Title	少数とは何か
Author(s)	山口，格
Citation	教授学の探究，8，51-60
Issue Date	1990-03-05
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/13567
Type	departmental bulletin paper
File Information	8_p51-60.pdf

小　数　と　は　何　か

山　口　　　格
（室蘭工業大学）

1．はじめに

実数xの10進小数表示において例えば，

$$0.5$$

は

$$0.4999\cdots$$

のように二通りに表わされることはよく知られている。しかしこの小数表示の一意性がなりたたない理由については学校教育のどの段階においてもあまり教えられることはないようである。

小数は小学校で教えられているが，その際は$\frac{1}{2}$は0.5だけで，0.4999… の方は教えられていない。高等学校でも無限小数や循環小数は学習するのではあるが，実数を小数で表すときの方法については深入りしていないようである。

例えばある教科書では次のようになっている。[1]

「整数でない有理数を小数で表すと

$$\frac{21}{4}=5.25 \qquad \frac{2}{3}=0.6666\cdots \qquad \frac{3}{22}=0.136363\cdots$$

のように，有限小数となるか，または循環する無限小数となる。

逆に，有限小数は，分数の形に直すことができるから有理数である。

また，循環する無限小数も，必ず分数の形に表され，したがって有理数であることが知られている。

無理数は，$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ のように，循環しない無限小数で表される。整数でない実数は，有限小数または無限小数で表される。

$$\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\cdots\cdots\begin{cases}\text{整数および有限小数}\\ \text{循環する無限小数}\end{cases}\\ \text{無理数}\cdots\cdots\text{循環しない無限小数}\end{cases}$$

」

この教科書の$\frac{21}{4}=5.25$はどのようにして得られるのであろうか。$21\div4$という割算を実行するということが先ず考えられるが，この方法では$\frac{1}{2}=0.5$は得られるが，$\frac{1}{2}=0.4999\cdots$は得られない。同じように1を0.9999… と表すことは，割り算を実行することによっては得られない。高校生の中にはこれを次のように考えてなっとくしている人もいるという。[2]

$$\frac{1}{3}=0.333\cdots \tag{1}$$

であるから，両辺に3をかけて

$$1=0.999\cdots \tag{2}$$

を得る。(1)式は1を3で割ることによって得られるのであるが，(2)の形はこれだけでは，なっとくするというより，不思議におもう人もいるであろう。

そこでこの疑問を解明するために，小数とは何かということを考えなおしてみることにしよう。

2．実数の10進小数表示

任意の実数 a に対して，

$$n \leqq a < n+1$$

をみたす整数 n が唯一つ存在する。この整数をガウスの記号 $[a]$ で表わす。(このことは明らかのようにみえるが，証明しようとするとアルキメデスの原理や自然数の整列性を用いることになる[3]) このガウスの記号を用いて実数の10進小数展開を導いてみよう。

はじめにここで用いる記号について書いておく。自然数全体の集合を $\boldsymbol{N}$ とする。

$$\boldsymbol{N}=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

である。半開区間の記号 $[a,\ b)$ は不等式 $a \leqq x < b$ をみたす実数 x の集合を表わす。数直線上で考えると左端 a はこの区間に属するが，右端の b はこの区間に属さない。

命題1． 任意の実数 x に対し，

$$a_n=[x]+\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{10^2}+\cdots+\frac{x_n}{10^n} \tag{3}$$

$$0 \leqq x_i \leqq 9, \quad x_i \in \boldsymbol{N} \quad (\text{自然数})$$

の形の有理数列 $(a_n)_{n\in N}$ で x に収束するものが存在する。

証明 $x-[x]=x_0$ と置く。半開区間 $I_0=[0,\ 1)$ を $\left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}\right)$ の形の半開区間に十等分すると，$x_0 \in [0,\ 1)$ はその中の唯一つに含まれる。いま

$$x_0 \in \left[\frac{k}{10},\ \frac{k+1}{10}\right)=I_1 \quad \text{のとき} \quad x_1=k$$

と置く。次に I_1 を同様に十等分して

$$x_0 \in \left[\frac{x_1}{10}+\frac{l}{10^2},\ \frac{x_1}{10}+\frac{l+1}{10^2}\right)=I_2 \quad \text{のとき} \quad x_2=l$$

