《実践報告》

授業書「鏡による図形の移動」と授業記録

須田勝彦
(北海道大学教育学部)
久蔵宏幸
(北大教育学部86年度卒業生)
岡野勉
(北海道大学大学院教育学研究科博士後期課程)

0. はじめに

(1) 幾何教育の困難さ

「『幾何学がアーチの原理に使われるなんて，幾何学に対する侮辱である』とか『天文学の唯一の役目は，純粋知性によってだけ知覚されることがらだけを瞑想するように，精神を高めるのを助けることである』などというのは，20世紀の数学者の場合には，まさしく気取った見せかけにすぎない。」20世紀の冒頭，J. Perryはユークリッド中心の伝統的数学教育を批判してその改革の必要を説いた。おおまかな流れとして，その後の数学教育はペリー，クラインらの主張の漸進的とりいれの過程だったといえる。わが国でもそれは，「論証幾何」の前に「直観幾何」がとり入れられる，関数概念が強調される，などの形で実現された。

しかし，「論証幾何」と「直観幾何」という概念的区別について考えてみても，およそすべての数学教育のテーマは概念の論理性を学習者の直観的理解といかに調和あるいは対立させるかを課題としているとするなら，論理性なき直観と直観ぬきの論理性を学年別に割り振るものでしかなかったといっても過言ではない。関数概念の強調にしても，代数・幾何という中等数学の二本の柱は保存されており，その中での「態度」のようなものとして強調されるに過ぎなかった。ペリーらの改良運動が多くの成果をもたらしたことは明らかとしても，不徹底であった，というよりはその到達点自体が不明なものでしかなかった。そしてそれは「現代化」によって批判されることとなる。

「現代化」のテーマそれ自体が「ユークリッドよくたばれ」であったことは改良運動の不徹底さを示している。「一生のうちに，一度でも『シムソン線』や『フォイエルバッハの円』を役に立てた人がいるだろうか？」というデュドネの主張は多くの人に自然に受け入れられうるものだった。しかし，「現代化」が数学教育の内容を新しくしたというより，現代数学の用語，記法の未消化なとりいれに終始して批判を受けるとともに，幾何教育の位置もまた見直される。

(「現代化」は)「一方では，研究のための見習い期間の理想的な場，ユーリッド幾何学のような演習の無尽蔵な宝庫，を放棄することになり，他方では，それを集合や論理の構造に関する一般論，すなわち有り得るものの中で最も貧しく空白で，我々の直観を失望させる題材で置き換えることになったのである。」(ルネ・トム，ジョラン編「何のための数学か」，1975年，東京

図書)「現代化」は幾何学を解体したブルバキのアイデアによるものであり，そこでいわれる「現代数学」は「現」代数学ではないかとの疑いも提出されることとなる。

このように大まかな流れを見ただけで，幾何教育のあり方を考えることは，数学教育全体のあり方を考えることとほとんど同値ではないかと思われるほど確定しがたい論点を含んでいる。しかしながらそれは，我々にとって必ずしも悲観すべきことではなく，幾何教育という研究領域の広大さを示すものと考えることもできよう。遠山啓は次のように述べている。「幾何学は数学という学問の中の明確な境界をもつ限定された一領域とみなすべきではなく，数学の全地平の上に広がる青空のようなもので，数学全体にはるかなる見通しと光明を与えるものである。数学はそこから新しい啓示を受け取って成長してきたし，これからもおそらくそうであろう。」(遠山啓「幾何教育について」『数学教育現代化の基礎　関数・空間』1971年，国土社)

(2) 幾何教育の基本構想

幾何教育の領域におけるこれまでの実践的研究の貴重な成果（とくに河口商次らの変換の幾何，長妻克亘らの折れ線の幾何など）を整理することは後の課題として，ここでは我々の幾何教育の大まかな構想を述べておきたい。

まず，初等および中等教育における幾何教育の目標を「ユークリッド空間における図形の基本性質を教えること」に設定する。「論証」や「精神の鍛錬」を目標とはしない。また，空間一般とするのはかえって目標を見失うおそれがある。幾何学の一般的対象である多様体の概念はユークリッド空間の概念をもとに構成されることからいっても，特殊すぎるとはいえまい。ユークリッド空間よりもゆるい性質の空間については，ユークリッド空間の性質を明確にするためにいずれかの段階で必要な概念である。「空間観念の発達は歴史的順序よりは公理的順序に従う」というような見解はとらない。次元については2次元または3次元が適当であろうことは当然であろうが，その指導段階は極めて大きな，かつ魅力的な検討課題である。

その「基本性質」の内容をどうおさえるべきか。まず，空間，図形をそれ自体として研究する方法を仮に総合幾何，とよぶ。旧来の幾何教育はきりはなされた総合幾何の一面的強調に問題があったことは今や明らかであろう。可能な限り早期に空間や図形を研究する手段としての解析学や線形代数学の力を借りるべきである。しかし，幾何の教育は，解析学や線形代数の指導に解消されないこともまた事実であろう。数学論の領域において数学の対象を「量と空間形式」であるとするF. エンゲルスの見解に対して，空間形式もまた質的無関与性としての量のカテゴリーに含めるべきという考えもあるが，量と空間は，有限と無限，離散と連続などと同様に，数学的認識発展の契機と考える方が，少なくとも数学教育の立場からは有効であろう。

ここで「基本性質」の内容を考えるとき，解析学や線形代数を用いた指導を可能にするには，どのような準備が必要であるか，という形で問題を立ててみよう。

必要と思われる項目を列挙する。

a） ユークリッド空間を特徴づける変換群が相似変換群であることから，拡大•縮小，及び相似に関する諸性質。量の領域における倍や比との関連づけ。

b） その最も重要な部分群である合同変換群（等長変換群）を扱うことを可能にする，等長変換の担い手ともいうべき平行四辺形，円などに関する諸性質。

c） 解析学における実数論の位置に似ていて，幾何学的諸量の性質を導く鍵となる「面積」

および「面積測度」の概念。

d） デカルト座標の導入を意味あるものとする根拠としてのターレスの定理，直交座標系における距離の概念に関わるピタゴラスの定理。

e） このほかに，幾何学の楽しさを演出しうる無限に多くの話題のなかのいくつか。折り紙，二次曲線などの他に，さきのシムソン線やフォイエルバッハの定理（たとえば矢野健太郎「幾何の有名な定理」，1981年，共立出版参照）など，古典的総合幾何の諸定理もこの素材たりうる。

これらの内容を整理した上で数学教育のカリキュラムとして構成し，その授業プログラムを実践的に研究して行くことがさしあたりの課題であろう。これまで，我々のグループでは，相似（佐藤敬行：1977年度修士論文），面積（氏家英夫：1981年度修士論文），多角形と円（須田勝彦：道数協編「新版算数たのしい学習プリント」3年下，1987年）などについて端緒的な試みを重ねてきた。本稿はその一環として1986年度及び87年度に授業が実施された等長変換についての実践報告である。分担は全体的な構想については須田，授業プログラムの作成及び86年度の実践結果の考察については久蔵，87年度の実践結果の考察については岡野が，主として責任をもっている。

(3) 実践の概要

平面の等長変換は鏡映，併進，回転にわけられる。このプランは具体的操作を通してそれらに親しませると共に，それらの相互関係（並進は軸の平行な2回の鏡映によって生成されること，回転は軸の平行でない2回の鏡映によって生成されること，そして平面上の任意の等長変換はたかだか3回の鏡映によって生成されること）を明らかにすることを目標としている。このあと，これを用いて対称な図形や平面のしきつめなどに進むが，本稿では省略する。

授業は，1986年12月15日から23日にかけて札幌市立西岡南小学校5年3組（授業者須田智恵子教諭）及び1987年6月19日から7月8日にかけて同白石小学校6年1組（授業者佐々木和子教諭）の2度にわたって実施された。授業時数はそれぞれ8時間，11時間であったが，後者は等長変換に続く対称な図形に関する指導も含まれている。以下に紹介する授業記録，ファイルノート，及び感想文は特に断わらない限り2回目の授業のものである。

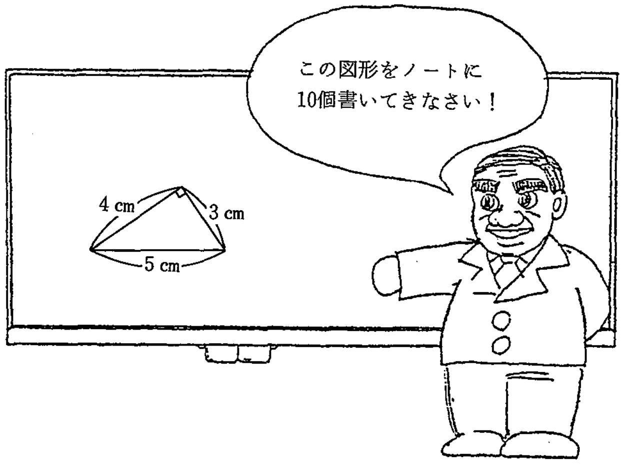
1．鏡　映

ここでは，等長変換のうちの「鏡映」を定義する。まず子どもに鏡を渡し，紙の上に垂直に立てて写った図形をなぞって描かせる。この写り方をもとに鏡映を定義するのである。

ぼくの先生は，算数の宿題を毎日出すのだから，いやになっちゃう。

それも変な宿題ばかり……。

今日の宿題なんか，



だぜ！

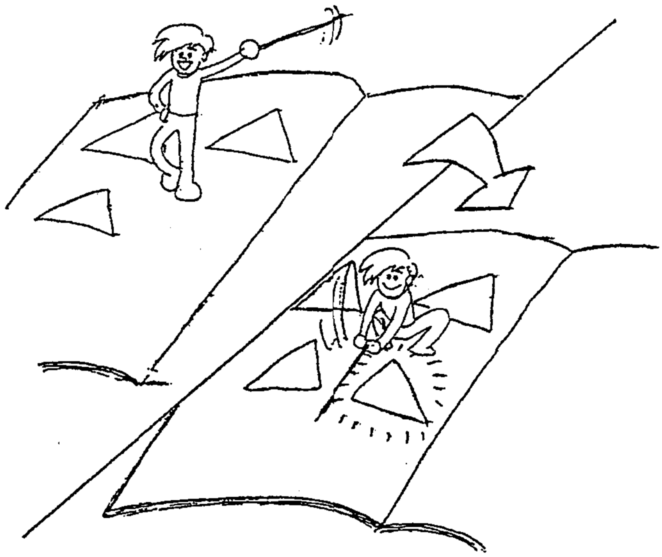
全く，いやになっちゃうよ。

— 1 —

ノートに，その三角形を3個書いたとき，
「ばっかみたい。鏡映すればいいのに」
と，声が聞こえたんだ。
「えっ？」
周りを見回しても誰もいない。
「ここだよ。ここ。」
目の前の鏡の中には，驚いたぼくの顔と，知らない子が映っていたんだ。

— 2 —

「ぼくの名まえは，みらあ，鏡の中の世界から来たんだ。」
「さっき，みらあ君は，鏡映って言ったけど……。」
「そう。鏡の中の世界では，鏡映で図形を好きな位置に動かすことができるのさ。ほら，ここに鏡を置くと……。」
　みらあ君は，何か針金のようなものを取りだしました。
「それが鏡かい？」
「そうだよ。」
と，それをノートの上に置くと……。



