自然数の除法と整列性について

山口　格
（室蘭工業大学）

1. はじめに

小学校の算数教育で乗法や除法を扱う際にいろいろな立場が考えられる。数学教育で量概念を重視する立場からすると，乗法を（1あたり量）×（土台量）＝（全体量）として導入定義して，そのあとで直積や倍の乗法を補足するという考え方が一般的である。除法についても，1あたり量を求める演算として，（全体量）÷（土台量）＝（1あたり量）（これを等分除といっている）で導入定義して，そのあと（全体量）÷（1あたり量）＝（土台量）といういわゆる包含除に入る考え方がよく行なわれている。

以前は自然数の乗法を定義するのに加法の簡略化として考える方法が教科書で見られた。これは4×3を，4＋4＋4と定義するのであって，「累加」とよばれている。この立場から見ると除法は引き算の簡略化つまり「累減」として定義されることになる。この立場には様々な欠点が指摘されている。それは，①累加では，乗数に相当するのが，物ではなく「加える」回数という抽象的なものであるという点である。4を1回加えると8だから4×1＝8とか，4×0が加法なのに減少することなど，②更に悪いのは，累加では，×小数，×分数の説明がまったくつかないこと，などが挙げられている。[1]

自然数の乗・除法と小数，分数の乗除法を量の立場から一貫して説明する方法は，上の様な欠点を持っていない。（1あたり量）×（土台量）＝（全体の量）による乗法の定義は，自然数，小数，分数の乗法を通じて一貫して用いることができる。自然数，整数，有理数はいづれも実数の集合の中に埋めこまれているのであるから，性質としても共通の側面は多い。しかし自然数，有理数はお互に異なる数の世界だという側面も少なからずある。自然数と小数分数の乗除を出来るだけ統一的にとらえて数えることは，自然数と有理数の演算の相異点に注意を向ける努力と矛盾はしない。

本稿は割り算に焦点をあてて，自然数と有理数の演算の相異点の考察を行うこととした。

2. 自然数の割り算と有理数の割り算の相異について

自然数の割り算と有理数の割り数の相異点の一つは，後者は同値類の算法であり，前者はそうでないことである。次に有理数の割り算ではいつでも乗法の逆としての演算の結果が一意的に定まるのに対し，自然数の割り算は整除が可能な場合にのみ乗法の逆算となり，それ以外の場合は「余りのある割り算」になることである。

この「余りのある割り算」があるかないかが，整数と有理数の割り算の大きな相異点なのである。ところが例えば10を4で割れば，

　　10÷4＝2　あまり2

となるが，小数第1位まで割り進めば

　　10÷4＝2.5

となって，これは余りがない。このように小数まで考えると余りのある演算が，余りのない演算になることがある。しかし

$$10\div 3=3 \quad \text{あまり} 1$$

を小数第1位で考えると

$$10\div 3=3.3 \quad \text{あまり} 0.1$$

となって余りは消えない。このままこの例を割り進んでも同様に余りはなくならない。しかし有理数（分数）だと

$$10\div 3=\frac{10}{3}$$

となって商はいつでもある。このようにしてみると，自然数，小数の世界と有理数（分数）の世界のちがいは大きい。いったいこのような相異点は何にもとづくのであろうか。

3. 自然数の整列性

あまりのある除法についての考察を進めるためには，整列性とよばれる重要な性質が必要になってくる。自然数全体の集合を**N**で表わす。自然数の整列性は次の定理で表現される。

定理1. **N**の任意の空でない有限または無限部分集合Aは，その要素の中にただ一つの最小の数を持つ。

ここで，lがAの最小数であるとは，$l\in A$であり，任意の$a\in A$に対して$l\leqq a$であることを意味する。自然数について定理1に述べたことは，自明のことのように見えるかしれないが，実数の集合**R**の中では成り立たないことである。例えば**R**の部分集合Aとして$(a,\ b)=\{x\in \mathbf{R};\ a<x<b\}$のような開区間を考えれば，Aには最小数がない。順序集合であっても次のような例は最小元がないことがわかる。2つの元a，bより成る集合$\{a,\ b\}$の部分集合の全体をAとしよう。