と置く。以下同様に各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対し x_n が一意的に定まる。x_n から(3)式により a_n を定義して，$b_n=a_n+\frac{1}{10^n}$，$I_n=[a_n,\ b_n)$，$\bar{I}_n=[a_n,\ b_n]$ とおく，このとき x_n の定義から

$$x \in I_n \subset \bar{I}_n \quad (\forall n \in \boldsymbol{N})$$

であり，$\bar{I}_n \supset \bar{I}_{n+1}$，$b_n-a_n \to 0\ (n \to \infty)$ だから区間縮小法により[4]

$$\bigcap_{n \in N} \bar{I}_n=\{x\}$$

で

$$\lim_{n\to\infty} a_n=x$$

となる。　■

このように任意の実数 x に対し，x に収束する $a_n=[x]+\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{10^2}+\cdots+\frac{x_n}{10^n}$ の形の有理数列が存在することがわかった。このことは，級数の記号を用いれば

$$x=[x]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{10^n} \qquad (4)$$

ということを意味している。このとき実数 x を

$$x=[x].\ x_1x_2x_3\cdots$$

で表わす。これを x の 10 進小数表示という。

このように「小数とは何か」という問に対する一つの解答として，命題 1 の形の有理数列で実数 x を表示したものということができる。従って小数とは本質は無限級数でもある。

今上に 10 進小数表示と書いたが，これは整数の 10 進表示をそのまま，実数に拡張したものになっている。たとえば

$$329=9\cdot10^0+2\cdot10^1+3\cdot10^2$$

と同じように

$$0.329=3\cdot10^{-1}+2\cdot10^{-2}+9\cdot10^{-3}$$

である。

整数に l 進表示があるように，任意の自然数 $l\geqq2$ に対し，実数の l 進小数表示が得られる。それには上の命題 1 の証明で区間を 10 等分するかわりに l 等分すればよい。

3．小数表示の一意性について

前節の命題 1 で述べたこととは逆に 0 から 9 までの整数を値にとる任意の数列 $(x_n)_{n\in N}$ と任意の自然数 x_0 に対し

$$x=x_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{10^n}$$

によって実数 x が定義される。そうすると，ある $n\in \boldsymbol{N}$ に対し $x_n\neq0$, $x_m=0$ $(\forall m>n)$ となるとき，実数 x は

$$\begin{aligned}x&=x_0.\ x_1\cdots x_{n-1}x_n00\cdots\\&=x_0.\ x_1\cdots x_{n-1}(x_n-1)999\cdots\end{aligned}$$

のように二通りに表わされる。

例えば $0.7=0.7000\cdots=0.6999\cdots$ である。命題 1 の証明に述べた方法による x_i の選び方は一意的であるが，x に収束する有理数列の選び方は，$x-[x]$ が $\frac{a}{10^n}$ の形 $(0\leqq a\leqq9)$ のとき上のような別の選び方が存在する。これはあたかも，p が有理数の場合に，p を下組に入れるか，上組に入れるかによって，二つの切断が生ずるのと同様の事情で，実数の本質にかかわってやむを得ないのである。

実数の本質といったのは，実数の連続性といってもよいことである。10 進小数表示は実数を表す方法であるから，一意性のあることが望ましいのであるが，実数という概念そのものが，このような一意性とあいいれないところがある。

それをみるために有理数から実数を構成する時の方法をふりかえってみよう。10進小数というのは実数xに収束する有理数列であるから，数ある実数論のうちから，有理数列をもちいるCantorとMérayの実数論を選んで話をすすめよう。

集合論の創始者として著名なG. CantorはMathematische Annalen Bd. V（1872年）に三角級数の一意性に関する論文“Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.”の中で，二つの三角級数が一致する条件を求め，これをいい表わす為には正確な実数の概念が必要である事に気付き，この論文の中で実数の理論を述べた。同じ年フランスのMérayもこれと独立に同じ理論を“Nouveaux Précis d'Analyse infinitésimale”（1872）の中で論じた。

19世紀の中頃には極限論がコーシー（1789—1857）の手によって一応完成して，関数と集合についての現代の解析学の基礎が考えだされていた。しかし実数の定義をめぐって極限論は論理的な欠陥が指摘されていた。当時，実数はすべて有理数列の極限として定義されていた。たとえば$\sqrt{2}$は有理数列1，1.4，1.41，1.414，… の極限として考えられていた。ところが実数をこのような有理数列の極限として定義するためには，その数の存在を仮定せねばならなかった。すなわち推論の中で循環論法をおこなわねばならなかった。たよるべき要素（実数）の全体という概念もきわめてあいまいなままであった。

