《実践報告》

合同変換の授業プランとその授業記録

—「鏡による図形の移動」の改訂—

前　田　輪　音
(北大教育学部教育方法学研究室修士課程)

〈目次〉

0　はじめに

本論文の目的は，初等教育における幾何教育で，合同変換の授業プランのひとつを提案することにある。合同変換の指導は，須田勝彦の「幾何教育の基本構想」[1] における初等中等教育の幾何教育の目標；「ユークリッド空間における図形の基本性質を教えること」のひとつに位置づく。

授業書『鏡による図形の移動』が作成され（主に作成に関しては久蔵宏幸—1986年度北大教育学部卒業生—が責任をもっている—以下「久蔵プラン」と略す），2度の実践(1986年度，1987年度—実践対象は小学5年生，授業者は前者が須田智恵子教諭，後者が佐々木和子教諭）および，その分析が久蔵の卒業論文，および「〈実践報告〉授業書『鏡による図形の移動』と授業記録」[2] において報告された。久蔵プランの構成を以下にあげる。

①鏡映　②併進（軸が平行な鏡映の合成による）　③回転（軸が平行でない鏡映の合成による）　④平面上のすべての合同変換は3回以内の鏡映で生成されること　⑤対称性

擬似的「ハーフミラー」の役目をはたす透明色つきアクリル板をプリントのうえに垂直にたて，図形の側からミラーを見下ろすと，それがミラーの反対側にうつって見える。そのうつり方をもとに鏡映を定義し，定木やコンパスを用いてその性質を調べる。次に鏡映の合成により併進と回転を生成し，定義しその性質を調べる。1回の鏡映では重なり合わない裏返しで合同な図形は3回の鏡映で重ね合わすことができることを実験的に調べ，すべての合同変換はたかだか3回の鏡映で表すことができることを授業書上で提示する（回転と併進が鏡映の合成で生成されることは，〈正格に合同な図形は2回の鏡映で重ね合わすことができる〉という幾何学的事実の操作としての逆にあたるが，〈正格合同変換が，回転と併進に分類される〉ことは示されていない）。さらに対称変換による図形の対称性を調べる。

鏡映は合同変換を生成する。鏡映をもとに，すべての合同変換をその合成により生成し，相

互関係を導くという教育内容を，小学校高学年向けに構成，作成しその意義を検証したという点で，幾何教育において変換の指導のひとつが提案されたといえる。

同時に，2度の実践を通して次のような改訂の指針が示された。「プランの基本的な構成に関して，鏡映，併進，回転の定義とそれらの相互関係の問題が同時に扱われており，それが混乱の原因となっている。一中略一併進や回転はそれ自体，鏡映と独立に定義されたうえでその関係が問題になるのである，等長変換がこの3つに分解できることこそ，このプランに入る前に獲得しておくべき重要な認識だったのである」(須田勝彦による)[3] 今回の改訂はこれをもとに行なう。

1) 須田勝彦「幾何教育の基本構想」(須田勝彦・久蔵宏幸・岡野　勉「《実践報告》授業書『鏡による図形の移動』と授業記録」　『教授学の探究』No. 8, 北大教育学部教育方法学研究室発行　1990

2) 須田勝彦・久蔵宏幸・岡野　勉「《実践報告》授業書『鏡による図形の移動』と授業記録」　『教授学の探究』No. 8, 北大教育学部教育方法学研究室発行　1990

3) 同　上

1　授業プラン「合同変換」の論理的骨格

1—1　教育内容

合同変換の内容を以下に示す。公理，定義，定理，記法およびそれぞれの番号など「　」内は注釈がないかぎり，那須俊夫「変換幾何入門」[1] を参考にしたものである。

・**変換**；「集合AからAの上への1対1写像をAの変換という」

変換の合成；「(集合) Aの二つの変換f, gに対して，Aの各要素xにAの要素 g(f(x)) を対応させる写像をg•fと表す。すなわち

(1.4　　$g\cdot f(x)=g(f(x))$　　$(x\in A)$　このとき, g•f は集合Aの変換となる。変換 g•f を f と g との積または合成変換という」

恒等変換；「集合Aの各要素xにそれ自身に対応させる写像は，明らかにAの変換である。これをAの恒等変換とよび，Ｉと書く」

逆変換は，〈変換した図形をもとに戻す変換〉である。つまり，「集合Aの変換fに対して，逆写像 f^{-1} はAの変換である。逆変換について，明らかに次のことが成り立つ：$f^{-1}f=I=ff^{-1}$」

「集合AからAへの写像fが $f\cdot f=I$ を満たすとき，fをAの対合という」

・**合同変換**；合同変換は次のように定義される；

「定義1.1　平面上の点対応で，2点間の距離を変えないもの，すなわち，任意の2点P, Qの像をP′, Q′とするとき，つねにPQ=P′Q′が成り立つような写像を合同変換，または等長変換という」

「定理1.7　2つの合同な三角形ABC, A′B′C′が与えられたとき

A→A′, B→B′, C→C′であるような合同変換が存在し，それはただ一つである。

定理1.7は，平面から平面への移動として合同変換を考えなくても，三角形の変換を調べることにより，それぞれの合同変換の性質を導くことができることを示している。つまり，変換を平面上の点対応としてでなく，〈図形上の点の対応〉と定義できるのである。合同変換は，次のような性質をもつ。

「補題1　(1)合同変換は単射である

(2)合同変換によって直線上の3点は直線上の3点に移り，2点の間にあるという関係も不変である（共線性）」

「定理1.2　合同変換によって，直線は直線に移り，線分は線分に移る」

「定理1.3　合同変換は全単射である」

「定理1.4　合同変換によって，角は角に移り，その大きさも変わらない」

定理1.2～1.4より〈合同変換により図形Fは合同な図形F′にうつる〉ことがわかる。またF上の任意の点Pはすべて合同変換によりF′上に移る。これらから〈合同変換により図形は合同な図形に移る〉，つまり〈図形を合同な図形に変換するものを合同変換〉ということができる。

「(＊合同変換は）たとえば，点Pを中心とする平面の回転（あるいは，Pを通るこの平面に垂直な直線のまわりの回転）は，Pを不動点にもつ等長変換であるが，併進（あるいは《平行移動》)は不動点をもたず，すべての点が移動する。鏡映は特殊な等長変換で，不動点は1直線(あるいは1平面）上のすべての点からなる。この直線（あるいは平面）を軸（あるいは鏡面）という。もっとも単純な変換（これは単純すぎて，ちょっとみたところではあげる価値もないように思われるほどである）は，恒等変換で，どの点も動かさないものである」[2)]

合同変換が恒等変換，鏡映，回転，併進の4つで構成されることを示している。

次に，それぞれの合同変換の定義および基本性質を示す。

・鏡映；

「定義1.2　平面上の直線 l 上に対し，平面上の各点Pに，点Pの l に関する対称点P′を対応させる点対応を直線 l に関する対称移動または折り返しといい，U(l)で表す。直線 l を対称移動U(l)の軸という」

「(註として）点Pの l に対する対称点とは，点Pから引いた l への垂線が l と交わる点（これを垂線の足という)が線分PP′の中点となるような点P′のことである。Pが l 上にあるときは，P＝P′である。したがって，対称移動が定義されるためには，垂線の存在とその一意性が不可欠である」

「鏡映」は「対称移動」ともよばれているが，プランでは「鏡映」とよぶことにするので以下「鏡映」に統一する。垂線の一意性の吟味はプランの課題とはしない。

次に示すU1～U3は鏡映の基本性質である。

「U1　鏡映は対合である。すなわち平面上の恒等変換をIとするとき　$U(l)^2 = I$」

U2　鏡映U(l)の軸 l 上の各点はU(l)の不動点である，すなわち

$U(l)\ (P)=P \qquad (P\in l)$」

「定理1.5　鏡映によって線分の長さは不変である」

「U3　鏡映は合同変換である。しかし角の向きは反対になる」

U1は，鏡映の逆変換は同じ軸の鏡映であることを示している。定理1.5は鏡映が合同変換であることを示しているので，前述した合同変換の性質がすべてあてはまる。

「変換の3公理

A1　異なる2点を通る直線はただ1つである（直線公理）

A2　任意の半直線OXと正数dに対してOP＝dであるような点Pがただ1つである。

A3　直線 l と l 上の半直線OX，および正数 θ($0^\circ<\theta<180^\circ$)に対して直線 l の与えられた側にあって $\angle XOY=\theta$ であるような半直線OYがただひとつある」

鏡映の性質およびＡ１～Ａ３により，例１～例３を導くことができる。

「例１　角の２辺はその二等分線に関して対称である。

例２　異なる２点Ａ，Ｂから等距離にある点の軌跡は，線分ＡＢの垂直二等分線である。

例３　等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に２等分する，また二等辺三角形の底角は等しい」

鏡映の性質から例１～３が導かれるが，Ａ１～３は既習のものとして合同変換の性質を調べるために適宜用いた。[3]

・**平行**；「一致した二直線も平行ということにする」。

ただし，このプランでは平行の定義自身を示すことはしない。たとえば次に示す平行移動において０ベクトルによる平行移動を平行移動の一つとみることを可能にする。

・**平行移動**；平行移動は次のように定義する。

「定義1.4　平面上の与えられたベクトルをｖとする。平面上の任意の点Ｐに対して，$PP'=v$であるＰ′を対応させるような点対応を，ベクトルｖだけの平行移動，または，併進といい，記号でＴ(ｖ)で表す」

次に示すＴ１～Ｔ３は平行移動の基本性質である。

「Ｔ１　平行移動は合同変換である

Ｔ２　$v=O$ならば恒等変換である。また$v\neq O$のときＴ(ｖ)は不動点を持たない

Ｔ３　Ｔ(ｖ)の逆変換は，Ｔ(－ｖ)である」

・**回転移動**

角；２つの半直線の作る図形を角と察義する。ただし角そのものの定義はこのプランでは示さない。このプランより前に示されるものである。[3] 角度についても同様である。２つの半直線の組において順序を考えると有向角となる。今回実践した佐藤学級では，360°以上の角も以前に学習されていたので適宜用いた。回転移動は次のように定義される。

「定義1.5　平面上に定点Ｏと有効角αが与えられているとき，平面上の各点Ｐに$OP=OP'$かつ$\angle POR'=\alpha$を満たす点Ｐ′を対応させる点対応を，Ｏを中心とする角αだけの回転移動または回転といい，記号でＲ(Ｏ，α)で表す」

次に示すＲ１～Ｒ３は回転移動の基本性質である。

「Ｒ１　０度回転，およびｎ回転のとき（ｎは整数），Ｒ(Ｏ，α)は恒等変換である

Ｒ２　Ｒ１以外のとき，Ｒ(Ｏ，α)の不動点は回転の中心Ｏだけである

Ｒ３　回転移動は合同変換である」

・**合同変換の相互関係**

変換の合成は，(1.4)より$g(f(x))$と定義できるが，これが$g\cdot f$という一つの変換であることは，重要な教育内容である。

鏡映による三角形の重ねあわせ

「定理1.8　合同な任意の２つの三角形が与えられたとき，高々３回の適当な鏡映により一方を他方に重ね合わすことができる」

「系　　１組の対応頂点を共有する合同な２つの三角形はその軸が共有頂点を通るような高々２つの鏡映で重ね合わすことができる」

「定理1.9　平面上のすべての合同変換は高々３つの鏡映の積である。もし合同変換が不動点Ｏを持てば，軸がＯを通るような高々２つの鏡映の積である」

定理1.9は，鏡映が合同変換を生成することを示している。鏡映の合成がどのようなときに平行移動，回転移動，恒等変換になるかは，その軸の位置による。

「定義1.6　△ABCはその周上を，この順に一周する向きが反時計回りであるか否かによってそれぞれ向きは正，または負であるという。また三角形の向きを変えないような変換を正の変換という。これに反して三角形が逆向きの三角形に移されるような変換を負の変換という」

2つの鏡映の合成による正の合同変換の生成

「定理1.10　2つの鏡映U(l)，U(m)の積は

（i）　l∥m ならば平行移動である

(U(m)・U(l)＝T(2v)　vは l をmにうつすベクトル)

（ii）　1とmが交わるならば，回転移動である

(U(m)・U(l)＝R(O，2α)　α は，l をmに移す回転の角)」

「定理 1.11　恒等変換でない正の合同変換は，不動点を持たなければ平行移動，不動点を持てば回転移動である」

2つの回転移動の合成；回転移動の合成は回転移動または平行移動になる。

平行移動の合成；ベクトルの演算を前提とすれば，2つのベクトルによる平行移動の合成は，2つのベクトルの和による平行移動となる。

鏡映の合成；以上から，明らかである。

・対称変換

「定義 3．5　平面上の図形（点集合）Fに対し，図形Fを全体として不変にする合同変換，すなわちf(F)＝F(fは合同変投)であるような変換fを，Fの対称変換という」

「図形Fのすべての対称変換の集合は群をつくる。この群をFの対称変換群という」

プランでは，Fの対称変換自体を調べることを目的にする。よって，〈図形Fの「対称変換」の集まり〉を，Fの〈対称性〉と定義する。

〈注〉

1）　那順俊夫『変換幾何入門』　共立出版　1990

2）　H.S.M コクセター/銀林浩訳『幾何学入門』　明治図書　1966

3）　たとえば，須田勝彦「いろいろな形」(小学校4年生用)，「多角形と円」(小学校3年生用)(『新訂　楽しい学習プリント』北海道地区数教協発行　1992）などで扱われている

1—2　構　　成

プランの大きな目的は，平行移動，回転移動，鏡映のそれぞれの変換の性質を調べそれらが合同変換であること，その相互の関係を知ること，対称変換を調べること，などを通して，合同変換とはなにかを理解することにある。