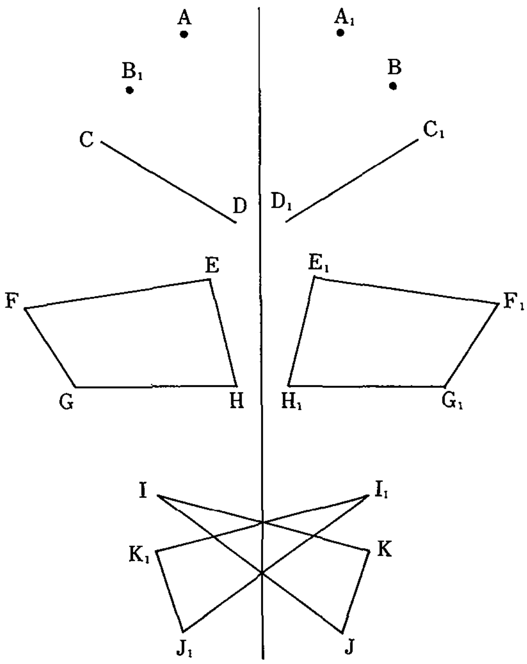
　みらあ君が鏡をノートの上に置くと，三角形が，鏡のちょうど反対側に書かれました。

— 3 —

「それ，おもしろいなあ。ちょっと貸して！」

みらあ君の鏡を使って，いろいろな図形を鏡映してみると，次のようになりました。

（A，B，C，……が鏡映で，それぞれ，A_1，B_1，C_1，…に動きました。



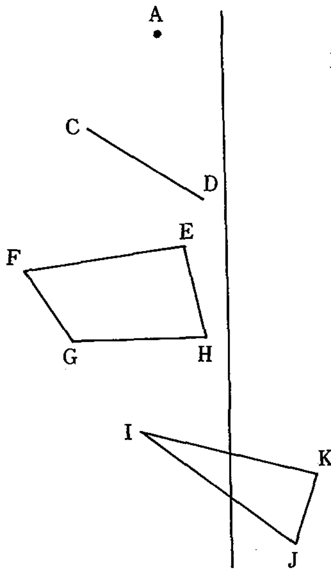
AとA₁，BとB₁，CとC₁，……など，鏡映の前と後の同じ点を <u>対応する点</u> といいます。

さて，ここでみなさんに鏡を渡します。

ただ，みらあ君の鏡よりは，ずっと性能が悪いので，動いた図形は自分で書かなくてはなりません。

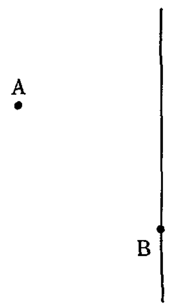
詳しい使いかたは先生に教えてもらいましょう。

4ページの図形が，ほんとうにその通り鏡映できるかどうか確かめてみましょう。



《プランの解説》

ここで渡す鏡とは，透明なアクリル板で多少着色されているもの。授業では，厚さ2 mmで10 cm×10 cmの大きさのものを使用した。鏡を紙の上に垂直に立てると，光の加減により手前の字や絵が鏡に写って見え，同時に鏡の裏側も透けて見えるので，写ったものをなぞって書くことができる。ここでは実際に作図させ，鏡の扱いかたに慣れさせる。また，作図をしながら鏡をはさんで「ちょうど反対側」に写ることを確認させる（△IJKは，鏡の両側から2回に分けて作図する，あるいは顔を鏡に近づけて鏡のま上から両目で見るとよい）。



問1

・定規やコンパスを使って，Aに対応する点A_1を，書いてみましょう。
　どのように書いたのか，説明しましょう。

・Bに対応する点は，どこになりますか。

鏡映で図形がどう動くのか，まとめてみよう。

鏡　映

・対応する点を結ぶ直線は，鏡と（　　　　　）に交わる。

・対応する点は，鏡までの長さが（　　　　　）。

・鏡の上の点は，（　　　　　）に鏡映される。

— 6 —

《プランの解説》

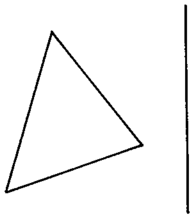
問1のA_1の作図は，5ページの鏡を使った作図により，Aの「ちょうど反対側」となる点に作図する。そして，ここで話しあった結果をまとめ鏡映の性質として示す。このように，ここでは実際の鏡の写りかたを利用して鏡映の定義をするのである。ただし，問1の点Bの作図は自明ではない。点Bは鏡に写らないのであるから，これは「同じ点に移る」ことを定義しなければならない。もちろん，そうしなければならない根拠はまったくないのだが，4ページの△IJK，△$I_1J_1K_1$を使って，同じ点に移る根拠とするのがよいだろう。

練習 1

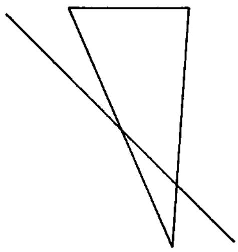
みらあ君は，鏡を次のように置きました。

定規やコンパスを使って，鏡映した図形を書いてみました。

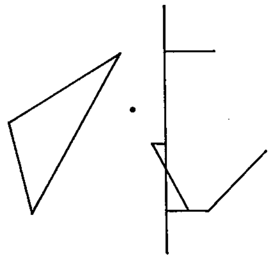
(1)



(2)



(3)



— 7 —

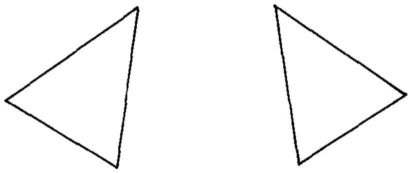
《プランの解説》

6 ページで定義した鏡映に従って作図を行なう。

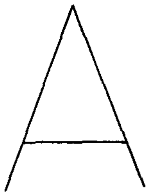
練習 2

鏡をどこに置いたのでしょうか。鏡を書いて見ましょう。

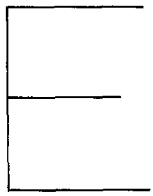
(1)



(2)



(3)



— 8 —

《プランの解説》

練習２は，４ページとは逆に，鏡映した図形から，鏡の位置を書き入れる問題である。対応する点を結んだ直線の中点を２ヶ所取り，それらを結ぶとよい。

《ファイルノートから》

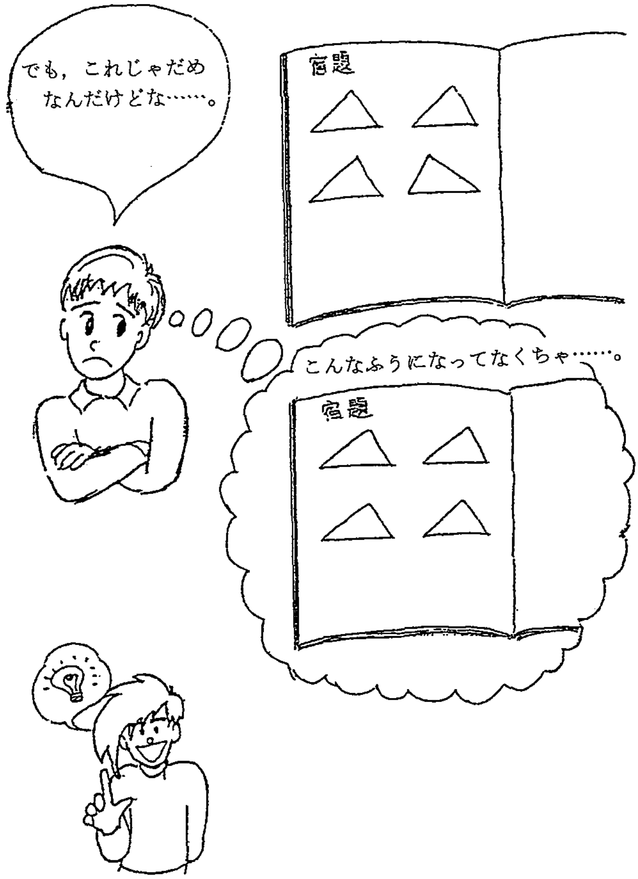
5ページの作図については，37名中誤りは4名（うち無解答1名）で，うち2名は△ IJK に関するものである。一方は△ $I_1J_1K_1$ が片側しか書かれておらず，他方は点 K を移さずに△ I_1IJ_1 を書いている。△ IJK は，図形と軸が重なっているために作図がむずかしいためであろう。問1（6ページ）については，誤りは7名（うち無解答1名）であった。これらは，いずれも「B に対応する点はどこになりますか」という問に対するもので，「同じ点に写る」という解答は自明ではなく，ここで新しく定義しなければならない。6名はいずれも点 B_1 を鏡の延長上または右側に書いている。一回めの授業（須田先生による）においても，「その線の上のどこか」という，線上のどこかの別の点に対応するという答えが見られた。「鏡の上の点は同じ点に写る」ことはここで新しく定義されるわけである。このことを明確にする必要がある。

練習1（7ページ），練習2（8ページ）は，いずれも良くできている。これは，練習1については（プランの指示に反して）鏡を使ったことによる。定規とコンパスで作図した一回めの授業では，(2)（図形と鏡が重なっており，しかも鏡が斜めになっている）について，10名の不正解があった。そこでは，対応する点をとるとき，軸に垂直な線を引かず，軸とは関係なく水平に線を引いてしまうミスが目立っていた。また，練習2では，(3)について，鏡を縦に書いてしまうなど4名の不正解があった。今回，不正解は，いずれも無解答の1名のみであった。定規とコンパスによる作図は，鏡による作図に十分慣れてからの方が良いだろう。

このように，鏡映の部分についてのファイルノートは，△ $I_1J_1K_1$ の作図(5ページ)，点 B_1 の位置（6ページ），作図上のミス（7ページ）を除いては，よくできている。

2．並　進

2つの平行な直線を軸とする2つの鏡映を合成すると，軸の位置とは関係なく，軸の間隔の2倍だけの並進になる。実際に作図することによりそのことを確かめ，その結果をもとに並進を定義する。



問2

さあ，みらあ君はどうしたと思いますか？

— 9 —

《授業記録》（第2時）

T：はい，それでは昨日やったことおぼえてますか？

C：おぼえてます。　C：おぼえてません。

C：どこにね，鏡を置いたらいいか。

C：鏡映

T：そうそう，どこに書いたらいいか，鏡映したらどこに移るか，鏡をどこに置いたらいいか，ということなんだねども，では今日のプリント。〔9ページ配布〕

T：はい，そしたら，プリント読んでください。

C：〔読む〕

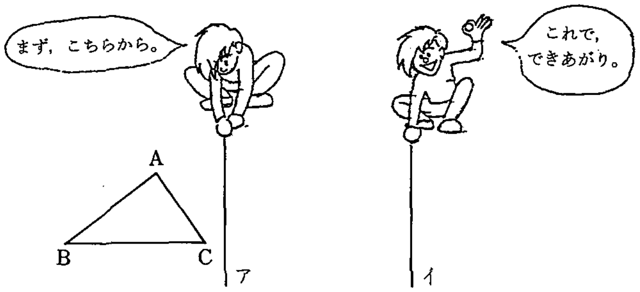
T：でも，これじゃあだめなんだけどなー。「でも」って何ですか？……逆接ですね，書いた…

んだけどもだめなんですね。これじゃあだめなんです。…これってどれですか？
C：この反対のやつ。
C：鏡映だった。
T：鏡映だったら？……反対になってる？……反対ってどういう意味？
C：反射。　C：さかさま。
C：3つとも同じ方向に向いているんだけれども，このひとつの鏡映した三角形だけが別の方向に向いてる。
T：あぁ，なるほどね。もう一回言ってください。
C：〔繰り返す〕
T：方向が逆になっているね。安藤さんどうですか？
C：これだけ違う方向になってるから，せっかく鏡映しても違うから，だめ。
T：だめ。あぁ，こんな風になってなくっちゃ……，と行きたいんです。さぁ，みらあ君はどうしたと思いますか？　ちょっと考えてみてください。何かいい方法はないでしょうか？班で話してみてください。
C：〔しばらく話合う〕
T：はい，そしたらね，順番に言ってください。はい。4班。
C：三角形の上のとんがっているところのまっすぐなところに鏡を置いて，片方側から見たところを書いて，また，逆から見たところをなぞって，それから前のやつを消す。
C：？……
T：わからない？
C：わかりません。
T：もう一回いって。
C：〔繰り返す（教師が聞きながら実演する)〕
C：あぁわかった。意味わかった。
C：鏡映したやつをそうやるんだな。
C：それを鏡映して，今度のやつを……
C：そうじゃなくて，鏡映したやつが反対だから，それをもとのやつにもどすのにそうやる。
T：あ，さっき先生が1回めに書いたのは鏡映した三角形だったんだ。じゃあ，鏡映を2回するっていうことかい？
C：そうだよ。反対。こっちから見たのと，こっちから見たのと。
T：あぁそうか。わかんなくなってきた。じゃあ，5班の人。
C：まだわかりません。
T：6班。
C：まだわかりません。
T：7班。
C：ひとつだけ逆になってる三角形をもう一回鏡映して，その反対に移ったやつを書いて……。
T：もう1回鏡映するの？…鏡映したのをもう1回鏡映するのね？　はい，8班。
C：まだわかりません。
T：はい，10班。
C：まだ考えてません。