数学解析の発展のためには，この困難にうちかって，厳密な実数の理論を打ちたてる必要性が，この頃多くの人に認識されていたにちがいない。カントル等の論文が出た1872年という年は，このような解析学の基礎にとっては画期的な記念すべき年となった。この年カントルの実数論の他に同じテーマを扱ったメーレーの研究やハイネの研究が発表され，デデキントの小冊子“Stetigkeit und irrational Zahlen（連続性と無理数）”が出版された。それから数年後にワイヤシュトラスの研究も発表されるのである。

さてこのCantor-Mérayの実数論の入口をのぞいてみよう。自然数1，2，3，… の各々に一意に有理数を対応させるとき，これをa_1，a_2，a_3，…，a_n，… と表し，有理数列という。a_nの中には同じ数があってもかまわない。有理数列(a_n)が今「任意に与えられた正の有理数ε（イプシロン）に対して，添数$N=N(\varepsilon)$が存在して，m，$n>N$なる限り

$$|a_m-a_n|<\varepsilon$$

となる」時，数列(a_n)はCauchy（コーシー）の条件をみたすといわれる。Cauchyの条件をみたす有理数列をCantorは基本列（fundamental sequence）と名づけた。一口にいえばCantor-Mérayはこの基本列を以って実数と名づけたのであるが，正確にいえばCantor-Mérayの実数というのは基本列そのものでなく次の規則に従って多くの基本列を同一視したものである。その規則というのは，(a_n)，(b_n)を二つの基本列としたとき，任意に与えられた正の有理数εに対して，添数$N=N(\varepsilon)$が存在して，$n>N$であれば，$|a_n-b_n|<\varepsilon$をみたすならば，(a_n)と(b_n)は同値であるということにする。そして$(a_n)\sim(b_n)$と書くことにする。そうするとこの$\sim$なる関係は次の三つの公理（同値律）をみたすことがわかる。

(1) すべての基本列(a_n)につき，$(a_n)\sim(a_n)$

(2) $(a_n)\sim(b_n)\Rightarrow(b_n)\sim(a_n)$

(3) $(a_n)\sim(b_n)$，$(b_n)\sim(c_n)\Rightarrow(a_n)\sim(c_n)$

数学では通常上の(1)，(2)，(3)の公理を満たす関係を同値関係といい，このような場合に類別

ということを考える。すなわちすべての基本列の集合を同値なものを一つの類に集めると，互いに素な部分集合に分れる。この一つ一つの類(部分集合)に属する基本列(a_n)，(b_n)は，$(a_n)\sim(b_n)$となる。別の類に属する(a_n)と(b_n)は$(a_n)\sim(b_n)$とならない。Cantor-Mēray はこの類を実数と考えた。そして実数を表示するために，その類に属する任意の基本列を選んで，その列を以ってする。つまり実数αの類に基本列(a_n)が属する時，$\alpha=\{a_n\}$と表すのである。このようにCantor-Mērayの方法によれば同一の実数を表示する基本列は無限に多くあるのである。($\alpha=\{a_n\}$のときa_nの部分列でまた基本列であるものを(a_{n_k})とすると，$(a_{n_k})\sim(a_n)$である。)実数を表示する基本列のことを，その類の代表元とよぶ。命題1は任意の実数xに代表元の取り方を10進小数として指定できることを示したものだということができる。この命題1では区間縮小法を使ったが，区間縮小法により実数が定まることを，実数の完備性といい，基本列が収束して実数を表すことと同値なのである。

4．有理数の小数表示

次に有理数を10進小数で表示したときどのようになるかを考察しよう。まず分数をいくつかとって10進小数で表してみよう。

$$\frac{1}{2}=0.5$$

$$\frac{1}{3}=0.333\cdots$$

$$\frac{1}{4}=0.25$$

$$\frac{1}{5}=0.2$$

$$\frac{1}{6}=0.1666\cdots$$

$$\frac{1}{7}=0.142857142857\cdots$$

$$\frac{1}{8}=0.125$$

$$\frac{1}{9}=0.111\cdots$$

$$\frac{1}{11}=0.90909\cdots$$

$$\frac{1}{12}=0.08333\cdots$$

$$\frac{1}{13}=0.076923076923\cdots$$

$$\frac{1}{14}=0.0714285071\cdots$$

$$\frac{1}{15}=0.0666\cdots$$

$$\frac{1}{16}=0.0625$$

$$\frac{1}{17}=0.0588235294117647058 8\cdots$$

これらの例を観察してみるとまず有限個で切れる有限小数と，無限に続く無限小数とに分かれることに気がつく。有限小数は$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$である。それ以外の$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{11}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{14}$，$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{17}$は無限に続く小数である。なぜ無限に続くことがわかるかというと，小数を得るために割り算を実行してみると同じ数字が同じ順序であらわれて，循環するからである。$\frac{1}{7}$を例にとって見てみよう。

```
       0.142857
  7 ) 1.0
       7
      ---
       30
       28
      ---
        20
        14
       ---
         60
         56
        ---
          40
          35
         ---
           50
           49
          ---
            1
```