全体の構成；それぞれの変換の性質をそれぞれ独立して調べる。そのあとに相互関係を変換の合成を調べることで導く。これは鏡映がすべての合同変換を生成することが最終の目的となる。最後に対称変換を扱う。

(1)　変換と合同変換

〈変換〉を「図形上の点の対応」と，定義する。〈合同〉を「同じ形で同じ大きさの図形」と定

義する。そのあと「合同な図形に変換すること」を〈合同変換〉と定義する。合同な図形は「対応する辺がそれぞれ等しく，対応する角はそれぞれ等しい」ことに気付かせる。

(2) 合同変換を構成するそれぞれの変換

次に，恒等変換，鏡映，平行移動，回転移動のそれぞれの変換の性質を調べる。

まず恒等変換を最初にする。これは数の指導での「0」からの導入に相当し奇異に感じるだろう。また，変換を決めるパラメーターが，平行移動の0ベクトル及び回転移動の回転角360×n度のとき，等しく恒等変換であることが認識されるためである。鏡映は他の3つと異なり負の合同変換なので最後にする。平行移動と回転移動の順番は任意だが，まず平行移動を先にする。

〈恒等変換〉は「何も動かさないこと」と定義し，合同変換の一つであることを示す。

〈平行移動〉は，「図形上の点を同じ方向に，同じ長さずらすこと」と定義する。図形を平行移動し，対応する点を結ぶと平行四辺形ができること，0ベクトルによる平行移動は恒等変換であること，逆変換はもとのベクトルの正反対の方向のものであることを導く。合同変換の一つであること，対応する辺は平行になることを導く。

〈回転移動〉は，「一つの点を中心に図形上の点を同じ角度まわすこと」と定義する。対応する点の組を結んでできる線分の垂直二等分線上に回転の中心があることを導く。回転移動もまた合同変換である。

以上3つは正の合同変換である。鏡映を介する前に正の合同変換がこれ以外に存在しないことを示す。それは平行移動で重ならない（任意の）正の向きに合同な図形が回転移動で重なることを実践的に確かめることによる。正の合同変換を分類，整理する。すなわち対応する辺が平行のとき平行移動が半回転で重なり，対応する辺が平行でないとき半回転以外の回転移動で重なる。

1本の直線に対して反対側に図形をうつすことを〈鏡映〉と定義する。鏡映の作図ののちに，鏡映の軸を見付けることを通して軸が対応点を結んだ線分の垂直二等分線になることを導く。鏡映が合同変換の一つであること，逆変換が同じ軸の鏡映であることを導く。

(3) 変換の合成

〈変換の合成〉を「図形を続けて変換すること」と定義する。変換の合成の結果，もとの図形から最後の図形に直接変換する方法をみつけることにより，変換の相互関係を明らかにしていく。2つの平行移動の合成，2つの回転移動の合成を調べ，そのあと2つの鏡映の合成を調べ，それが平行移動・回転移動・恒等変換のどれかになることを導く。1回の鏡映では重なり合わない変格に合同な図形を重ね合わすには3回の鏡映が必要なことを導く。結局，〈合同な図形はたかだか3回の鏡映の合成で重ねあわすことができる〉ことを導く。これは鏡映がすべての合同変換を生成することを意味する。

(4) 対　称　性

「自分自身に重ねる変換の組」をその図形の〈対称性〉と定義する。いろいろな図形について，回転対称性，鏡映対称性を調べる。さらに併進対称性について考える。

以上の点から，プランを次のように章立てする。

序　合同変換とは

1　恒等変換

2　平行移動

3　回転移動

同じ向きに合同な図形の分類

4　鏡　　映

5　変換の合成

6　図形の対称性

1—3　実践の概要

実践対象は，合同（学習指導要領では5年生）を学習していない小学校高学年の子どもを想定している。「（相似変換群の）そのもっとも重要な部分群である合同変換群（等長変換群）を扱うことを可能にする，等長変換の担い手ともいうべき平行四辺形，円などに関する諸性質」[1]を学習した概ね5年生を実践対象としていいだろう。

授業は，1993年9月17日から11月18日にかけて，宮城県多賀城市立城南小学校6年1組31名，授業者は佐藤敬行教諭で実施された。総ページ数49ページ，授業時数32時間である。この学級では，この授業書と実践と並行して，別な内容（比例）の算数の時間も設けられている。実施前に5年生で合同な図形は学習済みであるが，6年生の学習指導要領に設定されている「対称な図形」および「拡大図・縮図」は学習していない。なおこの授業実施後，授業書「ホモセティー」の改訂版も1993年12月より実践中である。

〈注〉

1）　須田勝彦「幾何教育の基本構想」（須田勝彦・久蔵宏幸・岡野　勉「《実践報告》授業書『鏡による図形の移動』と授業記録」）『教授学の探究』No. 8, 北大教育学部教育方法学研究室発行　1990

2　授業プランの解説および授業の展開

ページ数は授業プランのそれをさす。授業の記録は適宜必要と思われるところを取り上げた。（　）内は記録を省略した部分の説明であり，＊以下は筆者のコメントである。

《序章　変換と合同変換》（p. 1〜4）

〈序章の内容〉　まず幾何学的変換のイメージを豊かにするために，変換そのものについて考える。図形上の点の対応として変換を定義し，変換で保存されるものとされないものを考えることを通して，定義付けはしないにしろさまざまな変換—合同変換，中心拡大，アフィン変換，位相変換—を比較しながら，合同変換とはなにかを考える（p. 1〜3）。

合同を「同じ形で同じ大きさの図形」と定義し（p. 4），これをもとに合同変換を「合同な図形に変換すること」と定義する（p. 4）。合同の性質を導く（p. 4）。

P. 1, 2

変換の定義，「対応する点」などの言葉の使い方を示す（p. 1）。

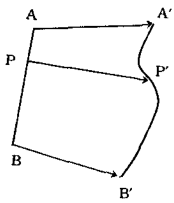
変換で変化したものと変化していないものを調べる（p. 2）。ここでは合同変換群以外の変換—アフィン変換，位相変換など—も図で示し不変なものと変化したものを調べることを通して，変換の世界の広さを示す。これらのなかで，合同変換との比較が可能になる。また合同でない相似変換と合同変換との比較も行なうことができる。

〈授業の記録—1ページ〉

序章

図形上の点をすべて動かすことを
〈変換〉といいます。

変換によって図形は変わります。



点Aは点A′にうつりました。
点Pは点P′にうつりました。
点Bは点B′にうつりました。

線分APは
曲線A′P′にうつりました。

点Aと点A′,
点Pと点P′,
点Bと点B′を

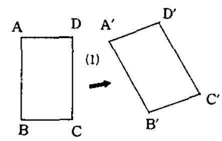
〈対応する点〉といいます。

ABとA′B′を〈対応する図形〉といいます。

[問題] 次の図形のそれぞれを，変換しました。
それぞれ何が変化して，何が変化していないのでしょうか。

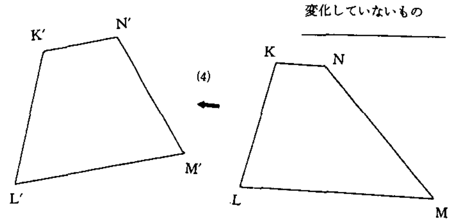
(1)
変化したもの

変化していないもの



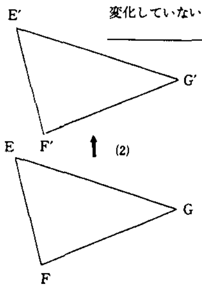
(4)
変化したもの

変化していないもの



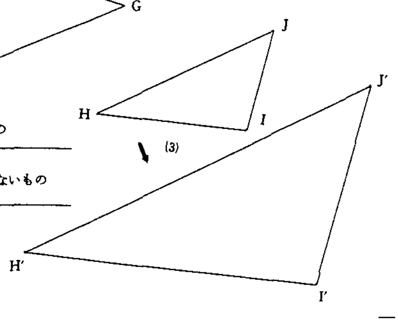
(2)
変化したもの

変化していないもの



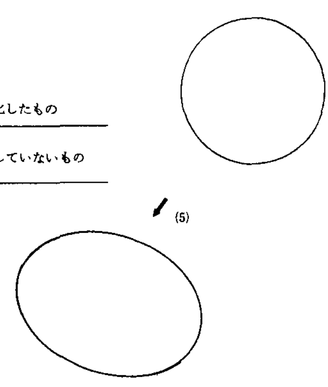
(3)
変化したもの

変化していないもの



(5)
変化したもの

変化していないもの



T　(～図形は変わります」までを読んでから，黒板に1本の線をかく)
これなんていいますか？

C　辺　／T　辺って言うんですか？

C　線　／　C　線分　／　C　対角線　／C　直線

T　はい，あとは？　ただね，「辺」って言うのは図形の部分を辺って言うんですね。辺はあまり適切でないかもしれないですね。線，線分，直線，いずれも正しいですね。ところで線分と直線の違いはみんな分かりますか？（線分と直線の違いを説明，次の下の図をさして）で，これを移すんだってさ。このAをA′に，BをB′に，PをP′に，とにかくこの線のうえのどの点もとにかくこの曲線のどこかにうつる。こういうふうにして移すってこと，動かすことを変換という。この線分をこの曲線に動かしたことを変換という，と。線分APはどこに移ったかというと，線分APは？

C　A′P′。

T　にうつったと。で，これとこれのこと，AA′を「対応する点」，じゃBとB′をやっぱり「対応する点」（同様にP，P′も）といいます。ことばの使い方をやってるというわけですね。線分AB—これだって図形ですよ，と，線分？

C　A′B′。

T　これは対応する図形といいます。だけの話です。今はね，べつに言葉を使えばいいです。次は大きい紙。(2ページを配布)

〈2ページ〉

T　(2ページの問題を読む)

C　全然わかんない。

T　だからやるんだ。素朴に頭使わないと駄目ですよ。(黒板に(1)の図と，「変化したもの」「恋化しないもの」と記入)

T　(1)，変わったのは何ですか？　何変わったの？　／　総　角

T　ほほー。あとは？　／　大樹　辺

T　辺というのは，どういうふうに変わったの？

C　変わってない（ものさしで長さをはかっている）

T　辺の長さ変わってるの？　変わってないのにいれますか？

C　横の方変わってる。　／　C　B′C′が1mm長い。

T　そしたら，辺の長さと書けば，変化しない，ただし，B′C′が長い。

C　面積も変わっている。

T　お，なるほど，大きくなったのか，小さくなったのか？

C　1mm大きくなったから大きくなった。

T　三浦さん，どう思いますか？　／　三浦　思わない。

T　だって，底辺×高さでしょう。つぶれてるんだよ？　面積小さくなるんだよ。
これだけ，正確に答えてください。Aに対応する点は？　変換したんですよね。
これを動かしたんですよ。Aに対応する点はなんですか？

作山　A′。

T　これがここのところに動いたんでしょ。Bに対応する点は？

C　B′。(同様に，C，Dの対応点も導かれる)

T　　こういうように，言葉を使います。もうひとつ，やってみますか。(2)。
C　　(1)，対角線が変わった。
T　　なるほどね，うん。(2)にすすみます。変化したものはなんですか？　変化しないものはなんですか？　変化したものは？
（図では微妙に辺の長さが異なるため「辺の長さ」と発言される。そこで授業者はわずかな違いは無視していいことにするよう呼び掛ける）
　　とすると，変化したものはなんですか。変化しないものはなんですか？
C　　辺の長さ　／　C　角と同じ。
T　　うん，変化したものは？　／　C　　大きさ。
T　　大きさは同じだと考えといてください。
C　　そうじゃなくて，(ききとれない)。
T　　大きさは？　辺の長さも角の大きさも変わらないんだから大きさも同じでしょ？　変化してませんか？　変化したものはなにもないのね？
C　　角が（ききとれない）ずれている。　／　T　　角度ってどういう意味？
C　　Gの
T　　ほとんど違わないでしょ。つまり，変化したものはない。え，なになに？
C　　向き　　／　　C　　置いてある場所
T　　ほー。向きってどういうこと？　このことか？（手を黒板において，回す）
C　　形。
　　向きってなんだっけ？　場所ってなんだっけ？　形って，何だっけ？
　　これは（(2)）は形は同じでしょ。(3)は形同じ？
C　　ちがう／　C　　同じ　／　C　　ちがう)／　C　　同じ
C　　角度が
T　　みんなは，角のやつ同じのを違うっていうの？　同じっていうの？
C　　同じ。　／　T　　何が違うの？　／　C　　大きさ。
T　　そうすると逆に言いうと(2)は形が同じでしょ、大きさは？　／　C　　同じ
T　　そうすると(2)は形も大きさも同じ。(2)と(3)の違いはそういうことですね。で，今向きということがよく分かりません。正確にはどうだかわかんないんだけど。ま「場所」というのはそれでもいいんですが「位置」にしましょう。「向き」も違うんでないか，でもちょっとわかんないから(　　)にしておきましょう。で，変化しないもの，「形」もひとつは(3)と比べれば(3)も形変わんないでしょ。「(2)は「形，大きさ」ですね。自分なりに(5)までかいてくる，と。

〈次の時間〉—(1)，(2)は前の時間の復習をかねて
T　　(1)ＡＢＣＤは？
C　　四角形　／　C　　長方形
T　　A′ B′ C′ D′ は？　／　C　　平行四辺形。
（授業者は，問題ごとに表を黒板に作成，前の時間発表されていたことを(1)の不変なものに「辺の長さ」をかく）
T　　変化したものは？　／　C　　角の大きさ
T　　角の大きさが変わったから？　／　C　　面積も