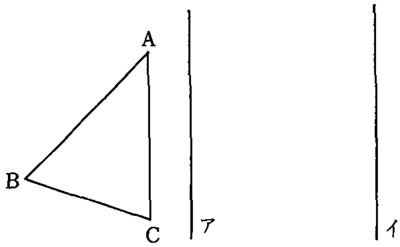
T：はい。
C：鏡映した三角形をまた鏡映する。
T：はい，1班。
C：鏡映して反対になった三角形をもう1回鏡映する。
T：はい，2班は？
C：鏡映した三角形をもう1回……
T：鏡映する？　はい。／8班何かおもしろそうなことやってなかった？　だめなの？
C：それやってもね，こんどね，ここに移んないでね，こっちの横に移っちゃうから。
T：あぁほんと。じゃあ，ちょっとだめみたい。何かおもしろそうだったのにな。さぁ，そしたら，みらあ君はいったいどうしたのか。次のプリントを配ります。〔10ページ配布〕

「鏡を2回使えばいいのさ」
と言って，みらあ君は，まず △ABC を鏡アで $\triangle A_1B_1C_1$ に鏡映しました。
次に，鏡イを鏡アと平行に置いて $\triangle A_1B_1C_1$ を $\triangle A_2B_2C_2$ に鏡映しました。

練習3
鏡を使って，みらあ君のやった通り鏡映してみましょう。



練習4　鏡を使って，鏡映してみましょう。



—10—

《プランの解説》

練習3，練習4では，2回鏡映した結果が，もとの図形と（向きも考えて）同じになることに気づかせたい。そのため，特に作図の厳密さを必要とするわけではないので，鏡を使っての作図となっている。

《授業記録》

C：やっぱりこれだ。やった！

T：やっぱりそうだった？　そしたら読んでください。あきまくん。

C：〔読む〕

T：はい，そうです。まず，鏡アを使って1回鏡映しました。次に鏡イを鏡アと平行に置いて，△ $A_1B_1C_1$ を△ $A_2B_2C_2$ に鏡映しました。では，練習3です。鏡を使って，みらあ君のやった通り鏡映してみましょう。わかるかな？　言ってること。はい，じゃあ，まずアに鏡を置いてください。はい，では△ $A_1B_1C_1$ を書いてください。

C：〔作業〕

T：はい，隣の人どうですか？　いいですね。そしたら，もう一度。今度はイのところに鏡を置いて△ $A_1B_1C_1$ を鏡映してみてください。

C：〔作業〕

T：はい，だいたいできたね。じゃあ，前見てください。1回鏡映したところ。1回鏡映した△ $A_1B_1C_1$ っていうのを書いといてね。そして，2回め $A_2B_2C_2$，書いといてください。では，はじめにあった三角形と2回鏡映した $A_2B_2C_2$，これとどうですか？

C(数名)：同じ。

T：同じ……向きも同じ。

C：そしたら，さっき言ってた人のとおりでできるんだ……，ね？そしたら，練習4。鏡を使って，今度はちょっと違った三角形です，それを鏡映してください。

C：〔作業〕

T：はい，みんなよくできています。では，次のプリントを配ります。〔11ページ配布〕

《ファイルノートから》

練習3と練習4は，前回の授業では，プランの意図に反していずれも鏡を使わず，定規による作図題とされていた。そのため，時間がかかり，時間不足もあって子どもには難しかったようである。作図の手順は理解していると思われるが途中で作業が終わってしまった子どもも多かったし，また頂点 B_1 と C_1 を逆に記入した子どもも3名見られた。今回はいずれもプラン通り，鏡を使っての作図とした。そのこともあってか，ファイルノートを見ても作図はよくできていた。ただし記法上のミスはやはり多く，頂点 B_1 と C_1 を逆に記入していた者がそれぞれ9名と8名，記号を書いていない者が1名と3名，添字を書いていない者が1名ずつ見られた。これらの合計はそれぞれ11名，12名となり，全体の約3分の1となる。

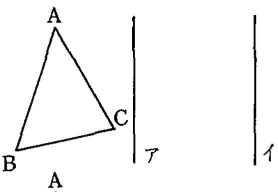
問 3

下の△ＡＢＣを，2 枚の鏡で鏡映したとき，どこに動くか予想してみましょう。

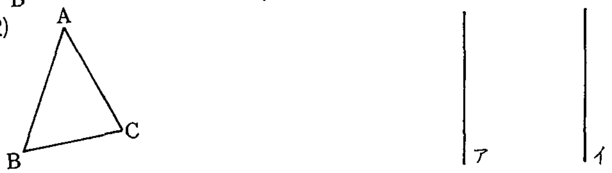
だいたいこのあたりだと思うところに，$\triangle A_2B_2C_2$ を書いてみましょう。

$\triangle A_2B_2C_2$ が，紙の外に出てしまうと思ったら，×印をつけておきましょう。

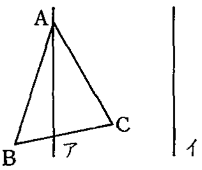
(1)



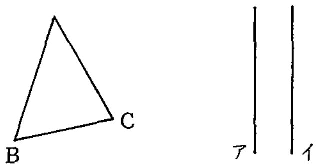
(2)



(3)



(4)



— 11 —

《プランの解説》

問 3 は予想なので，「だいたいこのあたり」という程度でよい。ただ，2 回の鏡映なので 10 ページの結果からわかるように，同じ向きの図形になることに注意させておく。

《授業記録》

T：問3読んでください。

C：〔読む〕

T：はい，予想なんです。ちょっと鏡を使わないようにしてください。予想です。使ってはいけません。(1) 2回鏡映したら，△ $A_2B_2C_2$ はどの辺に移るでしょうか？　フリーハンドで，定規使わなくていいですから，この辺だなあと思うところに書いてみてください。

C：〔作業〕

T：書いた？　1つでいいの。2回鏡映した△ $A_2B_2C_2$，1ケでいいの。

C：2つ書いちゃった。

T：いいよ，考えるために2つ書いてもいいけど。書いた？……。はい，ではこの辺に書いた人。〔予想分布を調べる〕

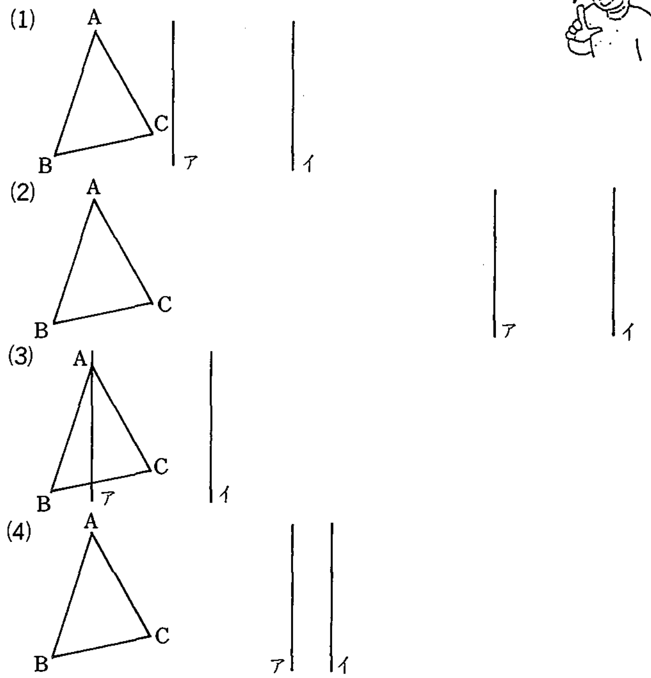
《ファイルノートから》

問3は，前回，「意味がわからない」という声も多かった。これは鏡の位置にとまどったものと思われる。そのため，予想時にもあまり興味を持ったようすが見られなかった。予想分布については，(1)はほぼ全員が正しい位置に予想でき，(2)はほぼ全員が×印をつけた。(3)(4)は×印がそれぞれ10名，7名で，無答も目立っていた。今回の予想分布を表にすると次のようになる。前回と同様，(2)について，「紙の外に出る」と予想している子どもの数は圧倒的に多い。

	正　解	誤　答	白　紙	合　計	×　印
(1)	15	15	6	37	0
(2)	0	34	3	37	33
(3)	20	17	0	37	0
(4)	0	35	2	37	1

練習5

では実際に，作図してみましょう。



- 2枚の鏡の間隔をはかってみましょう。
- 対応する点の距離をはかってみましょう。

— 12 —

《プランの解説》

練習5の結果，鏡の位置には関係なく，鏡の間隔によってのみ並進の距離が決まることがはっきりする。

《授業記録》

T：予想だからはずれてもいいんです。あたったらもうけものです。実際にやってみます。プリント配りますから。〔12ページ配布〕では，練習5ばん。実際に鏡映してみてください。

C：〔作業〕

C：もどってきたみたい。

T：もどってきたって……。

C：なにが？
C：全然予想とちがうよ。はみでるべやな。やっぱり。
C（数名）：はみでない。
C：はみでねーの。おかしいな。
C：やっぱり私はあたっていた。
C：これ，ちょっと遠いよ。
C：2ばん，近いよ。
C：全然予想とちがうよ。
C：ほとんどちがう。
C：かなり違ってる。パッパラパーになりそう。
C：いまのところ全部あってる。

………

T：はい，そしたらね，途中の人もいるようですけどね，いったん手を置いてください。(1)どこに鏡映されましたか？
C：イの右
T：イの右。このあたりですか？
C：はい。
T：ここに，△ $A_2B_2C_2$〔書く〕。記号も書いといてください。／はい，(2)はどこに鏡映されましたか？
C：アと三角のまんなかへん。
T：この辺？
C：そう。それよりちょっと左。
T：(1)の三角の下？
C：そう
T：ここ，△ $A_2B_2C_2$〔書く〕。／(3)は？
C：その下。
T：またその下？　△ $A_2B_2C_2$〔書く〕。／じゃあ(4)は？
C（数名）：三角のすぐ右。
T：三角の…右…
C：すぐ右！
T：この辺？
C：ちがう。　C：もっとそっち。　C：そこ。
T：重なった，この辺り？　ふーんなるほどね。ここが△ $A_2B_2C_2$／さぁ，そしたら，あと2つだけ。まず1つめ。2枚の鏡の間隔をそれぞれ(1)から(4)まで測ってみてください。
C：〔作業〕
T：(1)は？
C：3 cm。
T：(2)は？
C：3 cm。
T：(3)は？

C：3 cm。
T：(4)は？
C：1 cm。
T：そしたらもうひとつ。対応する点の距離を測ってみましょう。最初の三角形と2回鏡映した△ $A_2B_2C_2$ の対応する点。A に対応する点は？〔C：A_2〕B に対応する点は？〔B_2〕C は？〔C_2〕この距離を測ってください。(2)も測ってください。(3)(4)全部測ってください。
C：〔作業〕測定結果は次の通り。
(1) $A-A_2=6$ cm, $B-B_2=6$ cm, $C-C_2=5.7$ cm
(2) $A-A_2=6$ cm, $B-B_2=5$ cm, $C-C_2=6$ cm
(3) $A-A_2=6.5$ cm, $B-B_2=5.7$ cm, $C-C_2=6$ cm
(4) $A-A_2=2$ cm, $B-B_2=2.5$ cm, $C-C_2=2$ cm
T：はい，だいたいのところをとってこんな風に書きましたが……何か気づくことないでしょうか？
C：倍になってる。
T：倍になってる？　何と何が？
C：鏡と鏡の線の長さ……鏡の間……。
T：じゃあ，みんなにわかるように。
C：鏡を置いたところの倍。
T：倍になっている…。2倍になっているね…。鏡の間隔の2倍になってる……。何か不思議ですね……。じゃあ終わります。