ここまで割って来ると余り 1 が出たので，これから先は再び同じ計算の繰り返しになる。これを省略して

$$1\div7=0.\overline{142857}\cdots$$
1 326451

と書く，下に並べた 1326451 という数字は，その度毎の余りを示している。上に横に引いた線は無限小数の周期を示している。これらの無限小数を観察してみると，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{11}$等のように循環節が小数点の直後，小数第 1 位から始まっている数と，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{15}$等のように循環する部分の前に循環しない部分（例えば$\frac{1}{6}=0.1666\cdots$では 1）があるものに分けることができる。すなわち

I. $\frac{1}{2}=0.5$　$\frac{1}{4}=0.25$　$\frac{1}{5}=0.2$　$\frac{1}{8}=0.125$　$\frac{1}{16}=0.0625$

II. $\frac{1}{3}=0.\overline{3}$　$\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$　$\frac{1}{9}=0.\overline{1}$　$\frac{1}{11}=0.\overline{90}$

$\frac{1}{13}=0.\overline{076923}$　$\frac{1}{17}=0.\overline{0588235294117647}$

III. $\frac{1}{6}=0.1\overline{6}$　　$\frac{1}{12}=0.08\overline{3}$　　$\frac{1}{14}=0.0\overline{714285}$　　$\frac{1}{15}=0.0\overline{6}$

となる。

Iの型は有限小数であって，これを分数の形から見ると，分母が因数として2と5のみからなる形の分数である。つまり分母を素因数分解したとき$2^{\alpha}5^{\beta}$というように因数が2または5のみで他の素因数がない場合である。どうして2と5を問題にするかといえば，2と5は10の因数であるから10進小数表示では分母を10の巾に直せば小数の形がわかる。すなわち

$$\frac{1}{5}=\frac{1\times 2}{5\times 2}=\frac{2}{10}=0.2$$

$$\frac{3}{20}=\frac{3\times 5}{20\times 5}=\frac{15}{100}=0.15$$

である。

このIの形以外の分数はけっして有限小数に表わせない。つまり分母の因数に2, 5で割切れない数kがある場合は，有限小数で表すことができない。それをみるため$\frac{1}{2^{\alpha}5^{\beta}k}$が有限小数に書けると仮定してみる。つまり

$$\frac{1}{2^{\alpha}5^{\beta}k}=\frac{a}{10^{\delta}}\qquad（\delta \text{ は } \alpha \text{ と } \beta \text{ の大きい方を表す}）$$

となったとする。$2^{\delta}5^{\delta}=10^{\delta}$であるから

$$2^{\delta}5^{\delta}=a\cdot 2^{\alpha}5^{\beta}\cdot k$$

すなわち

$$2^{\delta-\alpha}5^{\delta-\beta}=a\cdot k$$

である。つまりakの因数は2か5以外にないことになる。従ってkは2か5で整除できることになる。これはkの取り方に矛盾する。従ってIの形以外の分数は無限小数になる。IIの形の数は，循環節が小数点の直後から始まり，IIIは循環しない部分のあとに循環節が現われる。IIの分数は分母の因数が2, 5以外の素数のみである。IIIの分数は2または5のほかに因数をもっている場合である。

IIとIIIの場合に小数が循環するのは何故であろうか，例えば$\frac{1}{7}$の場合先ほどの割算を余りとともに示してみよう。

1÷7=0.142857
　　1 326451

分子1を最初の余りとみて，商7のところで再び余り1を得る。それ以後は同じ割算のくり返しであるから小数が循環するのである。同じ余りが出て来たら小数は循環するのであるが，いつでも同じ余りが出て来るのであろうか。今$\frac{a}{b}$, $(a,\ b)=1$の割算を実行した際の余りを考えよう。余りはbより小であるから，1, 2, 3, 4, …, $b-1$のいずれかである。余り0ではない。余り0の場合は有限小数となるのでII, IIIにはいらない。高々6回割算をつづければ余りが1, 2, …, $b-1$のいずれかであることから必ず同じ余りが出るのである。従って$\frac{a}{b}$の週期は高々$b-$

