



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	量概念をめぐって
Author(s)	須田, 勝彦
Citation	教授学の探究, 11, 33-44
Issue Date	1993-03-10
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/13582
Type	departmental bulletin paper
File Information	11_p33-44.pdf



量概念をめぐる

須 田 勝 彦

(北海道大学教育学部)

はじめに

これまで、私たちは算数・数学教育の領域でいくつかの授業プログラムを作成し、授業にかけて検証してきた。これはいうまでもなく、教育方法学における「北大グループ」の共同的研究の一貫であり、実験的プログラムの作成を通して意味のある教授学的仮説を導くための基礎作業であった。自然科学教育グループではすでに、物理学の領域においてある包括的な体系性をもった授業書群と教授学的理論を提出している。算数・数学教育グループでは、それに相当するものを作ってきたのかという問題が自然に生ずる。

これまでで作った授業プログラムにはそれぞれ理論的根拠があり、それはその都度述べてきたのであるが、なんらかの包括性をもった理論の提出という要請にはまだ応えていない。そのような理論は算数・数学教育においては、量から解析学へ、代数的抽象の本質、幾何学的認識の特性、という、それぞれに魅力的かつ捉えがたい大きな3つのテーマを要素とする構造体となるであろう。ここでは、その一部分である量概念の位置について考察を加える。そのことによってこれまでに存在した数学教育の諸理論が、それぞれにいかなる根拠を有し、それゆえにいかなる限界を有したのか、数と量の領域に限定して説明可能な理論を探りたい。

1 数学教育研究の方法論としての数学論

(1) 数学教育の目的論とかわって

これまでの算術・数学教育の目的論の展開は、学問としての数学を教えるという立場と、それを否定する立場との相互浸透の過程であった。前者としては中条澄清、寺尾寿、そして「数学の大衆化」の実現をめざした小倉金之助と数学教育の改良運動があり、戦後の数学教育協議会へとつづく。後者は初期文部省の「学区巡視功程」にはじまり藤沢利喜太郎によって理論化される。生活算術運動はその両契機を含む。生活単元学習だけでなく、それにとって替わった「数学的思考方」や「問題解決」もまた学問としての数学を教えることをいかに否定するかという意識の系譜に属する。

そして、その過程をへていえることは、いかに学問としての数学を教えることを目的として否定しようと、結局は学問としての数学を教えてきたのであり、相互否定と相互浸透を経てえられた数学教育の進歩は、子どもの数学的認識の成立、形成、発展の論理＝子どもに理解可能な順序構造の解明、豊富化にほかならなかったということである。

たとえば算術教育の目的を学問、あるいは「理論」からいかに遠ざけるかに腐心した藤沢利喜太郎がなしたことは、その時期もっとも進んだ数学研究の成果（「算術化」や自然数における「ペアノの公理系」など）を算術教育論の柱に取り込んだことであり、寺尾寿のテキストにみ

られる晦渋な記述の追放であり、また計算問題の体系化であったことは一つの例である。算術教育の歴史はその豊富な事例に満たされている³⁾

ついでにいうなら、学問としての数学を教えることを否定する立場は、教育内容、カリキュラムに対して科学的検討のメスを入れられることを拒み、行政の恣意に委ねておくためには是非とも必要であった。

教育が目的とするところの「学問としての数学」は現代数学とも数学史とも一致しない。それ自体、概念発展の論理を実証的に解明されるべき対象である。概念発展の論理は、個別—特殊—普遍の連関の問題としても考えることができる。現代化のなかにみられた「歴史的順序よりは公理的順序に従う」という主張は無内容な一般、個別に媒介されない普遍でしかなく、時間の経過とともに忘れ去られた。「個体発生は系統発生をくりかえす」という主張も、なにが普遍でありなにが特殊であるかを論じないかぎり、保守主義のきまり文句にとどまった。彼らは集合をカリキュラムから追放するときだけにこれを主張し、分数を教えるずっと前に「0」を教えることには異論をとらえようとしないのである。

公理的順序とも歴史的順序とも異なる、子どもにおける数学的概念の発展の順序を記述する論理の必要が明らかになる。

(2) 数学教育のための数学論

数学とはなにか、とか、数学とはそもそも、とかいった議論はほとんどのまともな数学研究者からは聞くことができない。そんな議論によって定理がひとつでも証明できるわけでもないばかりではなく、そのような議論そのものが数学の研究と背反する側面をさえ持つのである。「数学とは、それについて何も語らない学問である」というラッセルの名言は現在でも生きている。ヒルベルトの公理主義の解釈として「数学は純粋形式的関係学である」とする立場も存在する。これもまた一面において真理である。しかしいくら正しくても、これらの立場を採用するわけにはいかない。そしてブルバキの「構造の科学」という立場も、実は無力である。定義されうるあらゆる構造の中で、なにが数学教育として基本的であり、なにが数学者の趣味にすぎないかを論ずる具体的方法を持たないからである。ここにも、個別に媒介されない空疎な普遍が忍びこむ余地が隠されている。「現代化の3つの観点」における「現代数学」も、それがブルバキの方法を意味するかぎりこの危険から自由ではない。