$$A=\{\phi,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,\ b\}\}$$

であり，Aの2つの元x，yの間に$x\subset y$という関係を考えることができる。

一般に集合Mにおける関係Rがあるとき，

（i） $x\mathrm{R}x$

（ii） $x\mathrm{R}y,\ y\mathrm{R}x\Longrightarrow x=y$

（iii） $x\mathrm{R}y,\ y\mathrm{R}z\Longrightarrow x\mathrm{R}z$

が成り立てば，RはMにおける順序関係であるといい，順序関係の与えられた集合$(M;\ R)$のことを順序集合という。Nにおける関係$\leq$を考えた$(N;\ \leq)$も，上の$(A;\ \subset)$も順序集合である。しかし$(A;\ \subset)$では，「任意のx，$y\in A$について，$x\subset y$または$y\subset x$のどちらかが成り立つ」とはいえない。実際$\{a\}\subset\{b\}$も$\{b\}\subset\{a\}$のどちらも成り立たない。

順序集合$(M;\ R)$において，（i），（ii），（iii）のほかに，次の（iv）が成り立つならば，$(M;\ R)$は全順序集合であるという。

（iv） 任意のx，$y\in M$について，$x\mathrm{R}y$または$y\mathrm{R}x$のどちらかが成り立つ。

$(N;\ \leq)$は全順序集合であるが，$(A;\ \subset)$はそうではない。

さて整列集合の概念は次のように定義される。

定義　(M；R)が全順序集合で，M の任意の空でない部分集合 A に対して，min A がいつも存在するならば，(M；R) は整列集合であるという。[2]

上の定理 1 は，N が整列集合であることを述べている。定理 1 は「数学的帰納法の原理」と同値な命題であって，言わば自然数の公理の一部分とも言うべき，基本的性質である。[3]

4. 割り算定理

自然数の整列性（定理 1）を用いて余りのある割り算に関する次の定理を導くことができる。

定理 2.（割り算定理）任意の自然数 a，b が $1<b<a$ のとき，

$$a=bq+r \quad 0\leqq r<b$$

となる自然数 q，r がただ一組存在する。

証明　今 $1<b$ であるから，$a<ab$ である。従って a より大きい mb（$m\in\mathrm{N}$）の形の自然数の全体の集合 $\mathrm{A}=\{mb|mb>a,\ m\in\mathrm{N}\}$ は空集合でないから，定理 1 より A は最小数を含み，その最小数は $(q+1)b$，$q+1\in\mathrm{N}$ の形で表わされる。（仮定 $b<a$ により，min A を与える m は 1 ではない。よって min A を与える m は $q+1$，$q\in\mathrm{N}$ の形に書ける。）$(q+1)b$ は a より大きい mb の形の自然数の中で最小のものであるから

$$qb<a<(q+1)b$$

が成り立つ。このとき $r=a-qb$ とおけば，

$$0\leqq r=a-qb<b$$

で，$a=qb+r$ である。

次に一意性を言う。$a=bq_1+r_1=bq_2+r_2 \quad 0\leqq r_1,\ r_2<b$　ならば，$(q_1-q_2)b=r_2-r_1$　で $-b<r_2-r_1<b$　となるから，$r_2-r_1=0$，したがって $q_1-q_2=0$。（証明終）

この割り算定理と実際の割り算の操作とをくらべてみよう。例えば $3\overline{)76}$ を考えてみよう。割り算では「たてる」，「かける」，「ひく」，「おろす」の四つの手続きをくりかえすのであるが，子どもにとってむずかしいのはいちばんはじめの「たてる」操作である。

$3\overline{)6}$ のようなときは，3 になにをかけたら 6 になるかを考えるのであるが，$3\overline{)7}$ ではうまく答がでない。3 の段の「下り九九」を用いる方法で

$$\begin{array}{cccccc} 9 & 8 & 7 & 6 & & 3 \quad\ \ 2 \\ 3\overline{)\ 7} & 3\overline{)\ 7} & 3\overline{)\ 7} & 3\overline{)\ 7} & \cdots\cdots & 3\overline{)7} \quad 3\overline{)7} \\ 27 & 24 & 21 & 18 & & 9 \quad\ \ \underline{6} \\ & & & & & \quad\quad\ \ 1 \end{array}$$