1個の数字を有することになる。$\frac{1}{7}$の週期は6個であり，同様に

$$\frac{1}{17}=0.\overline{0\ 5\ 8\ 8235\ 2\ 9411\ 7\ 6\ 4\ 7}$$

1 10151446951672313118121

は16の週期をもつ。しかし

$$\frac{2}{41}=0.\overline{0\ 4\ 8\ 7\ 8}$$

2203632332

は週期5である。つまり$\frac{1}{7}$や$\frac{1}{17}$は最高限度の週期をもつが，$\frac{2}{41}$はそうでない。

週期についてもっとくわしいことがIIの場合にはいえる。分数$\frac{b}{a}$は既約とし，分母が10と互に素であるとする。従って分母が2および5を因数としてもたないものとする。このとき$a \div b$のすべての余りは心ずbと互に素になる。何故かといえば，ある段階でrが余ったとすれば，次の段階の余りは

$$10r=qb+r_1$$

より，

$$r_1=10r-qb$$

$(10, b)=1$，$(r, b)=1$より$(10r, b)=1$だから$(r_1, b)=1$となる。

このように$\frac{a}{b}$の次々の余りが皆bと互に素でbより小であるから，$\frac{a}{b}$の週期はbより小さくbと互に素な数の個数を超えない。

bより小さく，bと互いに素な数の個数を$\varphi(b)$で表す。これをオイラーの関数といっている。例えば

$\varphi(2)=1$　(1)

$\varphi(3)=2$　(1, 2)

$\varphi(4)=2$　(1, 3)

$\varphi(5)=4$　(1, 2, 3, 4)

$\varphi(6)=2$　(1, 5)

$\varphi(7)=6$　(1, 2, 3, 4, 5, 6)

$\varphi(8)=4$　(1, 3, 5, 7)

である。pを素数とすると，pより小なる数はすべてpと互に素であるから

$$\varphi(p)=p-1$$

となる。上に述べたことをいいなおすと次の様になる。

10と互いに素な数bを分母とする分数$\frac{a}{b}$の週期は高々$\varphi(b)$個の数字から成っている。

この$\varphi(b)$というオイラーの関数は初等整数論で常用される記号で，有名なフェルマーの定理とも関係する。(5) すなはちmを正の整数とするとき，法mの剰余類はm個あるが，法mの剰余類でmと互に素なる数からできている類を既約剰余類といい，その数は$\varphi(m)$すなわちmと互に素なる正の整数のうちmより小なるものの総数となる。$\varphi(m)$の既約類から一つづつ代表を取出して，a_1, a_2, …, a_n; $n=\varphi(m)$とするとき，これらを既約剰余系の一組という。今a_1, a_2,

$\cdots$, a_n $n=\varphi(m)$, を一組の $mod.\,m$ の既約剰余系とする。$(a,\ m)=1$ ならば各々に a をかけた積

$$aa_1,\ aa_2,\ \cdots,\ aa_n \qquad (1)$$

は不合同である。なぜならば，$aa_i\equiv aa_j\ (mod.\,m)$ とすると $a(a_i-a_j)\equiv 0\ (mod.\,m)$, しかるに $(a,\ m)=1$ だから $a_i-a_j\equiv 0\ (mod.\,m)$ となって既約剰余系であることに矛盾するからである。

(1)の数たちは互に合同でなくかつ m と互に素なることも明らかであるから，(1)もまた一組の既約剰余系である。すなわち(1)の数たちは全体においては一つずつ a_1, a_2, $\cdots$, a_n と合同になるから，$a\equiv a'\ (mod.\,m)$, $b\equiv b'\ (mod.\,m)\Rightarrow ab\equiv a'b'\ (mod.\,m)$ という合同式の性質を用いると

$$a^n a_1a_2\cdots a_n\equiv a_1a_2\cdots a_n \qquad (mod.\,m)$$

$(a_1a_2\cdots a_n,\ m)=1$ だから

$$a^n\equiv 1 \qquad (mod.\,m),\ \ n=\varphi(m)$$

となる。これを**オイラーの定理**という。特に法が素数 p なるときは $\varphi(p)=p-1$ となって，次のフエルマーの定理をえる。

フエルマーの定理　p が素数で a が p で割り切れないならば

$$a^{p-1}\equiv 1 \qquad (mod.\,p)。$$

さてこの節の目標は次の定理である。

定理（循環小数の週期の長さ）　$(b,\ 10)=1$, $(a,\ b)=1$ のとき分数 $\frac{a}{b}$ の小数表示の週期の長さ（循環節の中の数字の数）λ は