かつて現代化の3つの観点（認識の巨視的發展＝数学史、認識の微視的發展＝児童心理学、現代数学）が研究方法として提起されたことがあった。ピアジェの量保存についての研究は量指導に生かされ、水道方式の計算体系はブルバキの方法によって説明された。そのかぎりでの意味はあったろう。しかし、数学史はこれと違って方法論に生かされたことはない（教材づくりのうへではいくつかの活用例はあった）し、心理学は、ピアジェの心理学の理論からはみでた部分を活用したにすぎない⁴⁾。そしてさらに、現代数学としてはブルバキが想定されていたのだから、「一般から特殊へ」というスローガン以外、とくに有効な指針を取り出すことはできない。そもそも3つの観点という提起自体、統一の根拠を欠いているのである。

数学教育のための数学論の出発点として「数学は量と空間形式についての科学である」という命題を採る。これはいうまでもなく、エンゲルスが「反デューリング論」でのべた有名な命題「純粋数学が対象としているのは、現実の世界の空間諸形式と量的諸関係であり、したがってきわめて実在的な素材なのである」⁵⁾に基づいている。しかし、「現実の世界の」という認識の

起源については、「起源」や「素材」についてのべるだけの「唯物論的」数学論を批判する意味で削除した。

このような規定が「古くさい」ものであることは、おそらくはエンゲルスがそうであったように、量を実数のある部分集合と同形なもの、空間諸形式を3次元ユークリッド空間の部分集合と同形なものと考えれば、自明なことである。しかし、たとえばダヴィドフがコロモゴロフらに依拠しながら述べているように、現代の数学に適合する仕方でも量や空間の意味を拡張することは可能であり、数学教育のための数学論の出発点として有効なものとなりうるであろう。

「コロモゴロフは特にこの契機（科学的研究対象としての物質的物体からの分離・理想化一須田）を指摘し、科学としての数学を次のように特徴づけている。『数学は独特の観点から物質的世界を研究する。…数学の直接的対象は実在的世界の空間的形式および数量的関係である。具体的な物質的客体ではなく、純粋なかたちにおけるこれらの形式および関係が、数学によって研究される実在性なのである。』⁶⁾

(3) 数学論の方法としての弁証法

いうまでもなく「古くさい」という非難にたいする本来の回答は、上の規定の展開である。そして「展開」の論理はこれまた「古くさい」弁証法が一定の有効性をもっている。

周知のように、ヘーゲル論理学は弁証法を体系化した最初の試みであった。しかし当時の学問水準に照らしても、デタラメとしかいいようのない叙述に満ちている。たとえばポッパーはいう。「ヘーゲルは最大の不思議をもしてのけた。稀代の論理家であるからには、かれの弁証法的方法の力量が、現実の兎を純然と形而上のシルクハットから取り出すのは見戯のたぐいであつた。…かれは諸惑星の現在位置の演繹を仕遂げるに及んだが、その際、火星と木星の間にはいかなる惑星も存在し得ないという証明をつけている（残念ながら、そういう惑星がその2〜3ヵ月前に発見されていたことはかれには思い及ばなかった）。同様に彼は、鉄に磁性を帯びさせることは鉄の重量を増すこと、ニュートンの惰性理論と引力理論は相互に矛盾すること…その他多くのこの類のことを証明した。」⁷⁾

ヘーゲル学派の解体後、弁証法は小文字のかたちにおいて「資本論」に残された⁸⁾。これは確かに偉大な業績であり、その後の歴史の流れをかえたものでさえあった。しかしその後、経済学であれ他の科学であれ、研究の発展に本質的な貢献をすることもなく、むしろ「社会主義」国家においては独裁支配を合理化する詭弁の泉でさえあった。そのような弁証法を「実証科学」の方法にまつりあげることに疑問の余地があるかも知れない。しかし、様々な変種を持つ弁証法の諸理論の、核心部分に関するその理解、たとえば「矛盾」として、「つじつまのあわないこと」ではなく、「ある系の発展の根拠をなす対立的2契機」を考へること、「否定」において「否定自身のもつ肯定的契機」を、または「あるものに固有の他者との対立または移行」を考へること、従ってそのような意味における否定による自己への回帰としての「発展」を考へること、などは通常の科学研究の中に浸透している。たとえばブルーナーの「螺旋状のカリキュラム」という考え方も弁証法を意識せぬ弁証法である⁹⁾。

そして、ヘーゲルからなにを受けついでではないかも知れない、今日ではすでに明らかとなっているだろう。たとえば、「端緒」：論理学の端緒・始源についてヘーゲルは語り、Sein（有、存在）を導く。私の数学論にはそのような端緒など必要でない。「完結性」：「論理学は自分が何であ

るかをあらかじめ言うことができないのであり、その論述の全体がはじめてその最後のものとして、またその完成として、論理学自身についてのこの知をもたらすものである。』¹⁰⁾このような体系的完結性は自らの理論の終末を宣言するだけである。理論からの端緒と完結性の追放はたとえばピアジェの次の叙述にもみられる。「あれこれの認識がいかんして成長するのかを決定するという事は、方法としては、いかなる認識をも時間における発達という角度で、いいかえれば最初の始まりにも終わりにも決して到達するべくもない連続的な一つの過程として、考察することを内含している。』¹¹⁾