《ファイルノートから》

前回の授業では，(1)～(4)をすべて正しく作図できたのが10名だったため，作図によっては並進の距離と鏡の間隔との関係が明らかにならず，後から教師による黒板での説明を聞くだけになってしまった。今回の授業については，ファイルノートを見ると，すべて正しく作図できたのは23／37名，そのうち，対応する頂点間の距離を正しく記入していたのは9／23名であった。並進の距離と鏡の間隔との関係，どの三角形も同じ位置に移ることについては，これらの作図結果に加え，黒板で測定結果をまとめていることなどから，おさえられていると見てよいだろう。

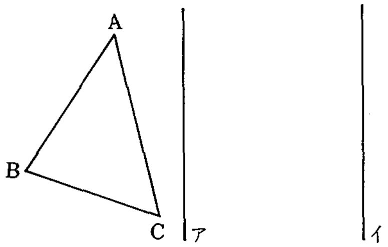
《授業記録》（第3時）

T：昨日やったのおぼえてますか？……忘れた？……ちょっとプリント見てください。プリント 11，12……。
C：わかった。
T：何やった？
C：鏡映したものをまた鏡映して，もとにもどした。
T：そう。鏡映したものをまた鏡映した。はい，なりたさん。
C：鏡映して移ったものをまた鏡映して，はじめの三角形にした。
T：うん。はじめの三角形にした。また鏡映して……ね。はい，2回しました。そしたら今日はね，鏡を使わないで書いてみましょうということです。〔13ページ配布〕

練習 6

$\triangle A_1 B_1 C_1$ を書かずに$\triangle A_2 B_2 C_2$
を書いてみましょう。

(1)



(2)

このように，すべての点を同じ方向に，同じ長さだけ動かすことを <u>並進</u> といいます。

鏡映を平行に 2 回くりかえしても，鏡の間隔の 2 倍だけ並進しても，同じ位置に図形は動きます。

— 13 —

《プランの解説》

練習 5 の結果，練習 6 では鏡の間隔を測れば並進の距離がわかる。なお，並進の方向が鏡と垂直であることについては言及していないが，鏡映の定義あるいはここまでの作図によって既に自明のことと考えてよいだろう。

《授業記録》

T：はい，みんなで読んでみましょう。
C：〔練習 6 を読む〕
T：はい，まずもとの△ ABC があるでしょ。鏡を置く場所は，まずアですね。もし鏡を置いたとしたら，これがどこに移りますか？……だいたい……

C：アとイのあいだ。
T：あいだ……こういう感じだね。向きが反対に移る。では，イに置いたらどうなりますか？
C：そのまたこっち。
T：また，そのまたこっち。これが反対に……こういう風に移る。同じ向きですね。2回鏡映したものを△ $A_2B_2C_2$ とします。1回めに鏡映した三角形を書かないで，いきなりこれを書いてほしい。しかも，鏡を使わないで……
C：できる。
T：できる？　ちょっと説明してください。できそうな人とできそうにない不安な人がいます。
C：きのうやったことでもいいんでしょ？
T：うん。
C：きのう，アとイの線の間の長さをはかって，その倍が△ $A_2B_2C_2$ ってことがわかったから……
T：ほおー。
C：長さの倍して，そこに点を打って，そこに三角を書くと，同じ向きで，きのうやったことと同じ。
T：なるほど，よくおぼえてるね。今，山田君がいったこと，わかりましたか？　辻さん，わかった？……何かわからないみたい？……もうひとり説明してくれる？……伊藤君。
C：きのうやったやつは，ふつうに鏡映するのと，鏡映を2回するのでは，その間が2倍になるっていうことだから，それをプリント13でも，そういうふうに定規で測っていったら，できる。
T：できる……じゃあアとイの鏡の距離を測ればいいんですね。測ってみてください。
C：〔作業〕
T：測った？　ゆみさん。
C：4 cm。
T：4 cm。そしたら？……どうすればいいのかな？……A地点から？……
C：A地点から……
T：倍はかる。
C：うん。
T：どうやってはかる？
C：三角定規。
T：三角定規使うの？……直角にしないとだめ？……
C：うん。
T：なるほど……うんと，どこを直角にするんですか？
C：鏡を置く場所。
T：鏡を置く場所？……ここ？……ここですか？……ここだね，うん。Aに対応する点 A_2 を書くんですね。そのときに直線を書くんですが，鏡と交わる所を直角にしないとだめでしたね。どうすればいいの？……どうやって書く？
C：線引いてのばせばいい。
T：あぁ，そうか。こう？……これで垂直になる？……なるね。そして，この線をのばす。はい，ここまでやってください。
C：〔作業〕

T：はい，では次。さっきの説明でいうと，距離の2倍を測るんですね。じゃあ，2倍のところに点 A_2 を書いてください。

C：〔作業〕

T：さっきね，誰か定規で4 cm 測ったでしょ。ほかに2倍する方法ないですか？

C：コンパス。

T：コンパス使えばいいんですね。このほうが簡単かな？……こうやって，これ(アイ)の1倍，2倍……／そしたら，B についても同じようにやってください。

C：〔作業〕

T：では，C についてもやってください。

C：〔作業〕

T：C から1倍，2倍……そうですね。では，(2)もやってください。

C：〔作業〕

T：わかりにくい？……では，できた人説明してあげて……

C：アイの長さをコンパスで測って，それを A の所に合わせて，2倍にして，そこに線を引く。A と C の線に合わせて，直角に……

T：どこに？

C：線に。

T：どの線？……イに？……直角？……アの線？……

C：鏡を置く所にね。

T：はい，ここですね。これが A_2。〔C も同様にする〕B の線を，アの線に合わせて垂直に引く(以下略)。／だいたいできてるね。これ〔各頂点から直線ア，イに垂直に引いた線〕はなくてもいいのかな？　これ……この線書いてない人いるけど，なくてもできるの？

C：線がなかったらだめ。

T：線がなかったらだめ？……どうして？……別にいいのかな？……さっき，高瀬さん説明してくれたっしょ？……じゃあ，これなかったとするでしょ？……ね？……それでコンパスでアイの距離測りました。A から1倍，2倍……，2倍の所っていうのはどこにでもあるんですよね。ここも2倍でしょ，ここも2倍でしょ，ここも……点 A を中心にして円を書いたら，この線どこでも2倍ですよね。そしたら，ここに A_2 って書いてもいい？

C(数名)：だめ。

C：等しくない。

T：だめ？　等しくない？　伊藤さん。

C：鏡を置く場所のアから垂直に，点の A とか C を結ぶ所に，円によってなければだめ。

T：だめ……。書いてる？……はい，そしたら，その下読んでください。

C：〔13ページ下段の文を読む〕

T：〔繰り返して読み〕ちょっと難しいね。先生が読んだ文の主語は何ですか？

C：「図形は」

T：述語は？

C：「動きます」

T：はい。どこに？

C：「同じ位置に」

Ｔ：「同じ位置に」ね。どうすると？

Ｃ：2回だけ……並進……

Ｔ：鏡映を平行に2回繰り返すと，同じ位置に図形は動きます，ね？　そうですね？　1回，2回……と，もう一つは？……鏡の間隔の2倍だけ並進したら同じ位置に動きましたね。鏡映しなくても，2倍並進したら2回鏡映したのと同じ位置に動きました。はい。では，もう1枚プリント配ります。〔14ページ配布〕

《ファイルノートから》

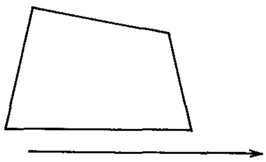
前回の授業では，(2)の作図をやり残している子どもが6名ほどいたものの，(1)はほぼ全員が作図できていた。これにより，鏡の位置によって並進の距離が変わらないことが理解できているかどうかは疑わしいが，鏡の間隔と並進の距離の関係については，教師の説明もあって，この時点で一応理解できたようである。これらはいずれも12ページでの内容である。今回の授業についてこの内容がおさえられていたことは先に見た。そのこともあってか，作図は(1)(2)ともよくできていた。

並　進

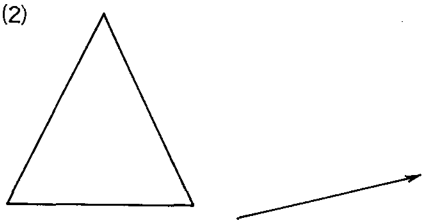
・対応する点を結ぶ直線は（　　　　）で，
　それらの長さは，すべて（　　　　）。

練習 7
矢印の向きに矢印の長さだけ，鏡を使わずに並進してみましょう。

(1)



(2)



— 14 —

《プランの解説》

これまでの作業結果にもとづき，ここで並進を定義する

《授業記録》

T：聞き馴れないことばが出てきました。「並進」です。先生が読みますから（　）の中にどんなことばを入れたらいいか，考えてくださいね。「対応する点を結ぶ直線は」…例えば，この図でいえば，A に対応する点は？

C：A_2。

T：これを結ぶ直線ね。B に対応する点は？

C：B_2。

T：これを結ぶ直線。この直線（AA_2）とこの直線（BB_2）の関係は？
C：平行。
T：そう，平行で，……「それらの長さ」……それらというのは何ですか？
C：A と A_2 の線。
T：はい，それから？
C：C と C_2 を結ぶ線。
T：「それらの長さは，すべて」？
C：等しい。
T：では，今度は練習 7。鏡がありません。並進してみましょう，ということです。(1)は四角形ですね。できるかな？
C：わかりません。
T：わかりません？　むずかしい？　何となくはわかる？
C：わかった。　C：わかんない。
T：全然わかんない？　ちょっとこうしたらいいんじゃないかなーと思い付いた人。言ってください。
C：わかりませーん。
T：はい，五十嵐さん。
C：四角の一番下の線は矢印と平行だから，A から線を引いてそのままのばす。
T：のばす？　ここ？
C：どれだけの長さ？
T：うん，なるほどね。どれだけの長さっていう質問がありましたが，どれだけの長さをのばせばいいんですか？
C：矢印の長さ。
T：矢印の長さだけですね。だけ……。そしたら，また……こう？……できそうだね。そしたら，一つだけやってください。矢印の長さだけ……これだけですよ。
C：〔作業〕
T：じゃあ，B についてはどうしたらいいか言ってください。夏目さん。
C：B のところの点を A の……C に平行……（聴取不能）
T：平行に？
C：まっすぐ引く。
T：平行の作りかた大丈夫ですか？……できますか？……忘れた人ちょっと見てください。〔説明する〕はい。……で，どうしたらいいんですか？
C：B のところから……
T：はい，この長さだけ……。では，C，B についても同じように……
C：〔作業〕
T：はい，いいね。では(2)もやってください。
C：〔作業〕
T：(2)わかりにくい人いますか？……わかりにくい？……あれ？　ちょっと全然違うんじゃない？　人によって……いろいろですね。わかりにくい？どこがわかりにくい？……はい，では黒板見てください。いいですか？　どうやったの？　二上さん，ちょと説明してくださ

い。
C：〔作図〕
T：こういう風になった？
C(数名)：ちがう。なってない。
T：違う？　どこが違う？　違うやり方の人……水上君。
C：矢印の方向にね，……矢印の方向に平行にする。
T：矢印に平行にしたの？〔作図しながら〕こう？　矢印に合わせて……そして，これに平行に……矢印に平行にした。そしてコンパスで，AはA，BはB，CはC……と，こういう風にした？
C：うん。
T：水上君のようにした人。
C：はい〔挙手〕
T：13人。はい。二上さんのようにした人。……15人くらい？……はい。そしたら，またプリント閉じておいてください。