$$10^{\lambda}\equiv 1 \qquad (mod.\,b)$$

なるような最小の λ である。

証明　このような λ のことを，λ は b に関する 10 の指数であるという。$(10,\ b)=1$ だからオイラーの定理により $10^{\varphi(b)}\equiv 1\ (mod.\,b)$. ゆえに λ は $\varphi(b)$ の約数になる。また $\frac{a}{b}$ の週期 λ は a に関係なく b のみによって確定することをこの定理は述べている。$(10,\ b)=1$ の場合だから，先に述べた分類のIIにあたる。このとき $\frac{a}{b}$ は純循環小数になること，すなわち週期が小数点の直後からはじまることを述べよう。それには最初に現われる同一の余りが a 自身であることをいえばよいが，そのために二個の相等しい余り r_m, r_n の直前の余り r_{m-1}, r_{n-1} は相等しいことをいってもよい。

$$10r_{m-1}=q_{m-1}b+r_m,$$
$$10r_{n-1}=q_{n-1}b+r_n,$$

の辺々引き算をして，$r_m=r_n$ を用いれば

$$10(r_{m-1}-r_{n-1})=b(q_{m-1}-q_{n-1})$$

$(10,\ b)=1$ だから b は $r_{m-1}-r_{n-1}$ を整除する。$|r_{m-1}-r_{n-1}|<b$ であるから $r_{m-1}-r_{n-1}=0$, 従って $r_{m-1}=r_{n-1}$ となる。このようにして一つずつ前に戻ってくれば，たしかに a まで逆行することがわかる。即ち b が 10 と互いに素ならば最初に現われる同一の余りは a と等しいのである。故に週期は小数点の直後からはじまる。この週期の長さを λ とすれば $\frac{a}{b}$ の小数展開を行う時，割り算を λ 回繰返せば余り a が現われる。割り算を繰り返す際にその度毎に 0 を 1 個付加して行くのであるから λ 回の割り算では 0 を λ 個付加している。つまり上のことは $a\cdot 10^{\lambda}$ を b で割れば a が余ることを示しているのである。従って $a\cdot 10^{\lambda}-a$ は b で割切れるはずである。ところが

$$a\cdot 10^{\lambda}-a=a\ (10^{\lambda}-1)$$

で，a と b は互いに素であるから $10^{\lambda}-1$ が b で割り切れることになる。余り a が最初に出現するとともに週期は完結するのであるから $a\cdot 10^{\lambda}$ を b で割った時 a が余る様な最小の数が λ である。故に λ は $10^{\lambda}-1$ が b で割切れるような最小の数である。(証明終)

注

(1) 高等学校用教科書，新編数学 I，1988 年版，数研出版，p. 38。

(2) この面白い例は '89 全道合研数学教育分科会に提出された滝川高等学校成田収の報告による。

(3) 実数の公理系とアルキメデスの原理，自然数の整列性については次の論文に述べた。「数学的帰納法について」山口格，教授学の探究第 5 号，1987 年。
「数学教育の観点から見たアルキメデスの公理」山口格・須田勝彦，北海道大学教育学部紀要 49 号，1987 年。

(4) （区間縮小法）有界閉区間の列 $(I_n)_{n\in N}$ が単調減少すなわち，

1) すべての $n\in N$ に対し $I_n\supset I_{n+1}$ をみたすとき，すべての I_n に共通に含まれる実数が存在する：

$$\bigcap_{n\in N} I_n\neq\phi$$

2) 特に $I_n=[a_n,\ b_n]$ とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

ならば，共通部分は一点 a より成る：

$$\bigcap_{n\in N} I_n=\{a\}$$

またこのとき $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=a$ である。

(5) フエルマーの定理 $x^n+y^n=z^n$ $(n>2)$ の整数解を求めるフエルマーの大定理とは異なる，フエルマーの小定理である。

参　考　書

本稿を書くに際し，数学的記法を参照した書物は次のとおりである。

(1) 解析入門 I．杉浦光夫著．東京大学出版会，1980 年．

(2) 解析学要論．功力金二郎著．弘文堂，1951 年．

(3) Von Zahlen und Figuren, Rademacher・Toeplitz. Springer. 1930.

(4) The Theory of Numbers, Hardy-Wright. 4 Ed. Oxford. 1968.