T　(2)は？　／　C　位置
T　不変は？　／　C　辺の長さ，角の大きさ
T　バフーッとおおまかに言えば？　／　C　形
T　(3)は？　／　C　大きさ
T　どうなったの？　／　C　大きくなった。
T　形は？　／　C　同じ。
T　「向き」っていうのも問題になったね。(4)は？　変化したものは？
C　辺の長さ　／　C　角の大きさ　／　C　面積
T　変化しないものは？　さっきの言い方すると位置も。で，変化しないものは？
C　台形であること。　／　C　上辺，底辺が平行である。
T　うん，台形だということは，平行はそのままってことだね。
C　高さもかわってない。
T　(5)は？　／　C　形　／　C　位置　／　C　円
T　この場合，円じゃないから，これ，なんて言うか知ってる？
C　だ円。
（授業者　黒板に「円→だ円」と記入）
C　面積。
T　うん，変わらないものは？　／　C　角がないということ。
（授業者が「閉じている」ということについて説明）
T　次のページは，(2)のタイプについて考えます。変換というのは位置が変わる。角や面積が変わっていくものあるし，形は変わんないんだけど大きさは変わる，辺の長さや角の大きさは変わるけど，平行は変わらないのとか，あと「グニッ」とするような変換とかある。形も大きさも変わらない変換を考えます。それは位置しか変わらないんですよね。結局ね。

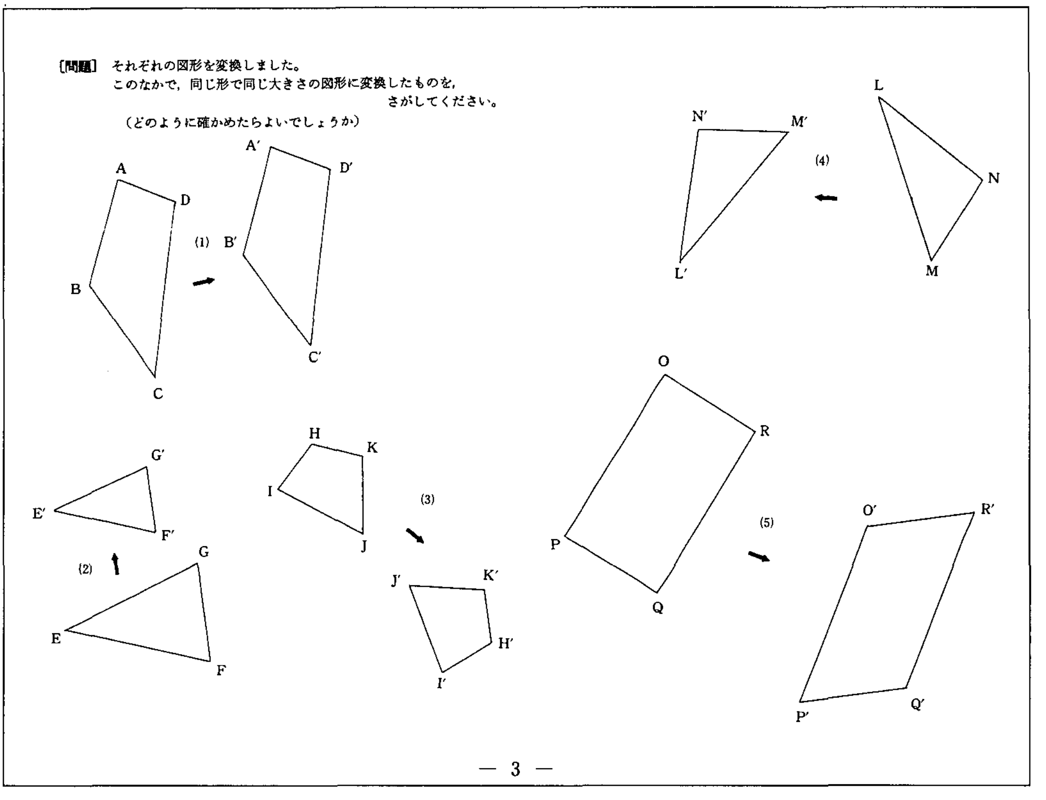
＊様々な変換で保存されるものとされないものを考えた。(1)や(4)が平行性を保存していること，(5)が「角が無いこと」など子どもなりのことばで保存されているものとされていないものが導かれた。さらにその過程で，「位置」が変わり，「辺の長さ」•「角の大きさ」が変らないものが(2)で，それは結局「形と大きさが同じ」ということであり，(3)はそれに比べて「形は同じ」でも「大きくなっている」という，相似変換と合同変換の違いが導かれた。対比のなかで合同変換が徐々にクローズアップされていった。

P. 3

「同じ形で同じ大きさ」（合同の定義をこのようにするがこの時点では「合同」という言葉は出さない）の図形に変換したものをさがす課題を通し，「同じ形」という意味を考える導入部である。紙を切り取り重ねる，同じものをプリントしたものと重ねて比べる，など多様な方法で取り組む。

〈授業の記録〉

T　（問題を読んで）その前に，同じ形，同じ大きさ，どのように確かめたらいいの？　考え方の問題ですからね。
C　みて。／　C　面積
T　それなら同じ形？　／　C　ちがう。　／　C　合同な形。



C　　切り取って重ねる。

T　　ここの所は，さしあたり「ぴったり重なる」，コンパスと三角定木もつかうなって言われて確かめる方法は？

C　　切り取って重なる

T　　切り取るの面倒だから，もう一枚（同じプリント）あげるから。（配布）

((1)，(2)は合同な図形に変換されたもの，とまとめられた）

T　　(3)？

C　　○（21人）　／　C　　×（7人）

C　　裏返したら，重なる。教科書でやって，折り返したら同じ。

T　　ここでだいじなのは，ひっくり返してぴったり重なるのを○にしても×にしても2つの考え方がある，ということです。ひっくりかえして重なるのも，仲間に入れることにします。×にする考え方もあります。

((4)；○　　(5)；×となった）

(3)については，裏返して重なるものを「同じ形」とするかどうかで意見が分かれた。これは，鏡映されているので単にコピーした紙を重ねたり，ずらしただけは重ならないためである。合同とするかしないか両方の考え方があるが，「同じ形の仲間にすることにしよう」ということにする。

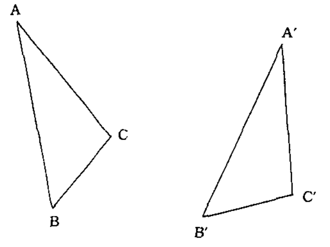
P. 4

合同な図形，合同変換の定義を示す。そのうえで合同な図形を提示してその性質を導く。

〈授業の記録〉

同じ形で同じ大きさの図形を〈合同な図形〉といいます。
図形を合同な図形に変換することを〈合同変換〉といいます。

△ABC と △A′B′C′は，合同です。



合同な図形では

定木とコンパスを使って，
合同変換の世界を探険しましょう。

— 4 —

T　　ある図形を合同な図形に変換する，つまり位置だけ変わっている。こういう変換のことを合同変換という。これからは合同変換についてごちゃごちゃとやってきます。はい，合同な図形です。何か書きたいんですね（四角のなか）。分析的にみてください。ぴったり重なることを，ま当たり前ですね。辺 AB の長さは？

公介　　同じ

T　　辺 AB と辺 A′ B′ のことを？　／　C　　合同な辺

T　　じゃ。頂点Aは A′ にいったんでしょ。A と A′ を？

C　　対応する点。

T　　辺 AB と A′ B′ は？　／　C　　対応する辺。

T　　対応する辺がどうだっていうの？　／　C　　長さが同じ。

T　　他には，辺の長さともうひとつは？（中略—角についても同様に一つづつ対応角を取り上げる）対応する角の大きさは？　／　C　　等しい。

T　　考えてみればあたりまえですね。（後略）

《第 1 章　恒等変換》　(p. 5)

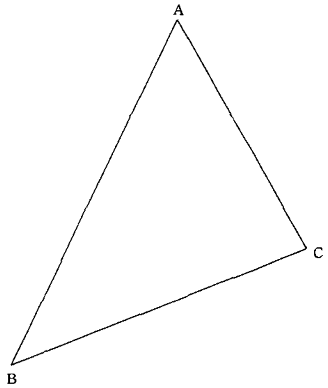
〈1 章の内容〉　図形がそれ自身と合同であること（反射律）は自明ではない。何も動かさないことも変換である，と考えることもできるということを示す。

〈授業の記録〉

T　　△ABC と△ABC は合同です。△ABC を合同変換して△ABC になりました。A′ はここに，B′ はここに，C′ はここに。こういう変換もかんがえられなくはないですね。

第1章　恒等変換

△ABCは自分自身と合同です。
何も動かさない変換(恒等変換)も合同変換の一つです。



— 5 —

C　　うん。

T　　$\triangle$ABC と A′ B′ C′ は合同ですか？　／　C　　合同。

T　　何もしないこともひとつの変換だと考えちゃおう。こういうのを恒等変換という。あとでこれがジワッと効いてきますから，以上で第１章終わりです。

C　　えー。早い，もしかして１章１ページなの？　ひとつのプリントなの？

T　　でもね，恒等変換にひとつの章を使ったことが重要なの。これ以上やりようないけど，あとで使うの。

＊恒等変換自体，理解されたと同時に，１章ぶんとして扱ったことは意外だったようだ。

《第２章　平行移動》　(p. 6～10)

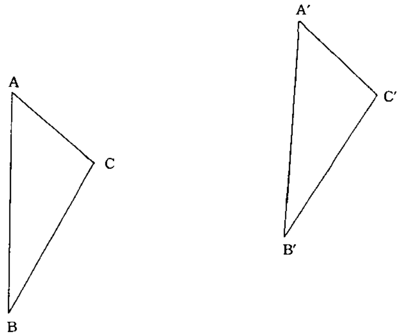
〈２章の内容〉　平行移動のパラメーターがベクトル（という言葉は出さない，同じ方向，同じ長さと表現する）であることを導く。線分を実際に平行移動する課題で線分上の１点Ｐの対応点P′を考えることを通して，点の変換の集まりが図形全体を変換することを示す。さらに多角形の平行移動を作図すると（対応点を結ぶと）平行四辺形ができることを通して対応する線分が同じ長さで平行になること. ひいては平行移動が合同変換であることを導く。ベクトル０の平行移動が恒等変換であること，向きが正反対のベクトルでの平行移動が逆変換になることを導く。

P. 6

章の名前を空欄にしたのは，あらかじめ示してしまうと，子どものイメージを束縛する恐れがあると思ったからである。以下，回転移動，鏡映も同様にその導入部では変換の名称は出さ

第２章 ＿＿＿＿＿＿

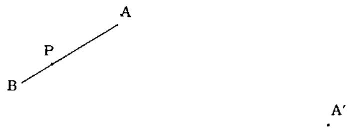
［問題］ △ABCと△A′B′C′は合同で，
AB と A′B′，BC と B′C′，CA と C′A′は，
それぞれ互いに平行です。
△ABCをどのように動かせば，
△A′B′C′とぴったり重なりますか。



— 6 —

図形上の点を　同じ方向に同じ長さ　ずらすことを
〈平行移動〉といいます。

［問題］ 線分ＡＢを平行移動して，点Ａが点Ａ′にうつりました。
このとき，
(1) 点Ｂのうつった先の点Ｂ′を作図してください。
(2) 点Ｐのうつった先の点Ｐ′を作図してください。



— 7 —

ず，定義を示してからその変換の名称と同じ章の名前を記入することとする。

もとの図形と平行移動した図形の対応する点を結んだ線分が，互いに平行で長さが等しいことを導く。これは平行移動の作図の上でのパラメーターがベクトルであることを意味する。辺上の任意の点がどこに移るかを調べると，より明らかになる。

〈授業の記録〉

（課題の説明のあと）

T　どいうふうにするとぴったり重ねられるか，ですね。紙の上でどういうふうに動かし方をすれば重なるか？

C　紙の上でうわーっとして重ねる。

T　そうだよね。こたえになるよね。途中できるだけ余計な動きをしないでもってくるにはどうすればいいの。

C　回さない。　／　C　平行に動かす。　／　C　平行にもってく。

T　うん。じゃあね。AをA′にもってくんだね。（T　線分AA′をかく）
で，Bは？　B′までいくんですか？（T　線分BB′をかく，CC′についても同様）。
はい，そこで，この図をみて，気が付くことがありますね。
A→A′，B→B′，C→C′
途中の道にあしあとつけたらこうなりました。

C　まっすぐに。　／　C　足跡が直線になっている。

C　プラスチックの入れ物みたい。

C　全部線が同じになっている。AA′とBB′とCC′の線。

T　　うん，そうだ。同じ長さになっている。それだけですか。もうひとつ。3本の線分をながめてください。山崎一人わかったみたい。井上さんも。

山崎　全部平行になっている。

T　　うん。こういう移動の仕方なんだね。合同変換のひとつ。はい，そうだね。じゃあ点P（辺A′ B′上の点）の点は？　この変換でどこに移るんですか？

宗　　（黒板で一ほぼ条件を満たす位置にP′を記入）　／　T　　はい。

（後略）

＊「平行にもっていく」という発言，および授業者が対応点を結んだことにより，それが契機となって，$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$が導かれた。

P. 7

線分を変換する課題である。$\forall P \in AB$なる点Pの対応点を調べる課題を設定したのは，図形上の点の変換の集まりが，図形全体を変換したことになることを示すためである。