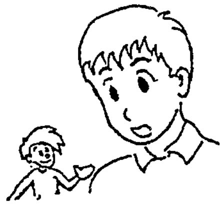
《ファイルノートから》

前回の授業では，時間不足のためこの問題はとばしていた。今回の作図結果について見ると，(1)はほぼ全員（33名）が正解（誤答は5／38名，その内4名が移動距離を矢印の2倍の長さにしている），(2)については同様の間違い(3名)に加え，並進の方向を水平にしている者(17名)が多く，正解はわずか14名であった。

3．回　転

交わる2直線を軸とする2つの鏡映を合成すると，軸の位置とは関係なく，軸の交角の2倍だけの回転となる。ここでも，実際に作図することによってこのことを確かめ，その結果をもとに回転を定義する。

「ところでみらあ君，2枚の鏡が平行でなくても並進になるんじゃないかな？」
「そう思うかい。じゃあ，ためしてみようか。」

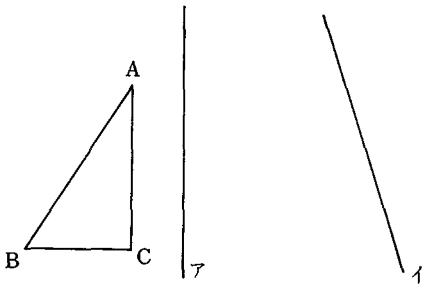


問4

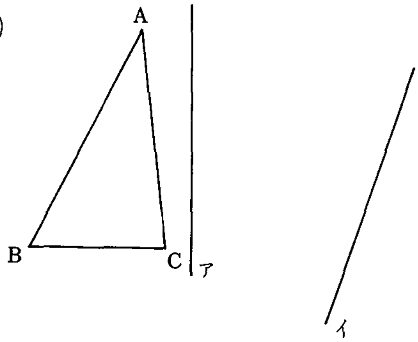
みなさんは，並進になると思いますか？

$\triangle A_1 B_1 C_1$，$\triangle A_2 B_2 C_2$ を作図しましょう。

(1)



(2)



— 15 —

《プランの解説》

まず，問4で，2枚の鏡が平行に置かれていないときは，並進にならないことを作図で確かめる。

《授業記録》（第4時）

T：はい，では算数始めます。昨日やったこと覚えてる？
C（数名）：はい，鏡映する。
T：鏡映したね。それから？
C：鏡使わなかった。
T：鏡使わないのもあったね。

C：定規で。

T：定規でやりました。

C：コンパス。

T：コンパスも使いました。

C：並進。

T：並進というのをやったんですね。鏡映を2回繰り返す。鏡の置き方どうだったか覚えてますか？

C：線のところに置く。

T：線のところに置いたね。はい，そしたら今日のプリントを配ります。〔15ページ配布〕では，読んでください。はい，大橋君。

C：〔読む〕

T：昨日は鏡を平行に置いてやったんでした……ね？……意識してた？

C：してない。してない。てきとうにやってた。

T：してなかった？　今日は鏡を平行でなく置いてみるよ。それで並進になるかな？　みなさんは並進になると思いますか？

C：なる。　C：ならない。

T：予想してください。なるなと思う人……12，3人。はい，ならないと思う人……だいぶ多いですね。はい，それでは，△ $A_1B_1C_1$，△ $A_2B_2C_2$ を鏡を使って書いてください。

C：〔作業〕

T：はい，では(1)，前に出てやってみてください。市川君。

C：〔作図〕

T：A_1 とか A_2 とかいう記号も書いてください。／はい，じゃあ前を見てください。だいたいみんな書けてますね。アとイ，平行じゃない。こうなりました。(2)もやってください。

C：〔作図〕はみ出たらどうしよう。

T：はみ出る？

C：あー違う。はみ出ない。

T：写ったように書いて。

C：……………………………………………………………………………………………………

T：だいたいできたみたいです。今，楠本君が書いてくれている間に考えてほしいんだけれども，並進になりましたか？

C(数名)：なる。なってる。なるよー。

T：なってる？　なってない？　なってるという人となってないという人がいる。

C：並進って長さが同じはずなのに……

T：はい。村田さん。

C：並進っていうのは，たとえばAと A_2，Bと B_2，Cと C_2 で全部長さがおなじはずなのに，同じになってない。

C：あ，そうか。

T：なってない？　ちょっと調べてみましょう。そしたら，(1)どう？　Aと A_2，長さ測ってみよう。……測った？……そしたらBと B_2，長さ測ってください。……はい，そしたらCと C_2。

C：〔測定〕

T：どうだった？

C：違う。

T：違う？

C：……だけで大きさは同じ。

C：あたりめぇだろ。

C：どこ測っていいかわかんない。

T：あ，どこ測っていいかわからない？　もう1回言うよ，そしたら〔再び説明する〕どうですか？　長さはAとA_2，こうですね？　BとB_2，どうですか？　長さは？　等しくない。CとC_2，長さは等しくない。AとA_2よりも……どうですか？……AとA_2の距離とBとB_2の距離を比べたら？　BとB_2の距離はAとA_2の距離よりも？

C(数名)：長い。

T：長いね。じゃあ，(2)調べてみましょう。AとA_2こうですね？　BとB_2はこうです。違うね。CとC_2はこうです。

C(数名)：違う。

T：並進にならなかった。そしたら，もう一枚配ります。〔16ページ配布〕16ページ読んでください。

C：〔読む〕

《ファイルノートから》

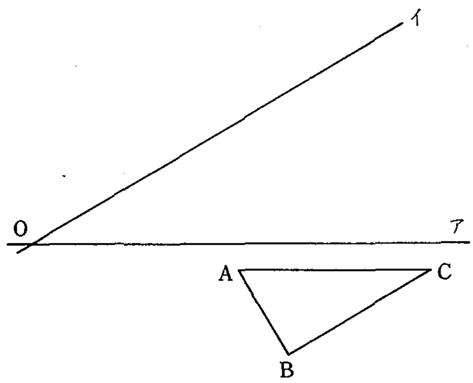
前回授業では，(1)の作図中に，「あれっ，おかしい。斜めになってる」「並進してる」「してない。まがった」などの発言があり，(2)の終了後に並進にならない理由を問うと，「鏡を置く線が平行じゃないから」「はじめとずれたので移るところがちがう」という発言があった。また，実際に△$A_1B_1C_1$は作図できても，△$A_2B_2C_2$が作図できないものが15名ほどいた。作図のミスで多かったのは，Aから鏡アに垂直に引いた線をイにまで延ばしてしまい，そこから鏡イに垂直に線を延ばす間違いだった。今回は並進にならないことを測定によって確かめるにとどまり，その理由まではたずねていない。作図は全員ができていた。

並進にはなりませんでしたね。

では，2枚の鏡が平行でないとき，鏡映を2回続けると，どのように動くと思いますか。

練習8

実際に，作図してみましょう。



— 16 —

《プランの解説》

練習8も15ページの作図と同様ではあるが，回転の中心となるOを示してある点が異なる。必要ならば，15ページの鏡でも，延長すると交わるということを確かめておけばよいだろう。作図後，△ABCから△$A_2B_2C_2$に動くにはどのように移動するのか意見を出させる。わからなくてもよい。

《授業記録》

T：思いますか？　成瀬さん，どのように動くと思いますか？

C：……………

T：さっぱりわかりません？　はい，じゃあ実際に作図してみましょう。練習8。アに鏡を置い

て A_1，B_1，C_1，を書いてください。

C：〔作図〕

T：だいたいできたね。はい，鏡を置く場所，アとイが平行なときは並進になりました。ずーっと，のびましたね。今回はアとイは平行ではありません。どんな風に動いただろう？

C：びぃーーーっ。

T：びぃーーーっと動いた。

C：しゃれか!?

C：ここから光が出た。

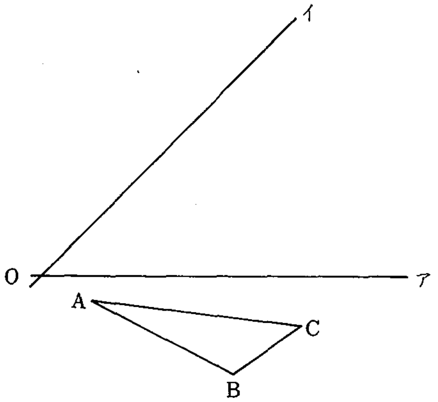
T：ここから光が出たように動いた。ななめに動いた。

C：ひっくり返して上にしたように。

C：ひっくり返して上にしたような感じ。

C：角度のところ。

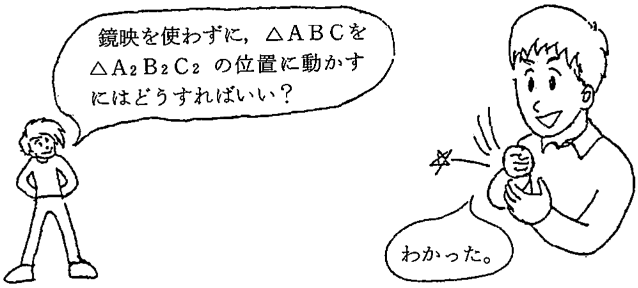
T：角度が何？　角度のところ？　ここに角ができている。ここに角度がある。何かこれが関係ありそう。このアとイの交わったOというところが関係ありそう。はい，じゃあ次のプリント配ります。〔17 ページ配布〕



問5・ AOとA_2O, BOとB_2O, COとC_2Oの距離をはかってみましょう。

・ 鏡の交わっている角度をはかってみましょう。

・ 角AOA_2, 角BOB_2, 角COC_2をはかってみましょう。



―17―

《プランの解説》

ここでも同様な作図をし，問5の結果，それが回転になっていることを確かめる。

《ファイルノートから》

前回の授業では，練習8(16ページ)は15ページとほぼ同じ結果となった。問5の作図は省略し，距離や角度の測定は問4(15ページ)の図を使ってやった。また，時間不足だったこともあり，「これを回転という」「2倍すれば書かなくていいね」など教師が確認して，次の18ページと19ページのまとめまでを終えた。今回の作図(練習8)はよくできていたし，対応する点と回転の中心との距離，鏡の交角と角AOA_2の関係(問5)についても，次に見るように，ていねいに指導されている。

《授業記録》

T：はい。何か O というところが関係ありそうだということで，ちょっとここに目をつけて，もう一回確認してみましょう。問5の△ ABC を鏡映して△ $A_1B_1C_1$，またそれを鏡映して△ $A_2B_2C_2$ を書いてください。

C：〔作業〕

T：できた？　はい，それではそこの問5のとおりやってみます。AO と A_2O，ここです。距離を測ってください。これとこれ。

C：〔測定〕（数名）同じ。

T：同じ？　はい，BO と B_2O，この距離を測ってください。どうですか？

C：同じ。

T：同じ？　はい，次 CO と C_2O。

C：同じ。

T：同じ。等しい。では，次，調べることがあります。「鏡の交わっている角度を測ってみましょう。」ここですね，はい。

C：〔測定〕45 度。

T：45 度だった？　はい，では，調べるものの 3 つめ。角 AOA_2，調べてください。

C：〔測定〕

T：何度だった？

C：90.2 度。

T：90.2 度？　福知山君は？

C：90 度。

T：90 度？　だいたい 90 度。はい BOB_2，測ってください。〔同様にして COC_2 まで測定する。いずれも，90.2，90.3 または 90 度。〕はい，それでは，「鏡を使わずに△ ABC を△ $A_2B_2C_2$ の位置に動かすにはどうすればいい？」とみらあ君が聞いていますが，どうすればいいでしょう？