$3\times9=27$ からはじめて 3×8，3×7，…と試して，27 で 7 と比べて多いからひけない，$3\times8=24$ もひけない，…だんだんおりて来て，$3\times3=9$ もひけない，もう一つ減して，3×2 とすると 6 になって，そこではじめてひけるようになる。上から下がってきて，一つ手前まではひけなかったのが，はじめてひけるそのときが本当の答えである。これを下からやっていくと，まだギリギリのところにいかないのに，やめてしまう誤りが見られる。この方法は上の定理 2 の証明における，集合 A の最小数を $(q+1)b$ として，次の qb が

$$qb<a<(q+1)b$$

となるところと似ている。すなわち3の段の「下り九九」で9から3まではひけなく，はじめてひける2が本当の答えだというところは自然数の整列性が働いているのである。つまり $3\overline{)7}$ では $a=7$，$b=3$ として，3の倍数で7より大きいものの集合をAとするとAには最小数がある。それが $3\times3=9$ で，$q+1=3$ となって $q=2$，$r=1$ であるから

$$7=3\times2+1$$

となる。次に

$$\begin{array}{r}
25 \\
3\overline{)76} \\
\underline{6} \\
16 \\
\underline{15} \\
1
\end{array}$$

の計算では $3\overline{)16}$ を今と同じように行って

$$76=3\times25+1$$

を得る。このように割り算の計算は割り算定理を各桁毎にくり返し適用したものであるといえる。そこでは整商と剰余を得るために自然数の整列性が関与している。

5. 小数の割り算

今の $3\overline{)76}$ を更に割り進むと小数が出てくる。

$$\begin{array}{r}
25.3 \\
3\overline{)76} \\
\underline{6} \\
16 \\
\underline{15} \\
10 \\
\underline{9} \\
1
\end{array}$$

よって $76\div3=25.3$　余り 0.1　この計算でも事情は同じである。すなわち桁毎に割り算定理が適用されて計算が進行する。この場合は商はもはや整数の範囲を越えている。余りもまたそうである。

これはどうしたことであろうか。割り算定理は整数に特有なことではなかったのであろうか。この事情を解明する鍵は二つある。その一つは，上の割り算の各桁は整数の演算として割り算定理を適用したこと。もう一つは割り算定理を次の様に一般化することによって，小数の世界まで適用範囲が広がるということである。

定理 3．（g 進法）$g>1$ とする。$n\in\mathrm{N}$ は次の形に一意的に表わされる。

$$n=n_0+n_1g+n_2g^2+\cdots+n_kg^k$$

$$n_k>0,\ 0\leqq n_i<g,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

（このような表し方を n の g 進表示という。）

証明　n に関する帰納法を用いる。$n=1$ のとき，$n_0=1$，$n_i=0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ で明らか。まず $g^k\leqq n<g^{k+1}$ となる k が存在することを示そう。$n<g^{i+1}$ となるような正の整数 i の集合をMとすれば，$\mathrm{M}\neq\phi$ である。(たとえば，$n<g^{n+1}$ であるから $n\in\mathrm{M}$)。よって定理1によって，

Mは最小の正の整数kを含む。そのとき$g^k \leqq n < g^{k+1}$である。さて定理2により

$$n = n_k g^k + r \quad 0 < r < g^k$$

と書くことができる。このとき$0 < n_k < g$はすぐわかる。$r < n$であるから帰納法の仮定により$r = n_0 + n_1 g + \cdots + n_{k-1} g^{k-1}$, $0 \leqq n^i < g$と書くことができる。これをnの式に代入すればよい。（一意性は略)。(証明終)

定理3は定理2の一般化であることは言うまでもない。ところで有限小数というものは例えば25.3は$253 \times \frac{1}{10}$, 2.53は$253 \times \frac{1}{10^2}$と整数$\times \frac{1}{10_k}$で表わされる（$k \geqq 0$)。$g$進表示の割り算定理から$g=10$として，小数（有限小数）の割り算と自然数の割り算が本質的に同じであることは見易い。

注

(1) 銀林　浩.「数の科学・水道方式の基礎」むぎ書房. 1975年. p. 100.

(2) min Aは最小元，最小数と同様に定義する.

(3) 定理1と数学的帰納法の関係は次を見よ. 山口　格.「数学的帰納法について——数学教育の立場からの考察——」北海道大学教育学部「教授学の探究」第5号. 1987年.