〈子どもの作図〉

子どもの作図の方法を以下に示す。合同であること，平行であることなど用いて，さまざまな方法が導かれた。（　）内の数字は授業中の挙手により，1名のみは発表者をさす。

(a)　ベクトルAA′＝ベクトルBB′を用いたもの（3名）

(b)　AB∥A′B′，AB＝A′B′　（14名）

(c)　AB∥A′B′，AA′＝BB′　（1名一渡辺）

(d)　AA′＝BB′，AB＝A′B′　（コンパスのみ使用）（1名一総）

＊6ページで，この変換が長さを保存する変換であること，平行な直線に移す変換であること，がほぼ明らかなので，このような方法が用いられたものと思われる。平行移動のパラメータがベクトルAA′であることを用いた作図は3名のみである。このプランの内容構成ではベクトルの意義が必ずしも明らかにはならないことを示している。

(a)の方法を，次頁で平行移動の作図法として示したが，このプランの流れからはこの時点でこの方法に限定することはできない。作図法は8ページ以降に配置するべきだろう。

P. 8

平行移動の作図法の例および多角形を変換する課題である。問題(2)は，ベクトルをもとに対応する点を作図すると，平行四辺形ができることを導くためである。これは平行移動が平行四辺形の性質により合同変換となることを表している。問題(3)は恒等変換である。

〈授業の記録〉

（問題(1)のあとの(2)で）

T　　ACC′ A′はどうして平行四辺形なんですか。

C　　ACを平行移動させたから。

C　　最初にA，B，Cを平行移動させたから。

T　　まて，A, C, C′, A′で考えて。同じ理屈は他のにも当てはまるから。

C　　AとA′をつないで，CとC′をつないで，AとCは一緒につながっていて，A′ C′は一緒につながっていて（ききとれない）

T　　「一緒につながって」ってどういうこと？

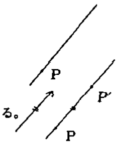
C　　ACは同じ長さで平行移動しているから，AA′＝CC′，平行移動だから大きさ変わってないからAC＝A′ C′，長さ変わってないから。

平行移動の作図法

⓪ Pを したい。 ・P

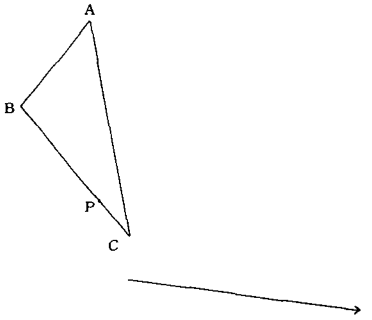
① Pを通り, に平行な直線のうえに,

② と同じ方向に同じ長さに点P′をとる。



[問題]

(1) △ABCを，矢印の方向に矢印の長さ　平行移動した
△A′B′C′を作図してください。



(2) 平行四辺形を見つけましょう。

(3) 矢印の方向に長さ0　平行移動したら，どうなりますか。

図形を平行移動すると

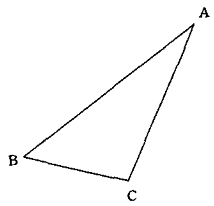
(1) 対応する線分は,（　　　　　）。

(2)

(2)から，平行移動は合同変換の一つであることがわかります。

[問題] △ABCを平行移動して△A′B′C′を作図してください。

△A′B′C′を△ABCにもどす方法を考えてください。



平行移動した図形をもとにもどす変換は,
同じ長さで反対向きの平行移動です。

T　　どうして？　／　C　　平行移動だから，合同変換だから。

T　　（黒板で整理）ウン，もうちょっとある。

神崎　同じ方向で同じ長さだから。

T　　うん，AA′とCC′の線分の向きは，同じようにしたんでしょ。「平行」だと（中略）

T　　さ，(3)わかりますね。どうなりますか？　／　C　　？

加藤　変わらない。

T　　うん，他にどんな言い方？　／　C　　恒等変換。

T　　つまり平行移動の場合，恒等変換は矢印の〈長さ0〉と考えといてください。

＊授業では方向のみをさすものが矢印」と呼び，方向と長さを一度に表すものを「矢線」と呼ぶことにした。

P. 9

平行移動が合同変換であること，対応する線分は互いに平行であることを導く。課題は，自ら矢線を設定して平行移動すること，平行移動の逆変換がもとの平行移動のベクトルと同じ長さで正反対向きのベクトルによる平行移動であることを導くものである。

〈授業の記録〉

時間の関係で宿題になったが，課題を読んだ段階で，恒等変換（「長さ0の平行移動」）を考え，「もうできた」という声があがった。

〈子どもの作図〉

次の時間の発表では，恒等変換の他に，短いベクトルで平行移動したり，直線BC上に辺B′C′を設定した子などがいた。

(a)　AB，BC，CAに平行でないベクトルにより，重ならないように△A′ B′ C′を作図

(b)　直線BC上に，Bの側に適当な位置にB′をとり，ベクトルBB′によりあとの頂点を平行移動する作図。うち，C′＝Bとなるような作図もあった。

(c)　恒等変換

(d)　プリントの上の方向に，△ABCと重なる程度の短いベクトルで作図。

＊(b)の方法は，作図に必要な手順が少なくてすむ。合理的である。もっとも作図上で簡単なのは(c)であるが，これが導かれること自体，恒等変換の認識を意味するのだ。

〈授業の記録〉

（問題の2行目―「A′ B′ C′を△ABCに戻す方法を考えてください」について）

清香　平行移動最初にした分だけ，逆の方向に平行移動する。

菊川　その△を，上にあげたぶんだけ（図ではたまたま，ベクトルが上向きになっている），下げる。

宗生　矢線を180度ひっくり返す。

C　　矢線を逆にして。

T　　はいA′ B′ C′を△ABCに変換するにはじゃあ（矢線）を書いてもらおう。

C　　場所，どこでもいいの？

T　　場所、違ったら困るんですか？　どこでもいいの？

C　　矢線でしょ？

《第3章　回転移動》　(p. 11～12)

〈3章の内容〉　導入部分では平行移動との比較により，回転移動を導く（p. 11)。線分や多角形の回転移動を実際に作図し(p. 12〜14)，対応線分から回転移動の中心をもとめることにチャレンジしながら(p. 15〜16)，その性質を導く。180° の回転移動の作図上の特殊性を課題を通して知り（p. 18)，180° 回転の逆変換を手がかりに，一般の回転移動の逆変換を考える（p. 19)。

裏返さない合同な図形は，どのような位置にあっても平行移動か回転移動で重なることを，実験的に確かめる（p. 20〜21)。

P. 11

まずは，(2)をみて「まわす」というイメージをとらえることが目的である。(1)は，とりあえずどうすれば重なるかを考える。たとえば，平行移動と「まわす」ということをくみあわせて考えることができる。(1)が１度の回転移動で重なりあうものであることは17ページでふりかえって確かめる機会（中心を探すことにより）を設けている。

(2)が，つづく p. 12 の回転移動の方法の手がかりになる。△DEF と D′ E′ F′ は合同なので，FE＝F′ E である。点Eを中心に，点F，Dをそれぞれ中心との距離を保存したまま同じ角度だけ「まわす」ことにより，△DEF が△D′ E′ F′ に重なることを，導く。

〈授業の記録〉

((3)が，平行移動で重なることが発言されてから)

T　　平行移動で重ならないのは？　／　C　　(1)，(2)。

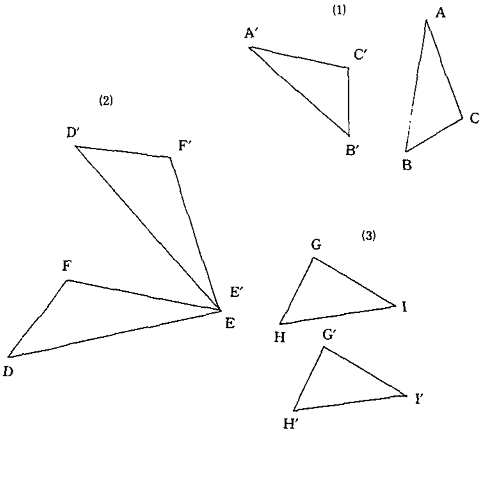
T　　問題は，どうすれば重なるか，ということ。

C　　E，E′ がくっついてるから離さないで，D を D′ にくっつける。

C　　ここを（E）軸にしてまわす。

第3章 ＿＿＿＿＿＿

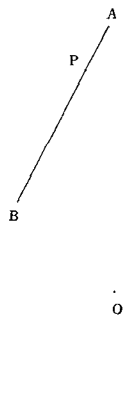
［問題］　これらは，それぞれ互いに合同な図形の組です。
平行移動で重ならない組は，どれですか。
それはどのようにすれば重なりますか。



― 11 ―

図形上の点を　1つの点を中心に　同じ角度　回すことを
〈回転移動〉といいます。

［問題］　線分ＡＢを，点Ｏを中心に60° 回転移動してください。



― 12 ―

C　時計みたいにまわす。

T　(OHPシートで図形の書いたシート(シート(a))と△DEFを上からなぞったシート(シート(b)) を重ね，Eにシャープペンの芯をたてその点を中心にシート(b)をまわす)

T　なんて名前付ける？　／　淳子　回転

T　ここを軸，というより回転のときは，なんて言えばいい？　円の真ん中なんて言う？

C　中心

T　Eを中心に回転する。(1)を今度の算数の時間にやります。

(次の時間―復習ののち)

T　(1)は？

C　たとえばB，B′をくっつけてしまう（平行移動すること)。そのあとまわす。
(平行移動してから回転移動する)

渡辺　△ABCをA′B′C′に平行になるように回して，そのあと，平行移動する。
(回転移動してから平行移動する)

C　AとA′を直線で結びCとC′を直線で結び，BとB′を直線で結び，磁石みたくくっつける。

*(2)から回転移動の定義そのものが導かれたといってよい(下線部の発言)。回転移動の導入部分としてはほぼその目的を達した。(1)も(2)の方法と平行移動を組合せて，可能なかぎりの重ねあわせ方が示された。変換を2回すること(「変換の合成」)・組み合わせることは，子どもにとってまったく抵抗無いものであることがわかる。

P.12

回転移動の定義を示す。11ページの(2)をもとに，線分の回転移動を実際に作図する。
ここで，11ページに戻り，第3章の名前を「回転移動」と記入する。

〈授業の記録〉

T　(問題読む) はい，はじめてください。　／　C　中心点？

T　中心はOです。

(C　作業)

C　わからない

T　じゃ，もう一度こっち（p.11 (2)）に戻りましょう。
Eを中心にBを60度だけ回転移動してみましょう。(OHPで)
最初に60度計るんだよね。この点の動きはなんなんだ？
何つける？　書いてるの？　Bの動いたあとは何になっている？
どういうふうになっている？

C　円。

T　何でかける？　／　C　コンパス。

T　ちょっと待て，これ無理ですね。もうちょっとしゃべるからね。この場合（p.12）はどうするかというと，Oを中心とするんでしょ。線分そのものを考えないで，Bを60度回転させてみてください。　／　C　そうか。

T　そしたらB′がつくれるし。
次に，A．60度回転させてA′をつくってください。これがヒントです。

(C　作業)

C　　先生，回転移動って1個でいいの？

T　　たとえば，点Bを回転させてみましょう。(OHPシート一プランのコピー；シート(a)，無地のシート；シート(b)を重ねて，作図)
でも，どこが60度だかわからないから，60度のところに印を付けとかないとならないね。あらかじめ，60度の方向に線をひっぱっといて，ここでストップしなって。そして，(OBの長さをコンパスでとり，60度の線のところにOBの長さをコンパスの片足をOに付けてもう一方で印を付ける一これにB′とつける)

C　　あ〜そうか。

T　　(同様に，A′，P′を，作図する。)
こうやってくと，(A′，P′，B′を結ぶ) こういうのができるんです。
(C　正三角形ができる，といっているらしく)

T　　あ一正三角形の原理でできるんだ。(60°回転だと，そうなる)
(中略)

T　　最初に60度回転したところに直線引いてもいいし，先にコンパスで円を書いてからでもいいね。

※回転移動は，平行移動のように方法によっては対応する線分を含む直線を最初に作図することは，難しい。少なくともこの時点で定木とコンパスで作図することは無理である。そのことが一つの壁となった。しかし「線分そのものを考えないで，Bを60度回転させてみてください」との授業者の言葉で，わかりはじめた。

この課題の場合，60度回転なので結果的に正三角形ができるが，一般に回転移動は，OP＝OP′となる(たとえば円の半径，二等辺三角形の等しい2辺)。このことこそがプランで強調される必要がある。そのためには正三角形でない二等辺三角形ができる回転の角度を課題に設定するべきであった(授業では，次の時間にp.13を復習がてら，どんな回転角でも二等辺三角形になることが導かれた)。

P. 13

回転移動の作図法の一例である。

〈授業の記録〉

(授業者が黒板で，配布する前に13ページの作図の方法を説明し，作図した後)

T　　ここ，何度ですか？　／　C　　60°

T　　OPとOP′の長さは？　／　C　　同じ。

T　　同じ印というのは，同じ長さのことだからね。
ここで60度にしたからここ (∠POP′) が60度，30度にするなら30度“a°”ならばここがa°になるようにする。a°とは5でも10でも100でも2000でもいい。

C　　2000°って？

T　　そういうのあるの？　これが何度になろうとも？　／　C　　正三角形

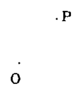
T　　60度のときはね。
どんなときでもこの三角形は？　3度でも5でも100でもいいのね，どんな三角形でもこの三角形は？

C　　二等辺三角形

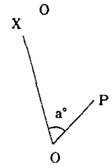
T　　うん，点Oがどこにあるかという問題と，何度回転するかということだけで，回転移

