学年、東京書籍、1980年およびその教師用指導書である。なお同社からは昭和58年度版も発行されているが、内容的にはほとんど変わっていない。分析の対象とした単元を以下にあげておく。

<第1学年>

1. かず
2. すうじ
6. たしざん
8. 20までのかず
11. たしざんとひきざん・1
13. たしざん・2
17. 100までのかず

<第2学年(上)>

2. たし算・1
9. たし算・2

<第2学年(下)>

12. たし算とひき算・2

<第3学年(上)>

2. たし算とひき算

以下において特に明記しない場合は同教科書、指導書からの引用である。

- 12) 田村二郎『量と数の理論』日本評論社 1978年 p. 22
- 13) 現行教科書のあり方に関する歴史的な分析については、須田勝彦「算数教科書論」『教授学の探究』第1号 北大教育学部教育方法学研究室 1983年、を参照。
- 14) ここでは、Fを導くことができるという事実およびFを導く過程をAFとし、AFによって導かれた結果をFとする。たとえば、繰り上がりのある1位数+1位数の加法(例えば $9+4$ )は結合法則によって説明することができること、および $9+4=9+(1+3)=(9+1)+3=10+3=13$ という説明の過程がAFであり、結果として導かれた $9+4=13$ がFである。
- 15) この点については、遠山啓『数学の学び方・教え方』、岩波書店、1972年、p. 66~67, を参照。
- 16) これに対して、遠山啓監修『わかるさんすう1』、麦書房、1972年においては、0および自然数の範囲の拡張は次のような順序になっている。5までの数→0→6から9までの数→じゅう→10より大きい数。「じゅう」においては10の1本のタイルを作ることが中心とされ、それを10と書くことは指導されない。位取りは、「10よりおおきい数」において、1の位は正方形のタイルが何「こ」、10の位はそれを10こ繋ぎ合わせた長方形のタイルが何「ほん」という形で指導される。このような教材構成によると、1年生でも位取りの原理が容易に理解できることが報告されている。(遠山啓前掲書、p. 70~71)

## 〔付 記〕

本論文の作成にあたって、北大教育方法学研究グループの研究室会議での議論、特に3-1カテゴリーの設定の部分については、数学グループの須田勝彦氏との議論に多くものを負っている。このことを謝意とともに記しておきたい。