そして「移行」「概念の自己運動」：次の2つのヘーゲルの叙述を比べてみる。A.「こうしてそれは概念の内発的発展である。そしてこのような精神の運動こそが認識の絶対的方法であり、同時にそのものの内在している魂〔内在的な運動の原因〕である。』¹²⁾

B.「思考と思考の諸規定は対象にとって疎遠なものではなく、むしろ対象の本質であり、換言すれば、事物と事物についての思考とはそれ自体で完全に一致し、その内在的諸規定のうちにある思考と事物の真の本質とは同一の内容である。』¹³⁾

B. は世界の認識可能性についての合理的な提起を含んでいる。ただ、「事物と事物についての思考」がはじめから予定調和のごとく一致しているのならそこには何も探求の必要性は生じない。それがむしろ、対立の2契機を構成するからこそ世界の可認識性へのひとつの回答たりうるのである。この点からいってA. はその対立の契機を欠いている。

概念の運動は概念だけの自己運動として生ずるのではなく、概念と客観的實在(自然、社会、人間、人間の作り出した物、科学、文化)との、実践による切り結びによって生ずる。主体(子ども)の活動性を欠いた認識の前進はありえない。

注

- 1) 内包量(速さと密度)、正比例 関数、一次関数、二次関数と微積分、集合(有限)、面積、分数、小数、かけざん、相似、無限集合、倍と分布、比、確率・統計、多角形と円、等長変換と対称性、などがある。
- 2) 高村泰雄編著「物理教授法の研究」1987年、北海道大学図書刊行会参照。
- 3) このことは拙稿「算数の教科書のあり方—算術から数学へ」(柴田義松編「教科書」1983年、有斐閣)でややくわしく述べた。
- 4) ピアジェは量保存の未確立—確立を発達段階の一つの指標として用いたのであり保存をどう教えるかという問題意識はない。
- 5) マルクス・エンゲルス全集20巻、37ページ。
- 6) ダヴィドフ「教科構成の原理」1975年、明治図書、95ページ
- 7) たとえばポッパー「自由社会の哲学とその論敵」1973年、世界思想社198ページ～199ページ。
- 8) レーニン「哲学ノート」(1)、大月国民文庫、1964年、288ページ。
- 9) わが国の算数・数学の現代化カリキュラムを特徴づけて「スパイラル」と呼んだ時期があった。しかしその実態は螺旋とは似ても似つかない、単なる概念の小出しにすぎなかった。学習指導要領を批判する側にも「スパイラル」は悪であるとする見解があるが、これは正しくない。
- 10) ヘーゲル「大論理学」1977年、以文社、41ページ。
- 11) ピアジェ「発生的認識論序説」1、1975年、三省堂、10ページ。
- 12) 同上、39ページ。
- 13) 同上、44ページ。

2. 「量と空間形式の科学」としての数学

(1) 量と空間形式の矛盾

「量と空間形式の科学である」という規定自体、「矛盾」を内包する。量と空間形式は別個に並んで存在する二つの数学の対象ではない。数学的認識の発展の過程において、ある時は排除しあい、ある時は手を結びあってそれぞれの発展をうながしてきた。2つの対立物の統一が数学の対象である。

これまでの数学の歩みをおおまかに見てみよう。まず、何百万年かの時間を経て、自然数のある有限切片(segment) ($\{1, 2, 3\}$ とか $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ のようなもの) を得る。絵画の作成にみられるような空間認識における抽象も進むが、おそらくはその2つの領域は別物であったと思われる。古代エジプトにおいて(古代中国においても)測地術として量と空間が結びつき、古代の幾何学の対象となる諸事実が経験知として大量に蓄積される。一方で数や方程式についても特殊な問題解法に一般性を内包させた形で研究が蓄積される。

古代ギリシアにおいて、経験知の蓄積とは異なる、学的知の形式が創りだされ、数は整数論的世界として自立する。ピタゴラス学派の思想はそのひとつのピークをなすものであった。しかし、すべてが整数とその比であるはずの世界が、ピタゴラス教団のシンボルマークにある正五角形の一辺と対角線のような、不可約量の存在によって破綻をきたす。そしてゼノンの逆理も数や空間の連続性に関する難問を提出した。それによって数と空間の融合は終わりを告げ、一方では数論的世界へ、他方では数とは隔絶した幾何学的存在の世界へ、数学的对象が分化して行く。測度のない幾何(測度はないが、線分の長さ、面積などの幾何学的量はそれ自体として存在する)、数ではなく線分を「未知数」とする2次方程式論など、独特の数学の世界がそこに形成されることとなる。