回転移動の作図法

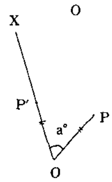
⓪　Pを点Oを中心にa°回転移動したい。



①　POXがa°となる線OX上に,



②　OP=OP′となる点P′をとる。



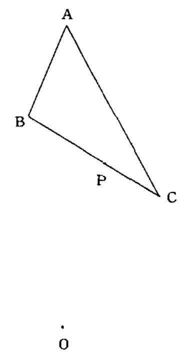
— 13 —

[問題]

(1)　△ABCを，点Oを中心に0°回転移動した $\triangle A_1B_1C_1$ を作図してください。

(2)　△ABCを，点Oを中心に60°回転移動した $\triangle A_2B_2C_2$ を作図してください。

(3)　△ABCを，点Oを中心に420°回転移動した $\triangle A_3B_3C_3$ を作図してください。



— 14 —

動は決まるんでしょ，この2つで，点Oがどこにあっても，何度回転移動するかでも，OP=OP′ の長さは，かならず同じなんですね。ここにOがあって，Pがあって30°回転移動する。

（後略）

P. 14

多角形を変換する課題である。0° の回転移動は恒等変換であること，60° 回転を作図する。

〈授業の記録〉

T　（問題(1)読む）　／　C　え？　／　C　何も書かなくていい。

T　A_1，B_1，C_1 は，書かないと駄目だよ。

T　書いたかい？　定木とコンパス使いましたか？　／　C　使わない。

T　こういうのなんて言うの？　(1)の変換なんて言うの？　／　C　恒等変換。

T　うん。今度は(2)やってください。

（C　作業）

T　実は二通りあります。隣の人と違うという人いますね。いませんか？

（OHP で，右回りと左回りがあることまず説明する）

（プリントを写したものの上にも一枚シートをかぶせて，説明しながら，A_2，B_2，C_2 を作図し，結ぶ。でき上がった $\triangle A_2B_2C_2$ を点Oを固定して，回して△ABC に重なることを見せる一ぴったり重なるので，子どもは驚く）

（中略）

(3)は考えといて。

（次の時間）

T　（問題(3)読む）　／　C　60 度回転。

T　なんだって？　420 度回転移動しなさいっていってるんだよ。

C　420 度－360 度＝60 度だから，60 度回転移動。

T　はい。他に？　／　C　1 回転と 60 度。

C　意味わかんない。

T　（OHP で，説明。1 回転して）これで，何度回転したの？

C　360 度。

T　（さらに 60 度回して）そしてこれで？　／　C　60 度。

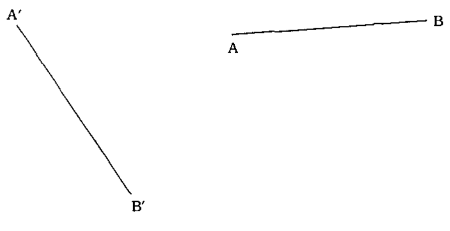
T　つまり，420 度。これで大丈夫だね。いいよね。
（黒板で）結果として，60 度回転と 420 度回転は同じになる。
（中略）

T　じゃ，余計なこと聞こうかな？　720 度回転移動は，どういう回転移動ですか？　みんなで。　／　C　恒等変換。

P. 15，16

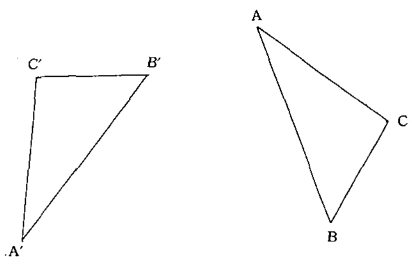
回転移動の中心をもとめる課題である。すなわち，O を中心として P を $\alpha°$ 回転移動した対応点を P′ とするとき（ただし P≠O），△POP′ は PO＝P′O の二等辺三角形になる（または POP′ は，半径 OP＝OP′ の扇形）。P と P′ からみて，回転の中心 O は，どのような位置にあるのか。これはまず，P と P′ から等距離の位置にあること，等距離の位置にある点はたくさんあること，それは直線であること，その直線は線分 PP′ の垂直二等分線であること，つまり，〈中心の点は，

［問題］　線分 A B を回転移動して線分 A′B′ を作図しました。
中心の点をさがしてください。



— 15 —

［問題］　△ABC を回転移動して，△A′B′C′ を作図しました。
中心の点をさがしてください。



— 16 —

対応する点を結んだ線分の垂直二等分線上にあること〉を導く。(これは二等辺三角形の底辺の垂直二等分線が頂点を通ることをも意味する。また円の弦の垂直二等分線が円の中心を通ることとも同じである)

さらに，対応点がひと組みでは，垂直二等分線を求めることはできても，中心の点を1点に限定することはできない。さらにもうひと組みの対応点とそれを結んだ垂直二等分線が必要であり，この2本の垂直二等分線の交点が中心点であることを導く。

定木やコンパスに限定せずに，紙を折るなどして考える。プランの図は両ページともに60°回転したものである。

〈授業の記録〉

この課題には，15ページに約2時間ぶん，16ページには約1時間が費やされた。

〈1時間目〉

15ページの1時間目では，次のような方法が発表された。一人目は「Aを中心に半径ABの円，A′を中心に半径ABの円をかいて，その交点が中心」という方法である(これは半径をABとする正三角形を書いたことになる)。そこで，授業者がAB＝A′B′, AB≠AA′，となるABとA′B′を，極端に離して黒板に書きなおし，この方法でできるかどうかを検討した。

T　　あれ，(半径ABで，Aを中心とする円と，A′を中心とする円が）ぶつからないね。

C　　距離ありすぎるんだよ。

T　　ありすぎたらだめっていう見つけ方あるの？　いいんですか
　　Bは？（BとB′からも同様に円を書いてみる）いかないよね？
　　図が悪いんですね，紛らわしい図で，ごめんなさい。

C　　最初にAとA′つないで，AA′の長さを，AからA′からとる。これでなった。

C　　60度の回転だから，正三角形。

T　　正三角形になるね。(たしかめ，OHPで）ぴたっといきましたね。
　　他の問題でもこういくかな？　／　C　　いかないと思う。

T　　じゃあ，15′ページを作ってきます。別の場合もこうなるか。

C　　違うやり方でやった。　　　(1時間目終了)
　　(15′ページを授業が作成，帰りに配布，宿題となった)

＊これは，次の理由による。課題の図が，求める中心の点とAとA′を結ぶと正三角形ができる。これは60°回転を想定した図だからである。さらにプランの図がAB＝AA′とみてとれるものだったので，ABを一辺とする正三角形の頂点を中心として求めたのである。図の不備である。さらに12ページから60°回転の課題ばかりを行なったので，対応点を結んだ線分を一辺とする正三角形の頂点が中心になることを強調したことになってしまった。プランの構成上の問題である。ただし，正三角形を書いて求めることのこの課題での妥当性を授業者が説明した後，「他の問題でもこういくかな？」ときくと子どもは「いかないと思う」とこたえている。同時に「違うやり方でやった」という子どももいて，続きは2時間目に15′ページでおこなった。課題では60°回転のみを取り上げていたが，他の回転角も取り上げて，対応する点と中心を結ぶと二等辺三角形ができることを，もっと早期に子ども自身が作図を通して知るように導くべきだった。プランでの作図の方法の提示(12，13ページ)，および授業者の強調もあったが，プランの構成上で，課題に60度以外の回転の作図を取り上げる必要性を示している。

〈2時間目〉

先の時間に宿題になった問題（15′ページ，15ページと同様に中心を調べる問題）に入る前にもう一度13ページの②の図を授業者が黒板で示し復習した。そこでコンパスや定木よりも，折るだけでもいいことを話すと，「折って見付ける」方法が発表された。

〈授業の記録〉

C　「まずAとA′を折ってくっつける。開いて，BとB′をくっつける，ひらいてあたったところが」

T　「あたったところを何というの？」　／　C　？

T　折り目が直線なんだね。2本直線ができる。あたったところを何というの？

C　中心　／　交わる

T　うん，「交わる」っていうね。

（AとA′が重なりあうように紙を折る方法である。できた2本の線は，線分AA′，BB′の垂直二等分線である（一度に線分AA′の垂直二等分線（直線mとする）を見付けることができる)。つづいて，授業者が，この「折って見つける方法」が何を意味するのか，折ってできた直線は何なのかとの問いかけから，次のように授業は展開した。

T　折るってことは，2本直線引くってことだよ。どうすれば直線引けるかって，そういう問題だよ。
ウン，それ難しいかな？　口でこたえて？　折った線ってどういう線や？　それを口で言ってください。この線はどういう線？

C　AとA′を重ねて折った線。

T　そうだね，「AとA′を重ねて折った線」ということは，開いてみたとき，どいう線になっているのや？　それを図形の言葉を使っていえば，どういう線なのですか？

C　わすれた？

T　AとA′を結んでみますか？（AA′を結ぶ）そしてAとA′を重ねて折りました。開きました。どういう線だ？　折れた線は？

C　<u>AとA′のちょうど真ん中の線</u>。

T　うん，ちょうど真ん中の線だね。ちょうど真ん中の線って，どういうことですか？　もうひとつすごいことありますね。　／　C　うん，

C　<u>そこの線の上の点にA，A′を結ぶと同じ長さ，長さ等しくなる</u>。

T　あなたが言ってることは，たとえばこうやるとこの長さとこの長さが同じになるっていうことだね。別のこと言ってる人いるでしょ？　これだけですか？

C　わかった，BとB′を結ぶと

T　BとB′はあとでやるから。じゃ，時間ないから，見えませんかこれは？（AA′と「真ん中の線」との交わるところに垂直を示すマークを付ける）AがA′にいったことだけ考えれば，とにかくこの直線lのどこかに中心があるってことだからね。これと似た図を書けば，どこか中心があるとすれば，とにかくこうなっているはずでね。AがA′にうつったことからわかるのは，直線lのどこかに中心があるってこと。
（直線l上のいくつかの点を例にあげすべて中心となりうること，これだけは線分ABを線分A′B′に移す中心は定まらないことを説明）
次にBB′を結んでみる。そしてどうにかして同じ長さになるような点，真ん中の点を探して，どこだかわかんないですよ，とにかく真ん中の点で直角に交わるような線を

探せばいいんでしょ。いちばん早いのは折ることだね。あ，あなた作図できた？（このあと，ひとり作図の発表をするが，意味が不明である）

宗生　適当なコンパスの長さとして，Aから円をかく。同じ長さでA′から円をかく，2つ交わったところを通して，線をかく。
短すぎると交わらないから，ある程度の長さで円をかく。
（Tが同様の方法でBB′の垂直二等分線も作図）

T　こんなかんじで引くのかな？　なぜそうなるのか，っていうのはややこしいから省きます。これで，ひし形ができて，対角線が，ちょうど真ん中で交わる。そしてここの所が直角になるっていう性質がある。宗生の方法でやるとこの長さとこの長さが同じになるのはひし形の対角線の性質で引ける。

*結局，回転移動の中心は，対応点からみると，その2点から等距離にあること，それは2点を結んだ線分の中心を通り，垂直であること，すなわち垂直二等分線上にあることが導かれた。その作図の仕方を説明し，対応する点ひと組みだけでは中心が定まらないことを説明し，線分BB′の垂直二等分線（直線nとする）も見付けてから，2本の直線の交点が中心となることを導いた。

〈16ページ〉

〈授業の記録から〉

15ページの方法を復習，折ってできた線は「垂直二等分線」と呼ぶこと，対応する線分（たとえば「ABとA′B′の線」（子ども））を一つとりあげ，線分AA′の垂直二等分線とBB′の垂直二等分線の交点を求めればいいこと，が導かれた。また15ページで折った線の意味が導かれたので，これからは「折ってやっていいことにしようね」ということにした。どのような方法で取り組めばいいかその方針をきくと「垂直二等分線のやり方をやる」こと，中心を求めるには対応する点の組が2組必要であるから「線分ABとA′B′をとりあげること」，三角形だから「CとC′の」垂直二等分線も求めること，などがでた。つづいてそれぞれが折って見つけた。

さらに，対応する線分の組が2組あれば中心を求められるにもかかわらず，3つめの垂直二等分線が先に引いた2本の垂直二等分線の交点を通る。このことをさして「3つもいらないんでない？　同じなんでない？」という発言があった。これは対応点2組があれば垂直二等分線が引け，最低2本あればその交点が見つかることを15ページで強力に印象付けられたからである。
*回転の中心を垂直二等分線の作図により求めることは非常に困難を要した。実際，「折って見つける」方法の意味がわかったらその方法で通してかまわない。一種チャレンジ的問題ではあるが，「折ること」で難しい作図の代わりになることは多い。だが，同時に「折ったことの意味」は考えなくてはいけない。困難を要しはしたが，対応点から回転の中心を見つける方法は理解されたといえるだろう。

P. 17

回転移動の性質を整理する。対応する点を結んだ線分の垂直二等分線が中心を通ること，回転移動が合同変換であること，である。

11ページにもどり，(1)が1回の回転移動で重なるかどうかを確かめる課題では，回転の中心の存在の有無で確かめる。

〈授業の記録から〉

回転移動の性質が整理され導かれた。問題では，まず11ページを最初にやったとき発表され

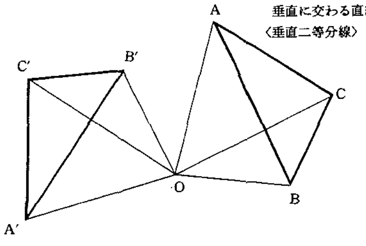
図形を回転移動すると

(1)　対応する点を結ぶ線分の垂直二等分線は（　　　　）を通る。

(2)