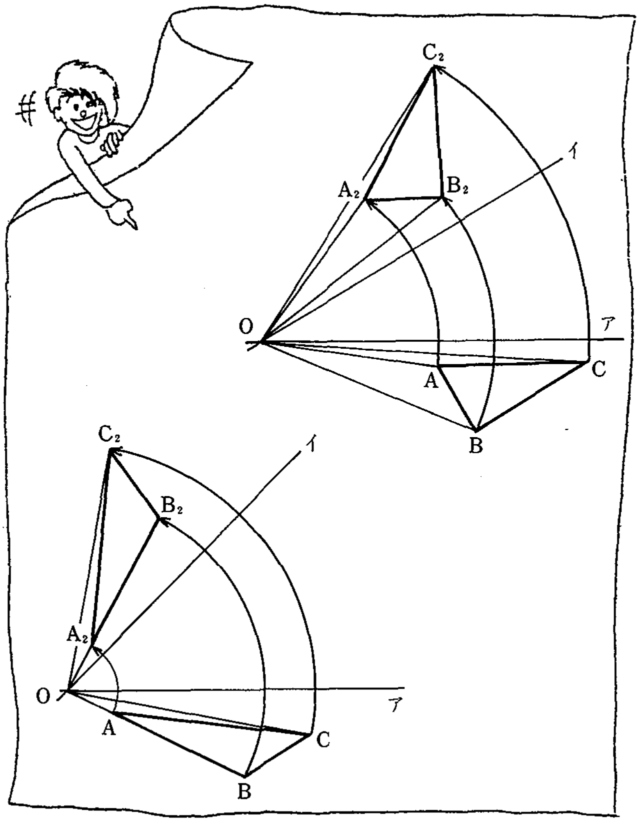
C：角度の倍。

T：角度の倍？　何の角度？

C：イとアの間の……

T：イとアの角度の倍，2 倍したらいいみたいだ。はい。それでは次のプリントに行きます。〔18 ページ配布〕

「鏡が平行でないとき2回鏡映すると，Oを中心として図形を回転したことと，同じになるのさ。」
「鏡が交わる角度のちょうど2倍の回転になるんだね。」



— 18 —

《授業記録》

T：はい，ではみんなで読んでみましょう。

C：〔全員で最初の文を読む〕

T：はい，鏡を使わなくてもできそうです。Oを中心として，こう回転しているんじゃないかなーということです。そしたら角度のことを自分のプリントで，上の三角形でも下の三角形でもいいですから，確かめてみてください。2倍になってるかどうか。

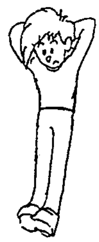
C：〔作業〕2倍，2倍，90度。2倍になってる。

T：なってる？　なってる。はい。そしたら，もう1枚プリント配ります。今日はこれで最後です。〔19ページ配布〕

回　転

・対応する点は，回転の中心からの距離が
（　　　　）。

・回転の中心と，対応する点を結んでできる角の角度は，すべて（　　　　）。

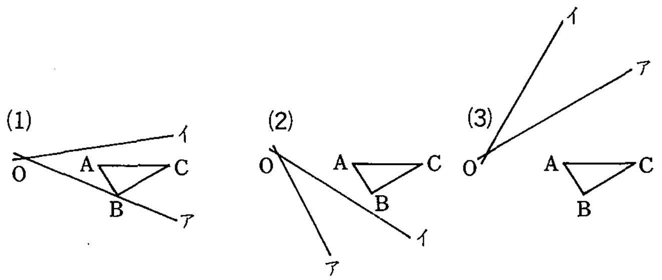


練習 9

△$A_2B_2C_2$ を作図しましょう。

(1)〜(3)とも鏡の交わる角度は 30° です。

どれも，O のまわりの 60° 回転になることを確かめましょう。



— 19 —

《プランの解説》

17 ページまでの結果，さらに 18 ページの説明により，19 ページで回転を定義する。

練習 9 は，鏡の位置に関係なく，鏡の交わる角度の 2 倍の回転になることを確かめる出題である。(1)〜(3)とも，△ $A_2B_2C_2$ は同じ位置に鏡映される。点 O からの距離が異なっていると違う位置になるが，その場合も回転角は等しいし，説明が煩雑になるので，図形の位置は(1)〜(3)とも固定して，そのことに触れるのは避けている。

《授業記録》

T：はい。鏡映を 2 回繰り返すんですけども，鏡が平行でない場合は並進というんでなくて，「回転」という風なことばで表します。「回転」っていうのは聞いたことありますか？　どんな

ところで聞いたことありますか？

C：回転レシーブ

T：あ，回転レシーブ。あとはあんまり聞かないですか？　はい，じゃあプリントです。「対応する点は，回転の中央，この場合だとＯです，中心からの距離が……」

C(数名)：2倍。倍になる。

T：倍になる？

C：倍，2倍。

T：例えば対応する点というのは，Ａだったら？

C(数名)：A_2

T：A_2でしたね。Ｃだったら？

C：倍，2倍。

T：そしたら，OAとOA_2はどうですか？

C：これも2倍です。

T：2倍？

C：等しい。

T：等しい？

C：いや，倍になるんだよ。

T：はい，本田さん。これとこれは？

C：……………

T：わからなかったら調べてみましょう。じゃあみなさん，もう一回18ページのプリントで，OAとOA_2の距離をくらべてみましょう。

C：〔作業〕

T：はい，ちょっと見てちょうだい。OAこれだけです。OA_2これだけです。どうですか？

C(数名)：うぇ，同じ。

T：同じ？

C：ピンポン！　等しい。

T：等しい。そしたら，OBとOB_2は？

C(数名)：等しい。

T：等しい。はい。OCとOC_2は？

C：等しい。

T：等しい。はい，じゃあ，対応する点の距離は「等しい」ですね。はい次，「回転の中心」この場合Ｏです，「回転の中心と対応する点を結んでできる角」OB，OB_2，ここですね。OAとOA_2，ここの角はどうですか？　それからOCとOC_2，ここの角。3つできましたけども，角度はすべて？

C：おんなじっていうより等しいっていったらいいのか……

C：2倍，……2倍だと思う。

T：そこのカッコの中に述語が入るんですね。その文の主語は何ですか？

C：角……角度は。

T：角度は何だかなんですね。何の角度ですか？

C(数名)：対応する点。

T：対応する点を結んでできる角だね。じゃあ，この図で言えば，もう１回いきますよ。BとOとB_2，ここの角ですね？　これ，対応する点を結んでできる角ですね。CとOとC_2，ここも対応する点を結んでできる角でしたね。それから，AとOとA_2，ここも対応する点を結んでできる角でした。この３つの角度すべてが，どうだっていうんですか？

C：同じ　C：等しい。

T：等しい？

C：全部同じ角度。

T：全部同じ角度？

C：だから等しい。

T：だから等しい。いいですね。はい，そうです。このプリントの続きは今度します。

《授業記録》（第５時）

T：はい，それでは昨日のプリントの続きです。昨日何か新しいこと発見したんでしたね。何だった？

C（数名）：回転。

T：何か回転したのね。

C（数名）：ここにあるのをね，ここにね……

T：ずーっと，こうやっていった。はい，そしたら今日は作図をしてみましょうということで，19ページのプリントを見てください。練習９読んでください。

C：〔読む〕

T：はい，いいです。何すればいいんですか？

C：確かめる。

T：何するの？

C：作図。

T：作図するんだね。はい，回転して作図するんだね。そのときに説明がありましたが，鏡の交わる角度は30度です。〔(1)を指して〕ここは30度です。ここ〔(2)〕も30度です。(3)も30度です。どうしたらいい？

C：回転する。

T：回転するの？　書いてみる？　わからない？　何か簡単にできそうな方法ない？

C：鏡で一回……

T：鏡でやったら簡単にできそう？　はい，そしたらまずアに鏡を置いて鏡映してください。

C：〔作業〕

T：次，イに置いて……

C：〔作業〕

T：だいたいできたね。はい，そしたら対応する点とOを結んでみましょう。まずじゃあAとO。それからAに対応する点は？……A_1通り過ぎて２回鏡映したA_2，結んでください。そして，この角度を確かめてみましょう。

C：〔作業〕

T：はい，何度でした？

C：60度。

T：北村君，60 度？　上田君は？　はい，高瀬さん。
C：25 度。
T：ん？
C：25 度。
T：25 度になった？　ここ，……どれ〔高瀬さんのプリントを見て 60 度になることを確かめる〕60 度……だいたい 60 度ぐらいになってる？　そしたら，BO と B_2O と結んだ直線，ここは何度になると思う？
C：60 度。
T：60 度ですね。じゃあ確かめて。
C：〔作業〕
T：安保さん，何度になった？
C：60 度。
T：60 度？　神成さんは？
C：60 度。
T：60 度になった？　はい，では(2)を見てください。いま，鏡を使ってやったんだけどね，鏡を使わないでできる方法ないかな？
C：回転させる。
T：回転させる？どうやって回転させる？
C：コンパス……
T：コンパスを使う？
C：コンパスと分度器……
T：コンパスと分度器を使ったらできそうだ。やってみてください。
C：〔作業〕（以下略）

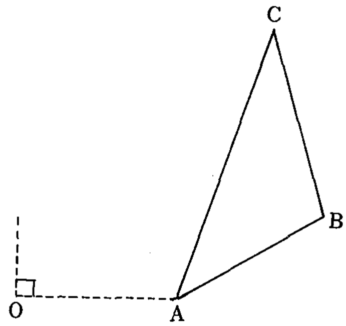
《ファイルノートから》

練習 9 は，前回，教師が出題内容を取り違え，前時の学習結果を用いて単に 60° 回転となることを確認し，その作図をさせる問題となった。出題の意図は，《鏡の位置に関係なく，2 枚の鏡の交角だけで回転の角度が決まる》ということを理解させることで，作図は鏡映を用いる。そして，その結果として，(1)～(3)とも 60° の回転となることを発見させることにあった。60° 回転の作図は難しく，(1)～(3)がすべて作図できたのはわずか 5 名。白紙の子どもも半数以上を数えた（前回は 12，15，16 ページでの作図結果が良くなかったため，仮に本来の意図通り鏡映で作図していたとしてもここでの正しい作図はあまり期待できなかっただろう）。今回の授業でも，(1)について 60° の回転となることを確かめた後，(2)(3)は，鏡を用いず，コンパスと分度器による作図となった。作図はだいたいできていたが，その結果によって△ ABC が同じ位置に移ることが確認されているかどうかは定かでない。

練習 10

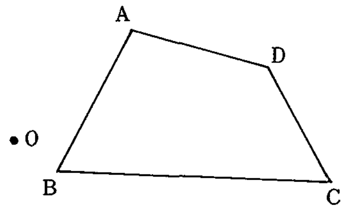
Ｏのまわりに 90°回転させてみましょう。

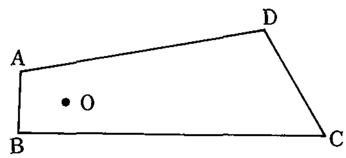
作図のしかたを説明しましょう。

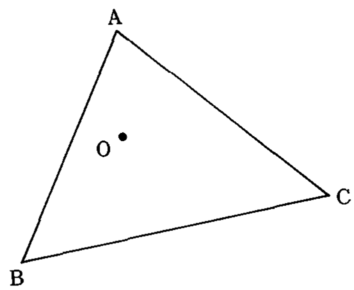


練習 11

180° の回転は簡単に作図できます。







— 21 —

《プランの解説》

練習 10 は回転の作図の練習である。原理的にはどの角度も作図方法は同じであるので，作図しやすい 90° の回転としている（この作図は，教科書では中 2 の「図形の移動」で取り扱われている。練習 11 の 180° 回転は，教科書では小学校 6 年生の「線対称，点対称」で，点対称の作図として取り扱われている）。