デカルトの創りだした幾何学はこのような量と空間形式の分離を止揚し、芽生えつつある関数の観念でその両者を統合しようとするものである。ガリレオの運動学を契機に量の世界が定量、未知数から変量へと広がる。速度や加速度の観念も次第に形を整えてくる。そして新しい幾何学における接線問題や求積問題と運動学、力学の問題とが統合されて微分・積分学が完成される。ユークリッドの第5公準問題など、総合幾何に属する研究もひきつづき進められるが、非ユークリッド幾何の発見は射影幾何の立場から、さらには変換群の立場から統合され、総合幾何としての独自の研究は重要性を失っていく。微積分と線形代数の方法を用いた幾何学の研究が主流となっていく。同時に、ベアノ曲線など、不思議な数学的事実の発見に触発されて、トポロジーなどの新しい幾何学的対象の開発が進められる。

ブルバキの数学は、この流れの一面の体系化＝幾何学の解体という側面をもつ。そのゆえに、構造概念で数学の体系化をはかったというより、自分たちの方法に都合のよい部分だけの体系化をしたにすぎないという批判が主としてトポロジーの研究者からだされることになる。

これらの動きを見るだけで、量と空間形式がいかにダイナミックな相互作用をしながらそれぞれ発展してきたかがわかる。数学教育の問題としても同様であろう。空間の側から見れば、初期における空間表象の形成の時期における量と空間の未分化な関連(「方向」や「長さ」や「角」についての未測な段階での認識など)、小学校低学年における、図形を図形として抽象したり関連づけたりする段階、小学校中学年から高学年にかけての幾何学的諸量の概念の形成の段階、

など、そのもっとも初歩的な段階においても量と空間は複雑に関連しあいながら発展していく。小学校低学年での「方眼の幾何」のたのしさは、方眼、座標を用いて何らかの幾何学的性質が解明されるからではない。座標が必要な数学はまだかなり後の段階である。この時期、別物であった量と空間形式が実は結びついているのだ、という発見がたのしさのなかみだと思う。そして2つの数の順序対を考えるという思考操作もこの時期の子どもには新しいものであり、この点もたのしさの源泉になっているのかもしれない。

量、数の側からみてもたとえば自然数の獲得におけるタイルのように、空間表象による表現に依存しながら、それから離れ、自立していく。

初期の自然数の切片の獲得において、空間的表象が不可欠の役割を果たしていることは今日ではなんら大胆な仮説ではない。どの教科書においても具体物または半具体物がある法則性をもった空間的な配列において提示されている。ペスタロッチたちの「直観主義」はそれをあいまいながら予測し、幼稚な形で用いたものであるといえる。しかしその理論の不十分さの故に「数え主義」からの批判を受けてからは、そのような仮説は排除されるようになる。直観主義は数についての数学的研究を基礎としていない。そして、たんに直観対象物をながめていてもそこには数概念は発生しない。数は空間とは独立な数学的実在である。そして認識の問題からいえば、受動的感性から概念が生ずるのではなく、主体の活動性こそがその源泉であり、直観主義はそれを欠いている。

藤沢利喜太郎は「Zahlprincip」（数え主義）を当初「数ハ数ナリ主義」¹⁾と呼んだのは卓見であった。しかし、本質において空間と独立な数の概念が、子どもに獲得される過程においても独立であるべきだという主張は弁証法を欠いている。本質において独立であることは、本質に至る過程においてはそれに依存し、そして離れるという否定的媒介が必要なのである。そしてまた、数概念の獲得において必要不可欠な主体の活動性の内容が「数える」という行為に限定されることも根拠を欠いている。ペアノの公理に示される、これから定義されるべき自然数の中の単射（次のものを指定する）こそが数えることの本質であろうが、それを知ることができるのは定義されるべきものがどのようなものかを知っているときのみである²⁾。どのようなものかを知る過程において、数概念獲得のための主体の活動は数えることに矮小化されえないのである。もちろん、数えることは数概念獲得のひとつの契機であり、さまざまな具体物や半具体物のあいだの写像の構成（対応づけ）とあわせて用いられるだろう。数の意味を理解せずやみくもに数えるような教育を否定し、タイルや具体物を用いてイメージゆたかに数を習得させることの意義はいうまでもないが、数えることをただちに数え主義と考えるのも窮屈になるだろう。数えるという行為もまた、自然数概念の成立根拠である単射のひとつなのである。

この仮説（数概念の獲得における空間的なイメージ等への依存）が復活するのは第4期国定教科書（緑表紙）である。しかし、緑表紙はタイルのような普遍性をもつ実体的イメージ（「シェーマ」と呼ばれることもある）の役割には気付いていない。さまざまな数と計算法則の説明において、なんらかの量、あるいは空間的対象を用いるべきことは意識されていただろうが、統一性、一貫性、普遍性という要請には気づいていなかったと思われる。それは計算のアルゴリズムの意識化への手段についてまったくといってよいほど無力であったことの根拠でもあろう。

より高次の数へ拡張される過程も同様に、空間的イメージへの依存と自立を繰り返す。分数や小数の導入指導を何らかの幾何学的量（線分や面積など）に依存しないで試みることは困難であろう。1/3と2/6とが「等しい」のは、さしあたりはそれらの数が表現する量（たとえば長