(2)から回転移動は合同変換の一つであることがわかります。

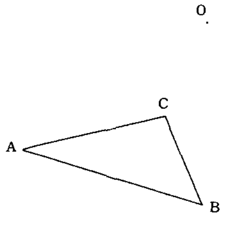
線分を二等分し，垂直に交わる直線を〈垂直二等分線〉といいます。



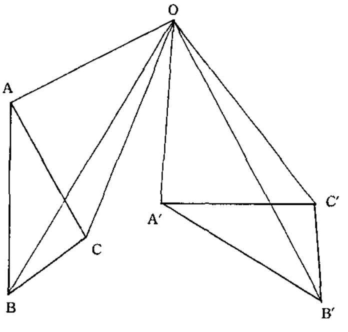
〔練習〕　11ページの(1)は，回転移動で重なりますか。

〔問題〕　△ABCを，点Oを中心に180°回転移動した△A'B'C'を作図してください。

△A'B'C'を△ABCにもどす方法を考えよう。



〔問題〕　△ABCを，点Oを中心に60°回転移動して△A'B'C'を作図しました。
△A'B'C'を△ABCにもどす方法を考えてください。



回転移動した図形をもとにもどす変換は

の回転移動です。

た方法を思い出した。それから「回転一発でいくかどうか，確認」した。大半が折って見つける方法で取り組んでいたが，「コンパスでやってもそうなる」など，折ったあとコンパスで確認する，三角定木とコンパスだけでやるなどの方法で取り組んだ。

P. 18，19

半回転は回転移動のなかでも作図が簡単である。これは対応する点と中心の3点が一直線上になることによる。半回転の逆変換は同じ中心の右回り，または左回りの半回転である。これを手がかりに，一般の回転移動の逆変換の法則性を探る。

・18 ページ

〈授業の記録〉

右回りにも左回りにも半回転すればもとに戻ることが発表されたが，その点について議論がなされた。

（18 ページの 180 度回転移動の逆変換について，一人目が発表したあと）

菊川　かずのやつだと，下に回転移転している。来た道を戻るから，これは 180° だから先に進んでももとに戻れるんだけど

T　他のこと考えたら，いった分だけ戻るって考えたほうがいいんじゃないの，ってこと？うん，じゃあね。180 度の場合にかぎり，もうひとつありませんか？　同じ向きと逆向き 180°。実は限りなくあるんですね。

C　A と A′ を合わせて，平行移動して。

清香　A′ B′ C′ を A′ を中心に 180° 回転移動して，平行移動する。

C　計算間違ってるかもしれないけど，540°。

T　うん，無限にあるんだね。つまり，

360°×□＋180°　　だね。　□のなかは 0 から無限。

C　30° でもかまわない？

T　やってみよう。（19 ページを配布）

菊田　2 つある。O を中心に右下に回すか左上にぐるっと回すか。

T　（板書）

はじめのへんかん

中心　O

回転角　60°

ですから，どっちまわりですか？　下まわりだと？　／　C　60°

T　上まわりだと？　／　C　300°

T　問題は，これの逆変換は，どんなのがあるんですか？

まず中心 O，回転角なんぼ？　実はいっぱいあるんです。でもまず大きく 2 つに分けることができるね。　／　山家　60°

T　どういうふうに？　／　C　逆に　／　逆向き

T　もうひとつは？　／　信田　300°

T　あとは？　あのあほなやつ（逆向き 60° に対して 60＋360×n° のこと）

C　逆向き 420°

T　そう。　／　菊川　780°

T　もうひとつのほう（300° のほう）は？　／　C　660°

T　　うん，こんなのめんどくさいから，中心の位置が同じで　（板書）

- 逆向き60°

  逆向き60°＋逆向き360°×□

- 300°

  300°＋360°×□

［問題］　△DEFを，裏がえさないで，平行移動で重ならない合同な図形△D′E′F′をかいてください。

△DEFと△D′E′F′は，回転移動で重なりますか。

— 20 —

同じ向きに合同な図形は，

- 対応する辺が平行なら，

  ＿＿＿＿＿＿＿＿で重なる

- 対応する辺が平行でないなら，

  ＿＿＿＿＿＿＿＿で重なる

— 21 —

P. 20, 21

正格合同変換のまとめである。裏・表の区別のつく色画用紙（B 6版くらいの大きさ）を各自に配布し，合同な図形を2つを切りぬく(△DEF，△D′E′F′)。それを裏返さずに平行移動で重ならない位置におき，回転移動で重ねあわせるかどうかを調べる。それぞれについて回転移動の中心を探すことによりなされる(紙面内，紙面外を問わず)。これは平行移動で重ならない同じ向きに合同な図形なら回転移動で重なることを示している。結局，同じ向きに合同な図形は平行移動か回転移動で重なることを導く。

〈授業の記録〉

（色画用紙を配布し，課題を説明）

T　　正三角形は，書かないで，特別な形でしょ。このとき特別だと思ったら困るから。

（子ども一作業）

T　　（子どもの方法をみて)あ～。頂点にコンパスで穴あけて線ぴっぱると便利だね。大樹が言ってたように，折って中心見付けられればそれでいいんだよ。いったら（回転の中心が見付けられたら）回転角が同じか確かめて。

（子どもは，「中心がある」，「ない」など口々に言いながら作業）

T　　菊田くんの△DEF はこうです。でたらめにおきましたよね。この三角形もでたらめにかきました。それから回転移動いくかどうかを確かめました。いきました。他にもいっぱいあります。それぞれ三角形もちがう。置いた位置もちがう。だけどどうやらどんな三角形も回転移動でいきそうだということですね。

ただし，これを（△DEF を平行移動した△D′E′F′ を黒板に作図）回転移動で移動させることができるかどうか，できますか？

C　　できない。

T　　D と D′，E と E′ の垂直二等分線，交わりますか？

C　　交わらない。

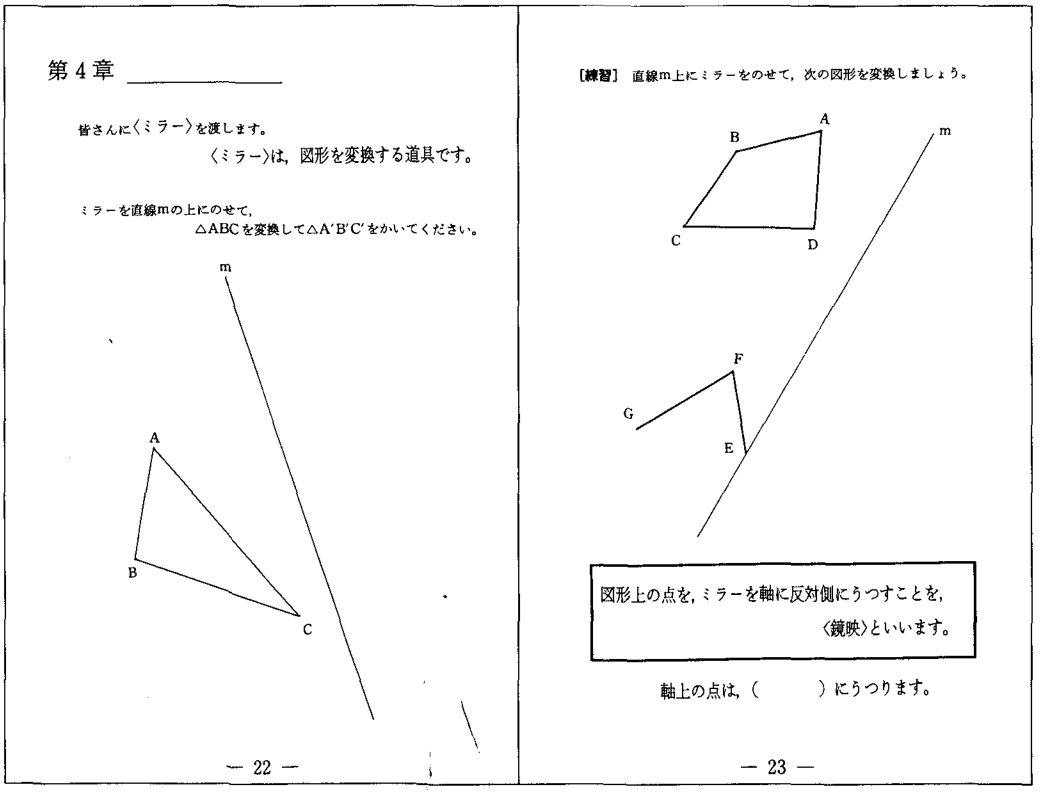
T　　うん。（もうひとりのプリントを示し，中心を確認）

はみだしそうだというひと？（21 ページを配布）

（「同じ向きに合同」という言葉は「裏返さないという意味だよ」と説明を加える）

＊子どもはそれぞれの場合について調べていた。中心が紙の外にいってしまったことを叫ぶ子どもや，見付けた子どもなど作業自体は意欲的に取り組まれた。平行移動で重なる図形は 1 回の回転移動で重ならないことも確認された。ただし 21 ページのまとめで，対応する辺が平行な場合は，平行移動だけでなく 180° 回転も該当するのだが，これは 17 ページでふれなかったので，授業では導かれなかった。回転移動で重なること自体は確認されたが(p. 20)，だから正格合同変換は，平行移動であるという認識に直結するのかどうかはわからない。

《第 4 章　鏡映》　(p. 22～30)


第 4 章 ＿＿＿＿＿＿

皆さんに〈ミラー〉を渡します。

〈ミラー〉は，図形を変換する道具です。

ミラーを直線mの上にのせて，

△ABC を変換して△A′B′C′ をかいてください。

— 22 —

［練習］ 直線m上にミラーをのせて，次の図形を変換しましょう。

図形上の点を，ミラーを軸に反対側にうつすことを，

〈鏡映〉といいます。

軸上の点は，（　　　　）にうつります。

— 23 —

〈4 章の内容〉 久蔵プランと同様にハーフミラーを用い，そのうつり方をもとに鏡映を定義する(p. 22〜23)。ミラーを用いて鏡映したり，軸を調べたのちに(p. 24)，ミラーを使わずに(ex. 折る，定木とコンパスなどを使った作図）鏡映し，その性質を調べる（p. 25〜28)。逆変換を考える(p. 28)。鏡映で自分自身に重なるいくつかの図形で軸を調べることをとおして，軸が対応点を結んだ線分の垂直二等分線であることを用い，軸を調べる（p. 29〜30)。

P.22，23

「変換の道具」としてハーフミラー（透明アクリル板—緑色に着色）を子どもに配布，それで「変換」する方法を説明し，実際に「変換する」—ミラーの操作に慣れること，今までの平行移動や回転移動との違いを考えることなどが目的である（p. 22)。

つづいて，いくつかの図形をミラーで「変換」し，その映り方をもとにこの「変換」を「鏡映」と定義する(p. 23)。ミラーで操作しながら鏡映とはなにかを考える。図中のＥの変換を考えることにより，軸上の点はそれ自身にうつることを導く。