《授業記録》（第 6 時）

T：〔20 ページ配布〕はい，では練習 10，みんなで読んでみましょう。

C：〔読む〕

T：はい，回転です。この前，何使ったっけ？　鏡，コンパス，分度器，使いましたね。では，

書いてみてください。
C：〔作業〕
T：ちょっと迷っている人もいるようなので，できた人に説明してもらいますから，できてない人はそれを聞きながらやってみてください。
C：〔説明〕
T：はい，そしたらできてなかった人も次のプリントに行きます。〔21 ページ配布〕では，練習11，みんなで読んでください。
C：〔読む〕
T：簡単なんですって……
C：むずかしい。　C：頭が痛くなる。
T：むずかしいか，簡単か，やってみないとわかりません。今の 90 度の回転，わかりにくかった人，手あげてみて……
C：〔挙手〕
T：はい，そしたら，みんなでいっしょにやってみようか。〔説明，実演しながら子どもと一緒に作図〕
C：コンパスで円を書くのがむずかしい。
T：コンパスで円を書くのがむずかしい？　はい，ここまでいいですか？　次どうしますか？ A_2 をみつけるんですね。180 度測る。
C：簡単。
T：測んなくてもいい？
C：180 度っていったら，あの線に沿って……
T：この線に沿って，例えば OA だったらば，あぁ，そのまま OA を伸ばせばいい，なるほど。そして，伸ばしたらここが 180 度になりますね。あ，なるほどね，そして A_2。分度器使わなくてもいいんだ，180 度の場合は。
C：なるほど。　C：でけた。
T：〔以下同様に説明しながら作図〕2 番めは今までとちょっと違いますね。どこが違う？
C(数名)：中にある。
T：中に O が入ってる。はたしてこれでできるんだろうか？　さっき山田君が説明してくれた簡単な方法でやってみてください。
C：〔同様にして 3 番めまで作図。「はーつかれた！」「やーめんどくさい」の声あり。〕
T：3 番めは△ ABC を O を中心に 180 度回転するんでした。回転で，まず最初に 60 度回転というのをやりました。90 度回転もやりました。今日は 180 度回転もやりました。180 度は簡単だったっていうのはわかる？
C：だってまっすぐ引けば……
C：わやくちゃになった……
T：じゃあ終わります。

《ファイルノートから》

前回の授業では，作業はスムーズに進行し，子どもたちも集中して作図していた。実際，練習では 21 名までが正しく作図できていた。今回も，授業記録を見るとだいぶ苦労しているよう

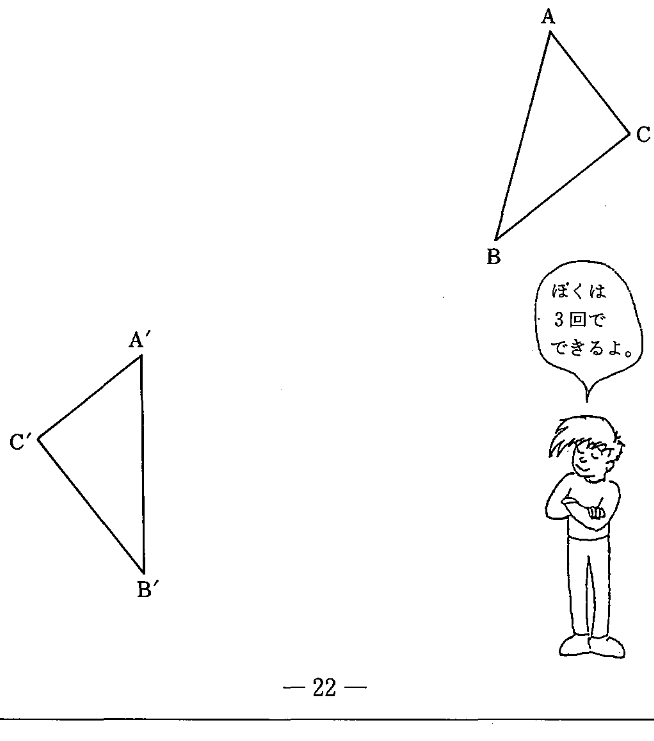
であるが，ファイルを見ると作図はよくできている。ただし，90°回転のほう（練習 10）は，できていた子どもは 20/37 名であった。

4．平面のすべての等長変換

平面のすべての等長変換は高々3つの鏡映の積になる。ここでは，この定理を証明こそしないが，実際に鏡映を3回することによって，平面上の任意の位置に図形を動かす方法のひとつを示す。

「ところで，みらあくんは，鏡映で図形を好きな位置に動かすことができるって言ったけど……。」
「そうさ。」
「じゃあ，この△ＡＢＣを△A′B′C′のところに動かせるかい？」
「もちろんさ！」

みなさんはできますか？　鏡を使って動かし方を，考えてみましょう。（鏡は何回使ってもいいです。なるべく使う回数が少なくなるように工夫してみましょう。）



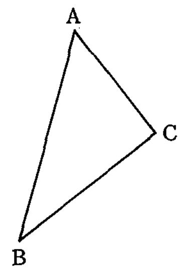
— 22 —

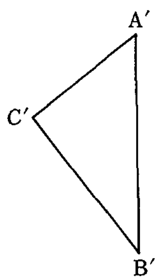
《プランの解説》

22 ページの出題の解答は一通りには定まらないが，23 ページから，ある一つの解法を示すことで，それがどんな図形にでも有効なことから，この定理の証明に替える。

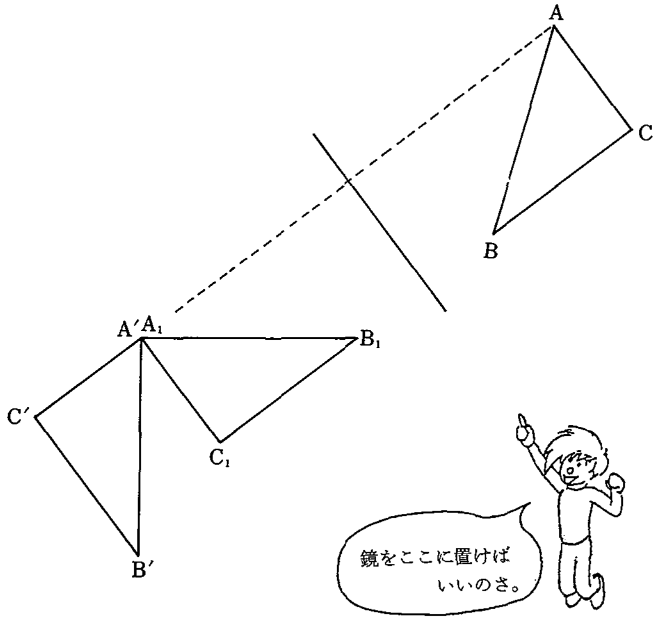
まず，1点だけ重ねることを考えましょう。
たとえば，点Aを点A′に重ねてみます。

点Aと点A′が重なるように△ABCを鏡映しましょう。





— 23 —



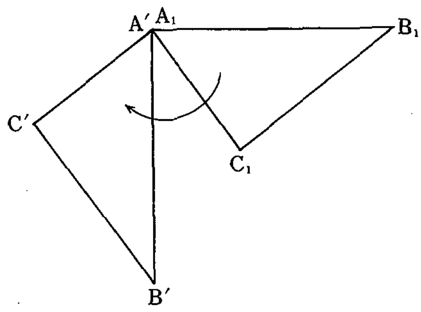
問 6

$\triangle A_1B_1C_1$ を$\triangle A'B'C'$ に重ねるには，どのように動かせばよいでしょう。

— 24 —

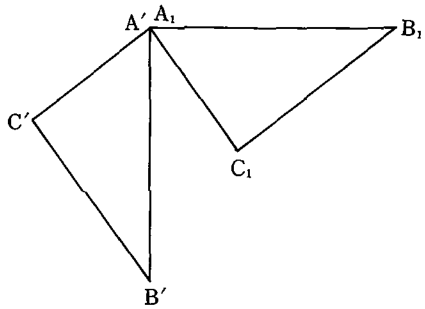
《プランの解説》

解法の最初のステップとして，まず 1 点だけを重ねるようにする。次のステップとして，問 6 は「A_1 を中心とした回転」という答を予想している。



$\triangle A_1B_1C_1$ を点 A_1 のまわりに回転させると
$\triangle A'B'C'$ に重なります。

練習 12　回転は 2 回の鏡映で表せました。
2 枚の鏡を図に書き込んで見ましょう。



結局，$\triangle ABC$ を $\triangle A'B'C'$ に重ねるには，3 回の鏡映を使ったことになります。

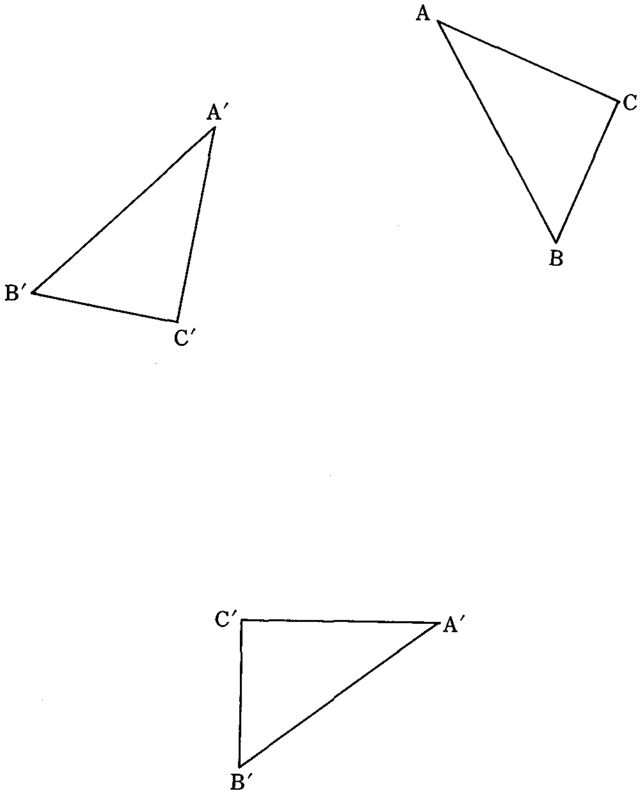
— 25 —

《プランの解説》

練習 12 は，鏡の交角さえ固定するなら，どのような位置に鏡を置いてもよい。ただし，鏡映の順序を変えると回転の向きが逆になることに注意する。ここでは，いままで扱ってきたものとは回転の向きが逆になっている（ここでは左向きの回転）ので，そのことに注意して鏡を置かなくてはならない。

どんな図形も，3 回以内の鏡映で動かしたい位置に動かせます。

何回の鏡映で△ＡＢＣを△A′ B′ C′ に動かせるのか考えてみましょう。



— 26 —

《プランの解説》

26 ページの問はこれまでに示された方法を用いる練習問題である。(1)は 2 回，(2)は 3 回の鏡映が，それぞれ必要である。

《授業記録》（第 7 時）

Ｔ：〔22 ページ配布〕はい，それでは，22 ページ。ここを読んでください。

Ｃ：〔読む〕

Ｔ：はい，そうです。久し振りだから，もうすっかり忘れている人いるんじゃないですか？　覚えてる？　鏡で映したら，鏡映っていうことできるんだね。図形が右にあったものが鏡の左側に移ります。その移りかたで，1 回だったら鏡映だし……(中略)……で，今日は△ ABC

が右上のほうに書いてある。これを何回かの鏡映で左下の△ A′B′C′ のところに動かせるっていうんです。何回使ったらいいでしょうか？　ということなんです。そしたら，ちょっとやってみて。

C：〔作業〕

T：はい，そしたら途中の人も手を置いてください。なんとか△ A′B′C′ まで辿り着いた人いますか？　伊藤君？　五十嵐さんは？　まだ？　途中？

C：下の方から行っちゃった。

T：下の方から考えた，△ A′B′C′ から。あぁ，なるほど。はい，そしたら次のプリント配ります。〔23 ページ配布〕はい，じゃあ読んでください。

C：〔読む〕

T：はい，みらあ君は 3 回で出来るって言ってるんです。はたして本当に出来るかどうか，みらあ君に教えてもらいますね。まず 1 点だけ重ねてみる。点 A が A' に重なるように，これを置いてみてください。