さや面積)が等しいからである。 1×6 という整数と 2×3 という整数が等しいという事実は、量に依存しないで分数を構成したいという問題意識からは分数が「等しい」ことの定義だが、そのような問題意識そのものは、分数の導入のずっと後に必要になることである。「負の数」への拡張の時期においてもたとえば「方向と大きさ」というような空間的認識と量的認識が関連しあっていることは山口格の指摘するところである。

教育学の対象としての数学教育の最終期（生徒が、公理的にかかれた数学を自らの力で理解できる段階・それ以後の数学教育は数学の対象であって教育学の対象ではない）のテーマにおそらくは実数論がふくまれ、量に依存しない数概念が獲得される。しかし、この段階を超えたからといって、量や空間表象が不要になるわけではけっしてない。どんなに抽象的思考にすぐれたひとでも、数を数直線の上にめもったり、関数を座標平面に描いたりすることは日常的に必要なのである。

数学の対象を、哲学的カテゴリーとしての量（質的無関与性）に一元化し、空間も量のカテゴリーに含める数学論の立場もあるが、これらの考察からすれば平板なものといわざるをえない。次に、量について考える。

(2) 質と量

質と量もまた、対立的統一の2項を構成する。この点に関して岩崎允胤、宮原将平の所説をみよう³⁾。

《世界は、雑多で互いに並列と継起の連関をなす無数のものから成っており、そうしたものの多様の統一である。そこでは、おのおののものは、一定の有るもの、定有として、いいかえれば「或るもの」として、「他のもの」からなんらかの点で区別される規定性をもっている。…このように、おのおの「或るもの」が現に有るところのものであるゆえんのその規定性、それが当のものの「質」である。…このように質的に規定されている「或るもの」はしかしまた量的にも規定されている。たとえば、大きさ、重さ、硬さ、色彩の明暗度、存在の期間などにかんする或る規定性をともなっており、これらは当の「或るもの」が「或るどれほどか」、いいかえれば定量としてある。或るものがこのような「或るどれほどか」として規定されるさいに、この規定が抽象化され、カテゴリーとして把握されれば「量」となる。しかし、質が或るものの「有」といわば一つになっており、この意味で直接的なものであるのにたいし、量は「質的な有」としての或るものにぞくする規定性であり、質的規定性の捨象のうえに成り立っている。この捨象のゆえに、或るものは、その量によって、まさに当の或るものであるとはいえないのである。》

ここでは、量が質の捨象によって生ずることが述べられている。量はそれ自体単独で認識対象としてたち現われるのではなく、ある質をもった、あるものの量としてある、ということである。「数え主義」はこれとは異なり、量それ自体を数学的認識の対象からはずす。そして数は質とも量とも無関係な内的構成物にはかならない。算術で量を教えなければ実際生活上こまるから、取り扱うのであるが、量としてではなく、「単位のついた数」として取り扱う。「この規定が抽象化され、カテゴリーとして把握される過程がその量の「質」が抽象される過程にはかならない。われわれにとって、はじめからあきらかな量はひとつも存在せず、個数であれ長さであれ、それらがいかなる質を担った、またいかなる質の捨象によって生まれた量なのか問題とされなければならない。そしてそれがカテゴリーとして把握されたなら、も

とのあるものの持っていた質とは無関係なものとして自立した世界が展開する。

これは狭義の量指導の局面にとどまらず、たとえば2次関数などにおいても、ある物理的法則（たとえば落体の運動）の表現として導かれた関数が、物理的意味とは独立の世界を構成し、研究の対象となってくることのなかにも現われてくる。

そしてヘーゲルによれば、そして岩崎・宮原によれば量は「限度」の概念を経て質に帰る。《ところで、量は、…量としてのかぎりにおいて、質の捨象を前提するのであるが、しかし、具体的には、かならず、或る質的な有、つまり「或るもの」にぞくする量であり、いいかえれば、質との統一をなしている。ヘーゲルが、量を質的無関与性として規定しておきながら、さらに「限度」のなかで、量が質との統一を回復する過程を研究しているのは、このためである。それゆえに、量は、量としては質的に無関与的なものでありながら、しかも、質的に無関与的なものとどまりえないこと（簡単にいえば、量は質でないとともに質であるという矛盾の統一）が、明らかになるのである。》³⁾

ヘーゲル論理学の体系にあっては、数学的認識は哲学的理性に比して低い位置にある。したがって量の概念はより高次のものへ「移行しなければならない」のである。これはヘーゲル哲学の神秘性からくるナンセンスには違いないが、力学的自然観の相対化という近代哲学のテーマへのヘーゲルなりのこたえかたとして意味があろう。そして岩崎・宮原の科学論においても、「数学主義」批判の文脈（科学研究の目標を概念による法則＝因果性と相互作用の説明ではなく、関数関係による現象の記述におく現代実証主義の科学論の批判）⁴⁾において意味がこめられている。また、数学教育論の問題としても、数学の世界で造られた法則を現実適用するにあたっては、その限界をふまえなければならないという内容を含むかぎり、意味のあることである。