〈授業の記録〉

（ミラーの操作を説明しながら）

T　まっすぐにたてる。真っすぐっていうのはどういう意味？　／　菊田　垂直

T　ウン，ｍの上に垂直に置く。そこでこうかく（各頂点をうつして辺でつなぐ）
　（ミラー配布）

C　面白い　／　C　浮かんでいるように見える　／　総　カンニングに使える

T　もとの図形とうつした図形どうなっている？

C　鏡に映したみたいになっている　／　C　立体的になっている

C　書いた線が緑色になる（ミラーが緑に着色されているため)，

C　ｍで（ききとれない）

T　晃くん，楽しいけど，気が付いたことは？　／　晃　ひっくり返した

C　4 章の名前は立体変換だ。

＊今までの変換と異なり，三角定木，コンパス以外の道具の導入に子どもは興味を覚えたようである。ミラーの役割が，操作の過程で導かれている。

P. 24

ミラーを使って軸をさがすことをもとに，鏡映の性質を調べる。

〈授業の記録〉

T　（ききとれない—男の子の名前と思われる）君の疑問は何だっけ？

D　真ん中に引けねえべ。

T　つまり，こういうふうにしてみるんでしょ。うまく重なるとこみるんでしょ。で，あとどういうふうにひっぱりましたか？

C　（図形の側からみて）手前　／　C　うしろ

T　他の人は？　美紀ちゃんは？　／　美紀　うしろ　／　C　いろいろ

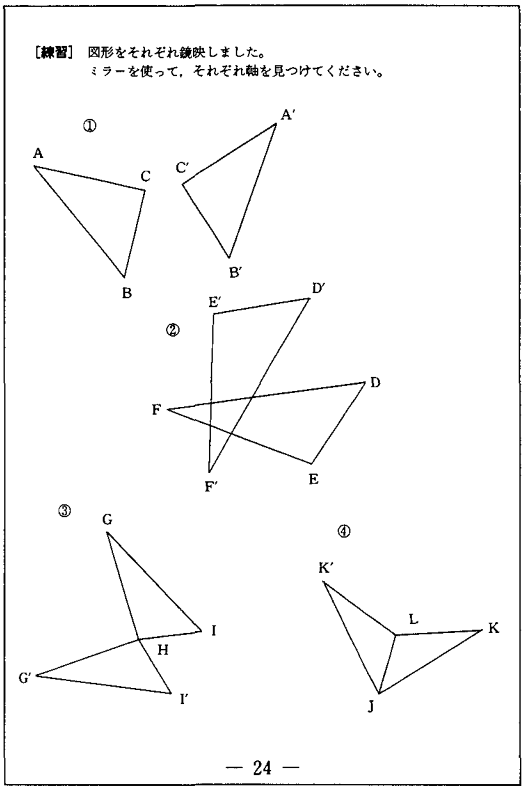
T　両方やったり，片方やったり？

C　真ん中にひっぱる。右やって左やって，真ん中になる。

C　ここにうって，ここにうって（ミラーの厚みの真ん中に印を付けて，結ぶ）

C　両方にひっぱってだいたいそのまんなか。

大樹　置いて，そのままにして，線のところにｍってかいて。



T　　要するに軸を鏡映の軸とこういうふうにしてミラーを使って求めることができる。あきらのさっききいてたことは何だっけ？

晃　　ダッシュついてないとこどうするの？

T　　①，②は大丈夫だけど，③の場合Hだけでダッシュないよ。これは大丈夫ですか？

晃　　同じ位置にある

T　　Hの位置にH′がある。みんなもそういうふうに考えてください。そこでちょっときいてみるけど，鏡映の軸はミラーがないとできない？

C　　できる　／　C　折って　／　C　できる

T　　できる人？　どのくらいいる？　あーかなりいますね。どうすればいい？

C　　だいたいまんなからのへんに，コンパスとかで。

T　　なんの「まんなからへん」？

C　　CとC′の（ききとれない）をはかる。

T　　何をはかるの？　まんなからへんていうのは，たとえば，点と点があって—，線分と線分があって—，？

C　　CとC′のまんなからへん，AとA′のまんなからへん，BとB′のまんなからへん。

T　　ウン，質問，AとA′のことなんていうの？　／　C　対応する点

T　　この言葉使うと便利ですよ。あとは？

C　　対応する点が重なるように折ればいい。

T　　はい，いいですか，AとA′だけが重なるように折ってみてください。

C　　折ったら全部あっちゃったよ。

C　　おれ，あわない。／おれ，あった。／ずれてる。
T　　かたいことというなー。
C　　不思議。
C　　あーわかった。全部が重なる。
T　　AとA′重ねたつもりだけど，BとB′，CとC′も重なっちゃうね。不思議だね。この不思議さは，どこからくるのだろう？
　　もうひとつ，対応する点で重ねて折る，折ってできる線をどういう線でしたっけ？
C　　鏡映の軸。
T　　ウン，今までやってきたなかで，なんていいますか？　／　C　　垂直二等分線。
T　　なんの？　／　C　　対応する点を結んだ線の。
T　　Bについてもどれも同じことといえるんですね。という面白い性質があります，ということで，話は次にいきます。

＊ミラーを用いて軸を探した後，それ以外の方法で軸を見付けることを通して，対応する点とを結んだ線分の垂直二等分線が鏡映の軸であることが，導かれた。

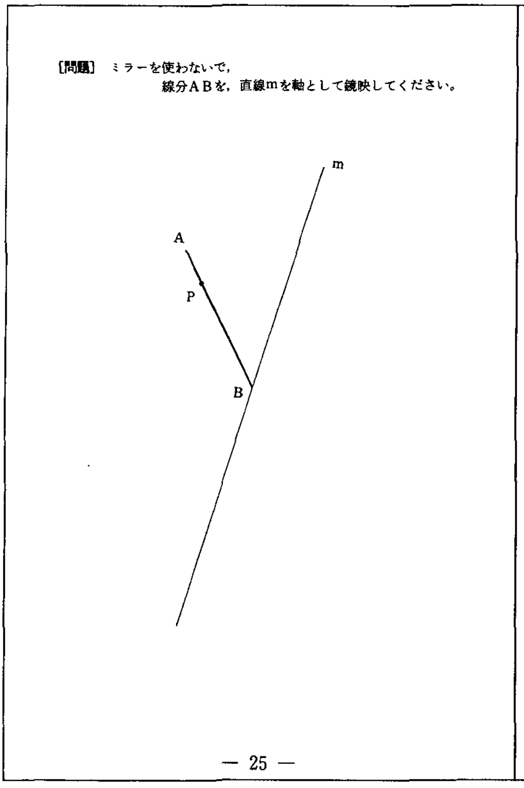
P.25

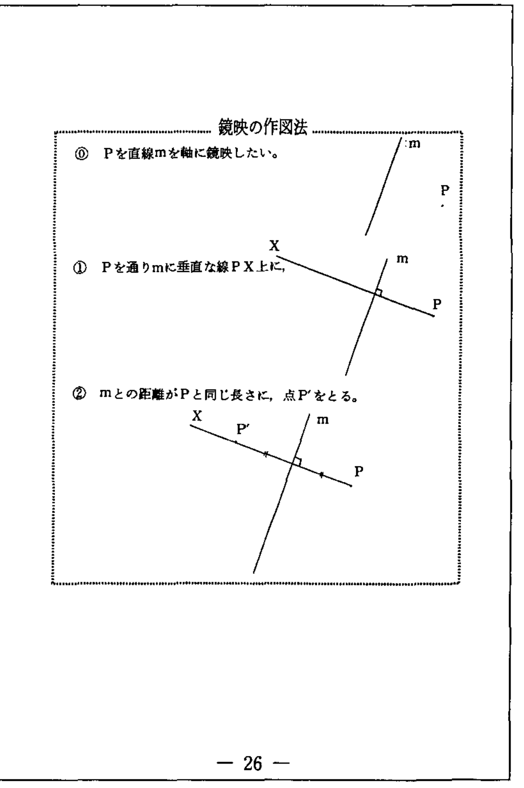
ミラーを使わない鏡映する課題である。線分上の任意の点が対応する線分上の点に移ることもここで示すことができる。

〈子どもの作図〉

授業で発表された方法は，以下の4通りである。

(a)　Bを通り，線分ABと軸mとのなす角度と同じ角度をなすような直線を，軸に関してABと





反対側にひく（直線①とする)。そしてAをとおりmに垂線を引き（直線②），①と②の交点が A′ である。

＊AB とmの交角が偶然にも 45 度であることに気付き，底角が 45 度の三角定木の等辺の片方を AB にあわせ，直角の先端をBにつけ，他方の等辺にそって直線 A′B をひく，という方法もあった。ただし，三角定木ではかることが可能な角度（45 度）にしたのは作成上の意図ではない。

(b) mを折り目にふたつに折り，重ねたままAの所にコンパスの先であとをつける。開くと A′ の位置に穴が開いている。

(c) Aを通りmに垂線，Pを通りmに垂線をそれぞれひき，軸との交点とA，Pまでの距離をコンパスでそれぞれとり，垂線上に交点とその距離だけ反対側方向に A′，P′ を取る。

(d) AB とmとの交角をはかり，Bを通りmに対して反対側に同じ交角になるように直線をひく。その直線上に BA＝BA′，BP＝BP′ となるような A′，P′ をとる。

＊プランではここで分度器を使うことは意図していない。が，分度器を用いて作図されたのは，鏡映で軸と交わる線分とでできる角が保存されることが，わかったためといえる。

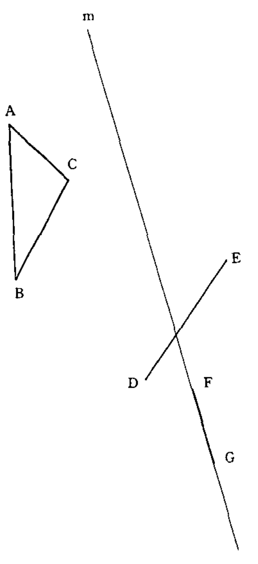
P. 26

鏡映の作図は色々な方法が考えられる，こういう方法もあるということを示している。

〈授業の記録から〉

前ページで色々な作図が発表されたが，「点を鏡映しなさい」という課題では，角度を使った（分度器を使った）方法ではできないこと，どんな図形でも 26 ページの方法なら鏡映できると説明した。前の時間の発表では，(c)の方法がこれにあたる。さらに，軸に対して垂線を引くと

［練習］ 定木とコンパスで，次の図形をそれぞれ，直線mを軸として鏡映してください。



— 27 —

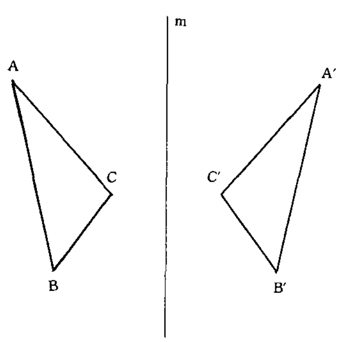
図形を鏡映すると

(1) 対応する点を結ぶ線分の垂直二等分線が（　　　）である。

(2)

(2)から，鏡映は合同変換の一つであることがわかります。

［問題］ △A′B′C′ を△ABC にもどす方法を考えましょう。



— 28 —

きは，三角定木の直角の部分を用いたほうがやりやすいことを，前の時間の子どもの発表をふりかえりながら説明を加えた。

P. 27

主に26ページの方法で定木とコンパスで鏡映する。軸上の線分 FG がそれ自身にうつることは，軸上の点が不動点となり，軸上の線分は不動点の集まりなので，それ自身にうつると考えることができる。

〈授業の記録から〉

軸mに垂直な線を引くのが難しい様子だった。△ABC の頂点を通り軸にななめに交わるように，かつ互いに平行な3本の直線を引いている子どもが数名いた。これに対して，授業者が両者を比較，「どちらが正しいか」と問いかけ，垂線の引き方を含めて作図の仕方を26ページの方法で再度説明した。

△ABC を鏡映することを，黒板で示し，続いて線分 DE，FG についても示した。

T　　FG は？　軸上の点は？　／　C　　軸上の点

T　　つまり，同じ位置。これはこのまま。

＊26ページの方法を説明して，27ページの課題に取り組んだあと，かけあしで28ページを配布したが（この時間内では28ページの下の問題まではいかなかった），なかなか課題を終える子どもが増えなかったことから，ほぼ20分くらい子ども各自の作図に時間をとっている。課題がそれほど多くはなかったにもかかわらず，このように時間がかかったのは，25ページで分度器を用いたものとは別な方法であり，理解しづらかったからであろう。25ページで分度器の使用を認めてしまったのが原因である。

P. 28

対応する点を結ぶ線分の垂直二等分線が軸であること，鏡映が合同変換であることを導く。さらに逆変換が，同じ軸での鏡映であることを導く。

〈授業の記録〉

T　　(1)，「垂直二等分線」が？　／　C　　mである。

T　　mって何だかというと？　この鏡映の軸だ。軸があって鏡映したけど，逆からいえばそういうことですね。（このあとテープ切れ）

（下の問題―逆変換を考える問題は，次のように導かれた）

T　　もともとの三角形は？　／　C　　ABC

T　　そこにかかわっている軸は？　／　C　　m

T　　△ABC をmを軸に鏡映したのが△A′B′C′ですよ。もとに戻す方法を考えよう。どういう変換ですか？　どういうふうにすればもとに戻るの？

C　　鏡映，もいっかいする

T　　どんな鏡映？　／　C　　反対に

（授業者が，鏡映の軸はどこにでも設定することができることを示す）

T　　ある一つの鏡映の逆変換は，なんで決まるかというと，最初の変換で使ったのと

C　　軸そのままにして，うつしたやつを反対にやる。

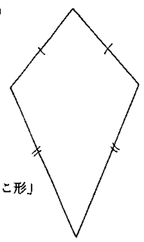
＊鏡映の性質，および鏡映の逆変換は，もとの鏡映と同じ軸でもう一度鏡映することであることが，導かれた。

P. 29

鏡映した図形をもとにもどす変換は
同じ直線を軸とする鏡映です。

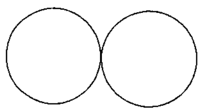
[問題] 図形を鏡映したら，自分自身にぴったり重なりました。
軸を見つけてみましょう。

①

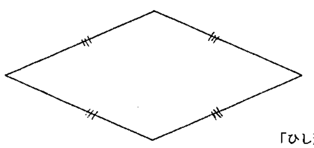


「たこ形」

②



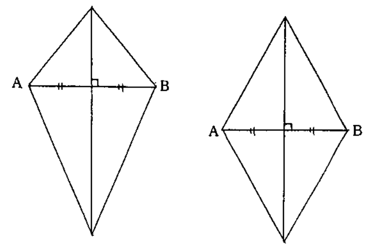
③



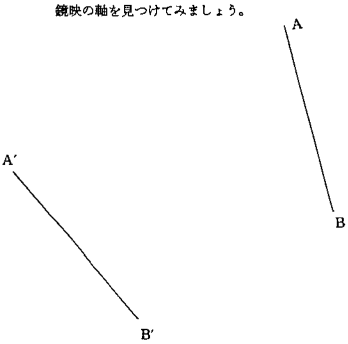
「ひし形のたこ形」

— 29 —

28 ページの①から，
線分ＡＢをもとにたこ形をかくと，
ＡＢの垂直二等分線がかけます。



[問題] 線分ＡＢを鏡映して，線分 A′B′ になりました。
鏡映の軸を見つけてみましょう。



— 30 —

鏡映で対称な図形―たこ形など―の軸をミラーで調べることにより，鏡映の軸の見つけ方，すなわち軸が対応する点を結んだ線分の垂直二等分線であることを導く。さらに１つの対角線（対称軸でないほう）からたこ形を作図する方法を見つける。これは，垂直二等分線の作図の仕方である。

〈授業の記録から〉

②で，１本の軸（共通内接線）は大半の子どもが見つけた。が，それに垂直に交わるもうひとつの軸をも見つけた子どもは 17 人だった。③は大半の子どもが２本見つけていた。軸を調べた後，さらにプリントの裏を用いて，対称軸でない対角線からたこ形をかく課題に取り組んだ。はじめ，授業者の勘違いから，対称軸からたこ形をかく課題をだしてしまった。授業者は，課題が不適切だったことを子どもに謝ったうえで，再度問題をだしなおした。