C：〔作業〕

T：〔24 ページ配布〕はい，プリント 24。みらあ君「鏡をここに置けばいいのさ」ということで，ここに置くと A と A′ 重なりました。ね？　そしたら，次の問です。問のところ，皆で読みましょう。

C：〔問 6 読む〕

T：どのように動かせばいいでしょうか？

C：…………………………………………………

T：ちょっと見てください。まず，ここに△ ABC が最初あったんですね。これを 1 回鏡映して，この三角形がパタンとこう来ましたね。この次△ $A_1B_1C_1$ をここに重ねるには，これをどう移動したらいいでしょう？　はい，あらし君。

C：B_1 を B′ のところに合わせる。

T：あ，B_1 を B′ のところに合わせればいいね。うん。どうやって合わせる？

C（数名）：まわす，回転。

T：うん，まわす。どんな風にまわす？

C（数名）：A，A のところ，A を頂点として……

T：A を頂点として，中心にして回転すればいい。あぁ，なるほど。そしたら次のプリント。〔25 ページ配布〕はい，プリント読んでください。

C：〔読む〕

T：はい，そしたら，この練習のこの図に鏡 2 枚の位置を書き込んでください。

C：〔作業〕

T：二上さん，最初どこに置いた？　鏡……ここ？　ここに置いた？　そしたらこういう風に移るね。B_1 を B′ に重なるようにするの？　あぁ，なるほど，こう。こうすれば重なります。今度は B を重なるように考えます。なるほどね。〔作図する〕はい，B 重なりました。A と B 重なってます。C だけ重なってないね。今度，C 重ねるために？

C：裏返す。

T：裏返す。うん，なるほどね。ここに置けば，……うん，重なる。〔作図する〕わかりにくかった人，もう一回説明するから前見てください。さっき A を重ねたから，今度は B を重ねよ

うと考えたんですね。そして，鏡をどこに置けばいいかなー，Aを重なったままのとこだから，ここに目を着ければいいね。B重なりました。後はCだけです。今度裏返す。ここに置いたらCは重なりました。

C：C合わせた……

T：あ！　先にC合わせる方法がある。なるほどね。あぁ，こうやったらいいね。先にここに置けばC合わせるね。それでもいいね。A合わせてC合わせて，それからB合わせる。ね？今，回転で2回鏡を使ったから，結局さっきのと合わせて？

C：2回。　C：3回。

T：3回使いました。1回めの回転で図形は裏返しになるのね？　こう，裏……。2回めで？

C：（聞き取れない）

T：3回めで？

C：裏。

T：全部，裏，裏，裏。そしたら……〔26ページ配布〕（以下略）

《ファイルノートから》

前回の授業では，3回の鏡映でできるということを示されていることもあり，ほとんどの子どもが3回でやろうと試行錯誤でがんばったと思われる。プリントにかなりの量の書き込みが見られた。自力で成功した子どもが5名で，うち1名は対応する頂点を重ねる23ページ以降で示した方法とほぼ同じように考えて成功していた。このような傾向は今回もほぼ同じであり，自力で成功していたのは5名，ただし，対応する頂点を重ねる方法を発見していた子どもはいなかった。また，前回は26ページの練習問題を省略したため，実際に子どもが自分で行なえるようになったかどうかわからなかった。ファイルノートから今回の結果について見ると，(1)はほとんど全員ができていたが，(2)（3回の鏡映が必要）については間違いが多かった（27／37名）。そのほとんどは，点AとA′を合わせるところで止まっており，その中には最初の問題（22ページ）を自力で解いていた子どももいる。方法の発見が偶然だったためであろう。

5．実践の結果から

アクリル板を使った鏡映の作業，裏返し合同を同じ向きの合同に変える課題，11ページ問3の意外性など，いくつかの場面で授業は成功的に進めることができた。全体的な到達目標にも，プランの不十分さや時間数の不足といった問題はあるにしても，一応は達したといえる。小学校での授業目標として高いレベルをめざしていたことからいって，ひとつの手がかりを得たといえよう。しかし，授業の結果は，少なくとも次の4つの点について改善の必要を示している。

① プランの基本的な構成に関して，鏡映，並進，回転の定義とそれらの相互関係の問題が同時に扱われており，それが混乱の原因となっている。回転の導入部分で「軸が平行でない2回の鏡映が並進になるか」を考える場面で，並進の性質を用いた見事な発言によって並進にならないことが説明されたが，小学校では一般にこのような思考をあてにすることはできないであろう。並進や回転はそれ自体，鏡映とは独立に定義された上でその関係が問題になるのである。等長変換がこの3つに分解できることこそ，このプランに入る前に獲得しておくべき重要な認識だったのである。

② このこととも関わっているが，同じ向きの合同を扱った直後に並進が導入されているため，子どもにとってその両者が未分化であることが予想される。回転の導入部で「並進になる」と考えた子どもが多かったのはそれを裏づけている。「並進の合成はまた並進になる」というもっとも基本的事項の認識と関わっていることであり，この未分化状態を授業過程でより積極的に位置づける必要があろう。

③ 回転のところでは，「中心を固定すれば，2本の軸の位置によらず交角の2倍の回転になる」ということの確認に19ページ練習9は不十分である。(1)(2)(3)の点Oや△ABCの同一性がプリントだけでは意識することが難しく，なんとなく描いてみた結果を測定するだけになりかねない。少なくとも授業では黒板やOHPなどを用いて，全員で変換の過程を見ながら考えて行くことが必要であろう。

④ また，回転の作業はけっこう煩雑である。授業過程にもそれは現れていたし，感想文にも多くの子どもがそれを指摘していた。2回の授業ともこのプランに対する否定的な意見はほとんどこの点に関わったものであった。問題自体，もっと作業しやすいような大きさと中心，角にすべきである。さらに，回転をより簡単に実現する教具を用いてもよい。たとえば2枚のOHPシートを一点Oで固定し，下のシートにはOを中心とする極座標をめもり，上のシートにはOを通る直線をかいたものがあれば，コンパスの針で穴をあけることによって，回転を施すことができよう。

これらの諸点についての改訂プランをつくりながら，あわせて図形の対称についてのプログラムを確定して行くことが次の課題となる。

《資料》子どもの感想文（2回めからの抜粋）

板垣亜貴子

最初は，むずかしく考えていたけれど，勉強していくと，りくつがわかるからなかなかおもしろい。鏡の勉強のなかで，私が一番好きだったのは，鏡だけじゃなく，定規やコンパスを使ってやったことです。プリントに，まんがとかで説明していて，わかりやすい。

伊藤　泰輔「へんてっこってっこ」

ぼくは，図形の勉強をし終わって，図形のことがよくわかった。（中略）ずらす，いち，ばしょ，数とかがあって，むずかしかったが，おわると，いろんなことがわかって，勉強になりましたです－！。

二上　佳奈

最初は，むずかしいなぁと思ったけど，やってみると，「おもしろいや－」とか「かんたんだ－」と思った。（中略）このおかげで，算数ぎらいもなくなったし，きょう味も，もつようになった。またこういうことがあったらやりたいと思っている。！

木津　崇仁「むずかしいへんなの」

いままでの算数の中でも2ばんめぐらいにかんたんでした。はっきりいってぼくはべんきょうがきらいだ。だけどこのべんきょうはおもしろかった。

吉田　裕之

鏡映にはとてもおどろかされた。鏡みたいで，鏡でなくて，すきとおっているからです。これをつかえば，反対だけど，横に移動できる。コンパスやじょうぎをつかうより早くできる。そ

こがとてもかんたんだった。今日の勉強では，鏡がとてもかつやくしたと思う。

蔵野　麻美

鏡映がほんとうにできて，鏡映してそこをむすんで，おなじ図形だったので，どうしてこんなに同じになるのだろう。

川村　　香

まさかそのころ〔小さい時〕と同じようにかがみでうつして，いろいろとべんきょうするとは思っていませんでした。そしてその勉強でいろいろわかりました。鏡映，回転…。といろいろありました。そして，小さい時一度だけやったかがみでのあそび，そしてかがみでのべんきょうずうと心にのこると思います。

榊　　香枝

私は，この勉強で，いろいろなことが，わかりました。みらあ君が，いろいろなことをおしえてくれます。最初は，ふしぎなかがみをつかって鏡映をしたので，たのしかったです。でもページが進むために，どんどんむずかしくなります。／私が一番楽しかったのが鏡映で，一番むずかしかったのが回転です。鏡映は，ただふしぎなかがみでうつすから簡単です。でも回転は，平行じゃない所に三角形があって，すごくめんどくさい。(中略)へいしんは，ちょっとむずかしかったけど回転よりましだったからよかった。「ふしぎなかがみ」をくれるんだったら，たいせつにします。

大橋　　晋「不思議な，算数問題」

最初に，鏡映が出てきて，それは，むずかしかった。だんだん勉強していくとかんたんにできた。並進が出てきた。むずかしくて，できなかった。でも，一日，二日，三日といくと，だんだんできてきました。また，回転という，むずかしい問題がでてきた。なれてきたら，またできた。(中略) むずかしい問題だったなあ？

大木　和美

回転と，並進がむずかしかった。かんたんな，鏡映するのが，いちばんかんたんでしたが，鏡映もむずかしかった，所もありました。(中略)ぼくは回転の，何度の回転がむずかしかったです。あと 90, 60, 120 度などはとってもないけどぼくには，できそうでもありませんでした。(中略) 並進と回転は，むずかしかったよーだ。

安保　育子

最初，プリントをもらった時は，「あー簡単だナ」と思った。やっぱり最初は簡単で，鏡映なんかはすぐできた。でも，回転とか並進とか聞きなれない言葉が出てくると，もう頭の中がゴチャゴチャになる。「あーできた」なんて思っても，近くの人のを見たらまちがってたり。／鏡映を鏡映するのはすぐわかった。頭で考えても，口に出して実際やってみるのはなかなかできない。

山本　育美

図形の移動の勉強の始めの時，一番最しょ紙を配られて，物語みたいなものかなぁと思った。紙がしだいにふえていくうちに，いろんな問題がでてきて，だんだんとややこしい問題がだされた。「なんだ，算数の勉強か。」なんても思った。勉強はスムーズに終わったけど，頭の中はぐちゃぐちゃになりました。鏡映するのはとてもかんたんでした。鏡映したら，もとの図形と反対になるから２度鏡映するのは，一回でできる鏡があればなぁ，と思いました。でも鏡はもとのものと反対にうつってしまう。

村田さやか

始めファイルやら，プリントやら鏡をもらった。それで，鏡なんていつも見てるけど，黒っぽい鏡はめずらしかった。だから，その鏡でいろいろ物を映した。／これから鏡を使ってなにをやるのかと，楽しみにしていた。始めの，ただ映してなぞるだけは，らくで，とてもおもしろかった。そのことを「鏡映」というぐらいならすぐにおぼえれると思った。次に，「対応する点」などでできて，ちょっとイヤになった。それから，次々と，いろいろな名や，やり方などでできて，ややこしくなった。／始めに思った「楽しそう」ということを，今はとても思えなくなった。

市川　善明「むずかしいところ」

一番むずかしかったことは，回転と鏡映線をひくことである。／回転はコンパスを使うことが多い。／ぼくは，コンパスを使うのがへたなので，回転をやっていると，紙がビリビリやぶけてしまう。／そして，小さい円を書くのがすごくむずかしく，またビリビリやぶいてしまう。／鏡映線をひく時，ぜったい線が曲がってしまう。／そして消しゴムで消して，また線をひくが，また曲がってしまう。／そして，また消して，線をひくのくり返しで，しまいには〔？〕で線をひくことになる。／ぼくの苦手なことをやるから，いやになる。

白川　愛聖「むずかしいなぁー」

算数のプリントは，やはり，むずかしいなぁと思った。（中略）でも，だんだんすすむほど，わかるようになった。でも，算数って，むずかしくて，もんだいをよんでもわからないから，キライだ！／むずかしいなぁー！