しかし、力学的自然観の相対化というテーマは今日ではあまり意味がないし、数学主義批判も無意味ではないにしても、それに先立つ数学の世界の構成にこそ数学論の焦点があてられるべきである（もっとも、適用限界に注目させることはそれとして楽しい問題にもなる。たとえば、5分間に3回あくびをした人が、あと60年では何回あくびをするだろうか、かたつむりが1年間休まず歩きつづけたら何キロメートル進むだろうか、など。子どもたちは前者では「うるう年」も含めて厳密に計算し、後者では「休み時間」を設定して「現実的」な答えを求めることに熱中したという事実もある。）量と質の関係においては、岩崎・宮原が十分に着目していない、質の捨象によって生じた量が、それ自体新しい質であるとともに、質をこえるオペレーションそれ自身によって新しい質を生み出すという側面に注目したい。

(3) 量の生成

「或るもの」は、数学的認識にあっては未分化な世界から質によってきりとられた個物の世界と考えられる。これは公理的集合論においては「分出公理」に相当する。すなわち命題（質）があれば、それを満たすものの外延が定まる。また、矛盾を含む命題を満たすものの外延として空集合の存在を保証する。「或るもの」は「他のもの」との関係において「或るもの」である。これは公理的集合論においては「対の公理」＝「任意の2つの集合に対して、その両方が所属するような集合が存在する」に相当しよう。「上で使った『2つ』…というような語は、それらの名をもつ数学上の概念を指すのではない。そのような数学上の概念はもっと後のほうで定義する。さしあたってそれらの語は『あるものそしてまた他のあるもの』という日常語にすぎない

のである。)⁴⁾

こうして「或るもの」と「他のもの」が等質化され、ひとつの集合をなす。何が「或るもの」で何が「他のもの」であり得るかは、人間（子ども）の実践活動または生活によって、多様なあり方で決まってくる。さらに等質化のオペレーションの自立によって他の「或るもの」や「他のもの」との等質化が可能となる。そして等質化されたもの相互における区別と同一性を問題にすると、全射、単射、全単射などの概念が構成可能となる。これによって、一方で全単射のある集合のクラスが同定可能になる。他方で「対の公理」及びその応用として得られる「単集合の存在」によって、逐次的に新しいクラスの構成が可能となる。

ϕ $\{\phi\}$ $\{\phi, \{\phi\}\}$...

この操作がつづきうることは無限公理によって保証される。また、人間のこのような能力を「可算無限個の文を創出する生得的能力」に根拠づける見方もある。

全単射のつくクラスの確立と、新たなクラスの生成は自然数の切片を得る2契機であり、「直観主義と数え主義」の対立や、「ラッセル・フレーゲ流の自然数論とペアノ流の自然数論」の対立はおのずから止揚されるべきものとしてある。

(4) 量による新しい質の生成

自然数の切片の獲得につづいて、次のような新しい質が生成する。まず、諸集合自身、外延においても内包においても、関連しあっている。共通集合や合併集合、補集合の概念がそれである。集合の関連性は、クラスの関連性に反映する。

$$A \cap B = \phi \rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

かくして、数の世界には大小関係と相等に加えて、加法、減法という新しい質が生ずる。そして加法が生ずる操作自身の逐次的繰り返しもまた可能になり、乗法が生ずる。数の相互の関連性から生まれた加法と乗法は数自身の拡張の道具だてとしての10進(10でなくて同じ)記数法を生み出す。10より大きな数を書き表わす同じ論理で100より大の数、1000より大の数、…に自然に拡張される。このような論理、拡張可能性は人間の数学的認識の大きな財産である。この論理が理解されたなら、数の拡張は個々の意味やイメージから独立に可能となる。「質的無関与性」の典型的な例ともいえよう。岡田進らの1億タイルづくりや、その上でボール投げをしてあそぶ実践は、質的無関与の世界から、質の世界、イメージへの世界への逆戻りによる楽しさだろう。また、「100」という数は1年生のある指導段階では容易に認識されるが、ここで「100枚の人物写真を、紙にはりましょう」という問題を出し、あらためて100という数の「質」に帰るといふ楽しい授業も報告されている。そして加法と乗法のあいだに、分配法則という新しい質が成立する。同様に減法の逐次的繰り返しとして除法が生まれ、商、剰余、整除性などの新しい質が生ずる。さらに約数、倍数、素数、などの概念、から合同式、剰余群、有限体といった、代数学の世界が開けてくる。

これらの筋道は現代の数学にとって十分に意味のあるテーマへの発展であるが、このほかに歴史のなかに埋没した話題や袋小路にまよいこみそうな話題（たとえば魔方陣）など、多様な発展の可能性をもっている。どちらが数学教育にとって価値が少ないか、という問題はあまり意味がない。どんなに現代数学のテーマに近づこうと、子どもが興味をもたなければ何の価値もない。またどんな古くさい、袋小路のテーマでも、子どもが数学を好きになるきっかけとなりうる。悪名高い「ツルカメ算」を用いて数学ぎらいをつくることができると同時に、同じ

テーマで数学をすきになるような楽しい授業ができるようにも思うのである。学問としての数学を教えるという見地はけっして現在市販されている数学テキストの共通部分を「重要事項」と考えるわけではないのである。

自然数の範囲におけるこれらの問題はいずれも数学の楽しさ、奥ふかさ体験したり、数学への適当な動機づけあるいは「バイパス教材」として活用できる。またこの範囲でさえ未知の問題がたくさん残され、あるいは発見されている(角谷の予想=ある自然数が偶数なら2でわり、奇数なら3倍して1をたす。この操作を続ければ、すべての自然数は有限回で1になる。フェルマーの予想=ピタゴラスの方程式をみたす整数解を、3以上に拡張すると解を持たなくなる、など)。

(5) 連続量と離散量の矛盾

しかし、数学教育は量に限定しても、この道を直進するわけではない。「量は連続性と離散性という2つの契機をふくんでいる。」⁶⁾ 数教協では、量は連続量と分離量に分類されている。

「量の数学的理論、一般論は整ったが次に各論、つまり量の体系を整備しなければならない。文章題の教訓から、量の《質》の違いが重大な意味をもつからには、このことは、とくに重要である。

まず、量は分離量と連続量に分けられる。前者は、 $0 < a$ なる a の中に最小のものがある場合であり、後者はそうでない場合である。集合数(や場合によっては回転数、周波数など)は分離量であり、長さ、重さ、時間、密度などは連続量である。分離量から整数が抽出され、連続量から分数、小数そして実数が導き出される」⁷⁾

この分類が実践的有効性をもっているのは、たんに分類するとそうになっているからではなく、量認識の2契機を抽出しているからであろう。単なる分類は、教育に実践的有効性をもつとはかぎらない。この点で静間良次の次の論述に注目したい。「数学における連続の問題は、永遠に数学に背負わされた『十字架』である。それはまず、実験科学がはじまるとともに、量の測定を媒介として、分離量と連続量の矛盾という形で現われた。その後、ギリシャの哲学者たちは、運動における連続の矛盾を、論理的な問題として、広く取り上げたが、この問題は、ルネッサンス以後、動力学が形成されるとともに、はじめて数学の対象として登場したのである。デカルトは、量を数によって統一し、数を連続体として捉え、自然現象を数学的に記述するための基礎を与えたが、数連続体の連続の矛盾は、数学が力学的な問題を扱うとともに、直ちに現われはじめた。コーシーは、この矛盾を連続体の属性として、完備性のなかに吸収させたのである。しかし、これによって、連続の問題は、すべて解決されたというわけではなかった。やがて、集合論の形成によって、数の連続性は、さらに、より複雑な媒介をへた概念としてとらえなければならないことが明らかになった。それと同時に、数連続体ばかりでなく、ひろく一般の集合が数学の対象となったため、量の測定の問題を、新しい厳密性の段階のうえに基礎づけることが必要となった。連続の問題は、より一般的に、集合における個と全体のあらゆる連関と媒介という問題に発展した。この連関の統一性への指向は、主として、数連続体をはじめ幾何学的実体の分析にもとづいている。そして集合の個数や順序、またある場合には測度のような、定量的な規定ばかりではなく、一般的な限定を与える、位相の概念が導入された。これらの概念は、あらゆる数学の認識の基礎であるとともに、認識の発展を通して育成され、次第に高度の抽象性と総合性を持ちながら、普遍的な柔軟性を獲得している。」⁸⁾

(6) 数学教育における連続と離散

連続と離散の矛盾は数学教育の内容構成上の基本的な問題とかがわっている。数の連続体を漠然とした「直線の連続性」や「時間の連続性」のイメージに依存していた数学は、ようやく19世紀後半になって、自然数から厳密な方法で実数を構成する作業の成功によって1段階飛躍をとげる。数え主義はその時期の数学上の理想の表現である。しかし、実数の自然数からの構成可能性は有限的な思考、代数的な操作によってのみ行なわれたわけではない。たとえば有理数のコーシー列の集合に同値関係を定義し、同値な類に極限算法を用いながら演算を定義するなど、本質的に位相的概念に依存している。(これは、連続と離散の問題は有限と無限の問題と表裏一体であることを示している。)

とすれば、自然数からの構成可能性は、それ自体興味ある理論であるにしても、「概念の帰属からいって連続なものを離散的なものに還元することが本質的であるのか」という疑問に直面せざるをえない。数学教育の歴史は、数え主義が直観主義を批判しえたかぎりにおいて積極的な役割を果たした。しかしそれを有理数に拡張する段階においてはまったく無力であったか(藤沢の段階)子どもからの拒否にあったか(和田の割合分数の段階)のいずれかであり、それ以外の可能性を示していない。

一方、ダヴィドフは逆に、連続量一元論の立場をとる。「生徒に数の概念を知らせる教授法のなかに、自然数と実数の『二元論』が存在し、それらの数には原則的に異なる源泉(勘定と測定)が考えられている。この場合、人間の活動における量関係の独特な表現方法としての数という形式そのものの検討が、無視されている。数概念の普遍的形式を明らかにしさらに、数のもろもろの種類の違いそのものを生み出した特殊な条件を明らかにするためには、この概念の発生を分析することが必要である。もろもろの種類の数種の普遍的根拠の解明を妨げているのは、数学教授の教授法における、伝統的に形成された数の経験的な特徴づけ、である。」⁹⁾数について、その概念の発生を分析することの必要性はいうまでもない。そしてこの点において経験主義として特徴づけられる伝統的方法があるのなら、それは批判されてしかるべきである。しかし、ダヴィドフのいう『二元論』の追放は可能であろうか。ダヴィドフはコルモゴロフに依拠して「数(自然数と実数)は、量という、この、より一般的な数学的客体の特殊な種類である。」¹⁰⁾とする。この、量は連続量であり、離散量は考えられていない。そして、数C/Mは量Cを基準Mで測ることによってえられる、と述べている。明らかに、ここに混乱が認められる。自然数も有理数もないところに、C/Mは意味を持つだろうか。また、そもそも、自然数のないところに測定行為など成り立つのだろうか。このような混乱の生ずる原因はおそらく、自然数が実数の部分集合であることからくるのではないかと思われる。自然数が実数の部分集合であるならば、まず実数の存在根拠である連続量を教え、その特殊なものとして自然数を扱える、と考えているのだろう。たしかに、自然数は実数の部分集合である。だから、なんらかの方法で実数の概念が形成されたとすれば、それに他の内包を加えることによって自然数がえられるかもしれない。しかし、少なくとも現代の数学は、それが不可能であろうことを示唆している。すなわち公理的に実数を規定するにしても、たとえば連続の公理を述べるためのアルキメデスの原理や、デデキントの切断は自然数や有理数の存在が前提となっているし、有界な単調数列の収束、区間列などにしても、自然数の概念をぬきにしてはとうてい定義することのできない概念系によって構成されているからである。

このように、数学教育は離散、連続のいずれの立場からでも、一元的に構成することには無理が生ずることが示された。ここからさらに進んで、カリキュラムの構成においていかに連続と離散が対立の統一をなしているか、なすべきかを示すことが次の課題となろう。ここでは、思いつくいくつかの研究課題を列挙するにとどめる。

- ①、数と演算の拡張における意味づけの問題。たとえば乗法における分離量の累加と連続量の比例。
- ②、現在の数教協の実践の、いわば「連続量主義的偏向」(?)。たとえば整数における除法(累減による意味づけ、剰余の一般性など)
- ③、関数指導における「連続的变化」のイメージの形成。また、関数のふるまいを研究する行為自体の離散性。
- ④、多項式と「量」の問題。(不定元の概念など)
- ⑤、子どもの、無限への興味、関心を育てる課題。
- ⑥、幾何学的対象の位相的性質。(直線や曲線の連続性)
- ⑦、離散的な幾何学的諸量の取り扱い。(次元、かたちをきめるパラメーターの個数など)
- ⑧、解析学の領域での離散的なものの位置。(数列、級数、差分方程式などのおもしろさの開拓、連続的なものとの対比など)

注

- 1) 藤沢利喜太郎「算術条目及教授法」1986年、教育出版センター、139ページ。「数ハ数ナリ、数ノ観念ハ外界ヲ離レテ存在スルモノナリ、此ノ事ヲ普通教育ニ応用シタルハ、独逸ノ教育社会ニ所謂数ハ数ナリ主義ナリ。」
- 2) ラッセルはペアノの公理系を満たす自然数以外の例をいくつか挙げ、「伍々の数は単に数学の公式を満足するだけでなく、日常の物にも正しく使い得るようなものであってほしい。即ち人間は十本の指、二つの眼、一つの鼻を有つと言い得るように数を定義したい。」として、集合の大きさによる自然数の定義を説明している。自然数の公理系がカテゴリカル(それを満たすものは同形)であることから、ラッセルの所説は誤りであるという立場もありうるが、ペアノの公理系が自然数とは何であるかを知っている者にだけ理解され得るという指摘は正当であろう。ラッセル「数理哲学序説」平野智治訳、1942年、弘文堂、21ページ。
- 3) 岩崎允胤・宮原将平「科学的認識の理論」1976年、大月書店、173ページ。及び174ページ。
- 4) 岩崎允胤「現代社会科学方法論の批判」1965年、未来社、のライト・モチーフは現代の科学、とりわけ社会科学がその基本対象、概念の吟味が不十分なままに、数量化を急ぎ、それをもって満足する風潮にたいする批判である。
- 5) ハルモス「素朴集合論」1975年、ミネルヴァ書房、17ページ～18ページ。
- 6) ヘーゲル 前掲書、215ページ。
- 7) 遠山 啓、銀林 浩「量と構造」、1971年、国土社、14ページ～15ページ。
- 8) 静岡良次「数学における連続の問題」(武谷三男編「自然科学概論」2、1960年、勁草書房、290ページ～291ページ。
- 9) ダヴィドフ「教科構成の原理」1975年、明治図書、298ページ。
- 10) 同上、378ページ。

[付記] 小論は、室蘭工大の山口 格氏、千葉大の大田邦郎氏、研究室の高村泰雄氏、山梨大の成田雅博氏など、多くの研究仲間との討議に負う。ただし、誤った認識があれば、須田の誤解または認識の欠如によるものであることはいうまでもない。