まず,「折るってことは, コンパスと三角定木でやると, 何をしたことになるんですか」,「折って線を作ったあの線は？」と，問いかけた。子どもは「垂直二等分線」とこたえ，その方法を授業者が示した。最終的に「垂直二等分線の引き方をわかってほしかったの，ひっぱっちゃえば，それでもたこ形だ，文句あっか，ですね。（垂直二等分線上にいくつか点をとり，線分とつなげてみせる）垂直二等分線のひっぱり方を確認しておいてください」と，まとめた。

＊授業者が課題の提示を誤ったため，授業で若干の混乱はあったが，今回の実践ではそもそも垂直二等分線の作図の方法は，回転移動の中心を求める問題（プラン p. 15〜16）で導かれているので，重大な影響はないといえる。

P. 30

たこ形を他図する方法をもとに，対応する線分から，鏡映の軸を調べる方法を導く。

〈子どもの作図〉

数人の子どもの口頭での発表を，授業者が黒板で作図しながら説明，軸が調べられた。以下の方法に集約できると思う。

(1) A′B と AB′ の交点（Mとする）と，線分 BB′ を底辺とする二等辺三角形の頂点を１点求め（Nとする），M，Nを結んだ直線が軸である

(2) 線分 AA′，線分 BB′ を底辺とする二等辺三角形の頂点をそれぞれ１点づつ求め，それらを結んだ直線が軸である。

(3) 線分 AA′ を底辺とする二等辺三角形の頂点を２点もとめて，それらの点を結んだ直線が軸である。

(4) A′B と AB′ の交点（Mとする）と，線分 BB′ に垂直でさらにMを通るような直線が軸である。

これらをみて，結局線分 AA′ の何を引きたいのかとの授業者の問い掛けに「垂直二等分線」を引きたいのだ，とこたえ，目標が明らかにされた。さらに，

T　「AA′ と BB′ の垂直二等分線は？」　／　C　「同じ」

と導かれた。

この後，もうひとつ作図の方法が発表された。

(5) 方法は(2)と同じだが，さらにこのどちらかの線分の一方を，頂点を２つもとめ，合計３点を結んだ直線が軸である，というものである。授業者は「不思議ですよね，考えてみると，なぜか一直線上にあるんですよね。当たり前のことでないんですよ。不思議なことなんです。どれに似てる？　あわせたやつだな？（(2)）の人たちと似てるね」と説明を加えた。

(6) AA′，BB′ の中点を見つけ（これはだいたいのところ），中点どうしを結んだ直線が，それぞれに垂直になり，軸である。

＊色々な方法が発表されながらも，それらが，すべて対応する点を結んだ線分の垂直二等分線を求めていることになることが，導かれた。あわせて，共線性などの幾何学の不思議さも，垣間見ることができた。

〈鏡映と垂直二等分線について〉

垂直二等分線の作図の方法は，プラン 15 ページにおいても導かれたから取り組みやすかったようである。回転移動での場合は，垂直二等分線を２本以上作図した上でその交点が中心になる一というステップがある。実際今回の実践では非常に苦労して作図していて，多数の線が混在することから結局折ってやることに統一している。鏡映の場合は対応する点を結んだ線分の垂直二等分線はすべて同一直線になる。つまり対応点ひと組みで軸は作図されるのである。そもそも垂直二等分線は鏡映の作図の原理の逆といえる。その直接的な関連が今回の作図を取り組みやすくした原因ともいえる。

《第５章　変換の合成》　(p. 31〜43)

〈５章の内容〉　1〜4 章で扱った変換の相互関係を変換の合成（積）により考える。変換の合成を定義し，２つの異なる方向の平行移動の合成を通して，合同変換の合成が一つの合同変換になることを導く（p. 31)。２つの回転移動の合成が回転移動になる場合を調べ（p. 32)，そうでないときがないかを考え（p. 33)，平行移動になる場合もあること，それが回転の角度の和に依存するものであること，を導く（p. 34)。２つの鏡映の合成が平行移動と回転移動のどちらかにな

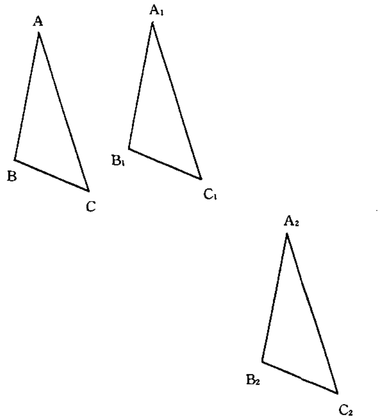
第5章　変換の合成

図形を2回続けて変換することを,
〈変換の合成〉といいます。

[問題]　△ABCが〈平行移動〉と〈平行移動〉の合成で
△$A_2B_2C_2$になりました。

△ABC $\xrightarrow[\text{(平行移動)}]{}$ △$A_1B_1C_1$ $\xrightarrow[\text{(平行移動)}]{}$ △$A_2B_2C_2$

平行四辺形をさがしましょう。



— 31 —

ること(p. 35), それぞれの規則性を調べる(p. 36〜40)。1回の鏡映で重ならない裏返しに合同な図形を重ねあわすこと(p. 41)などを手がかりに, 合同な図形は3回以内の鏡映で重ねあわすことができることを導く（p. 41〜43)。

P. 31

変換の合成の定義を示す。

異なるベクトルで続けて2回平行移動した図で, 平行四辺形をみつける。まず, △ABCと△$A_1B_1C_1$, △$A_1B_1C_1$と△$A_2B_2C_2$の対応する各頂点を結んだ線分により平行四辺形をみつけることができる。さらに△ABCと△$A_2B_2C_2$のあいだにも平行四辺形をみつけることができることから, △ABCを平行移動とすると△$A_2B_2C_2$になることがわかる。つまり, 平行移動の合成が1回の平行移動になることを導く。

〈授業の記録〉

T　　合成についてやりましたね。別なプリントで。

C　　オペーレータ[1)]

T　　倍の合成でやりましたね。

（T　問題読む）

どういう平行四辺形ありますか？　／　高橋　　ABA_1B_1

T　　いいの, それで？　／　高橋　　違う違う, ACA_1C_1, え？

T　　つまり, 四角形ABCDがあったとき, ABCDって言ってください。ABDCって言わないでください。つながっている順番で言ってください。高橋が言いたいのは？

高橋　　ABB_1A_1

T　　そうだね，他には？　／　賢弥　　BCC_1B_1
T　　はい，ありますね。　／　聡　　ACC_1A_1
T　　はい，これで3つあったね。　／　清香　　BCC_2B_2
T　　おーなるほどなるほど。　／　C　　それでもいいの，先生？
T　　全体で探してください。　／　C　　$A_1C_1C_2A_2$
T　　はい，あとは？　／　菊田　　AA_2B_2B　／　C　　わかった，
山崎　　CC_2A_2A
T　　順番にいこう。一回目の平行移動でいくつの平行四辺形が見つかりますか？
C　　黄色はもう。
（黒板では，$\triangle ABC$ と $\triangle A_1B_1C_1$ との間からよみとれる平行四辺形は，黄色で，$\triangle A_1B_1C_1$ と $\triangle A_2B_2C_2$ との間のは赤で，$\triangle ABC$ と $\triangle A_2B_2C_2$ の間のは，別な色で書いている）
C　　あと1個だけある　／　晃　　いや。　／　菊田　　ACC_1A_1
T　　何個ある？　／　C　　3つ　／　C　　それもう言ったんじゃない？
T　　はい，2つめは？　赤で書いたやつ。　／　C　　$B_1C_1C_2B_2$
渡辺　　$A_1B_1B_2A_2$
T　　ここでも3つありますね。これと（$\triangle ABC$），これ $\triangle A_2B_2C_2$ を見比べてると，3つありますね。
（板書

平行移動　3　　　　　　平行移動　3

$\triangle ABC$　→　　　$\triangle A_1B_1C_1$　　→　　　$\triangle A_2B_2C_2$

3　　　　　　　　　　）

T　　ところで，この太く書いた平行四辺形（ACC_2A_2）でいきますよ。どうしてこれ平行四辺形なのや？　そのようだよね。たぶん，結果的にはあたってるんですがなんでなのや？　そのまえに，ACC_1A_1 はなぜ平行四辺形なの？
聡　　$\triangle ABC$ と $\triangle A_1B_1C_1$ は平行移動だから。
（授業者，AC と A_1C_1 に平行の印を付ける）
T　　じゃ，これは（$\triangle ABC$ と $\triangle A_2B_2C_2$）平行移動したんじゃないの？
菊田　　$\triangle ABC$ を $\triangle A_1B_1C_1$ と動かしたでしょ。それを平行に下におろして $\triangle A_2B_2C_2$ にしたでしょ。だから，平行にしか動かしてないから，ABC からみても平行な位置にあるから，平行移動したと同じ。
渡辺　　$\triangle ABC$ が $A_1B_1C_1$ に動かして，さらに $\triangle A_2B_2C_2$ に動かして平行移動して平行移動したんだから，ABC と $A_2B_2C_2$ も平行移動になる。
T　　なるほど，あとは？　矢線 AA_1 の平行移動なんでしょ。そして，$AC /\!/ A_1C_1$，$A_1C_1 /\!/ A_2C_2$，だから $AC /\!/ A_2C_2$
ところで，AC と A_2C_2 の長さは同じかい？　だって，今やってるのは直接平行移動したんじゃないからね。AC と A_2C_2 の長さはなぜ同じか？
菊田　　ABC をそのまま平行移動して同じ大きさのままでまたその大きさをそのまま平行移動しているから，同じ長さ
渡辺　　別にそれは長さが同じというのは，平行移動だけじゃないと思う。なんでかっていう

と，合同変換と合同変換を重ねたんだから，最初のものと2回目の変換を重ねたのは，合同だ。

T　なるほど。

菊田　平行移動や回転移動では，2度変換しても大きさは変わらない。

T　結局平行移動と平行移動，最初と最後をみると，結果としては？

C　平行移動になる。

T　うん，で，これは当たり前のことではないんですからね。

＊平行四辺形をさがしたあとに，「なぜそれが平行四辺形なのか」との授業者の発問を契機に，平行と合同の推移律を用いて，子どもにより説明がなされた(下線部)。まず総の平行移動したのだから平行四辺形になるとの説明を皮切りに，菊田，渡辺が平行の推移律で説明。さらに「ACとA′C′の長さはなぜ同じか」との発問により，菊田が同じ長さ，同じ大きさのまま平行移動を2回しているから，結局同じ長さになることを説明，渡辺はそれに対し，「同じ長さになる」のなら回転移動もあてはまることを強調，そのうえで合同変換を2回重ねたのだから合同変換になる（つまり合同の推移律）ことを導いた。推移律は同値関係の一つを占めるが，非常に論理的に説明されたのは驚きである。

1）「オペレーター」とは，この学級で以前実施された指導プラン「倍と分布」（須田勝彦―楽しい学習プリント　道数協編集）で用いられたものである。たとえば3倍するのは「3倍オペレーター」をつかうことをさす。また2倍したものを3倍する，というように，倍を繰り返すのは「倍の合成」といい，2倍オペレーターと3倍オペレーターを1回づつ使うことをさした。

P. 32～34

2つの回転移動の合成を考える。まず，異なる点を中心とする回転移動の合成を考える。異なる回転角での回転移動の合成で1回の回転移動になる場合（p. 32）を調べ，いつも回転移動の合成が一つの回転移動になるかどうか吟味し（p. 33）平行移動になる場合もあること，回転の角度により分類できることを導く。さらに，同じ点を中心とする回転移動の合成は，回転移動になる（0度の回転移動を含む―または恒等変換である）ことを導く（p. 34)。

〈授業の記録〉　〈32ページ〉

T　どうなると思う？　／　C　回転移動で重なる。　／　C　中心の点がある。

T　どんな回転移動するんですか？

C　$\triangle ABC$と$\triangle A_2B_2C_2$の中心点をさがす。　／　T　さがしてみてください。

（授業者が31ページに戻り，平行移動の合成が一つの平行移動になったが，その合成の矢線を黒板に記入。同様に，回転移動は中心と回転角で決まることを，ふりかえって説明，回転移動になるということは，中心がどこか，角度はいくらか，を調べることが必要であることを説明した）

（子ども一回転の中心を見つける，プラン15ページに戻り，方法をふりかえりながらやる。折る，作図するなど，さまざま）

T　中心求められた人？　15人か。$\triangle A_1B_1C_1$はぬきにしていいね。AからA_2にいくには，どういうふうに回転移動したらいいんですか？　中心はどういうふうに作図した？

C　折った。

T　折るって，どういうことなの？　／　C　AとA_2を重ねた。

平行移動と平行移動の合成は,

・回転移動と回転移動の合成を調べましょう。

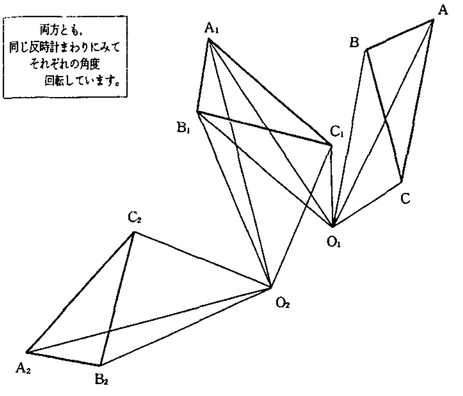
[問題] $\triangle ABC$が次の〈回転移動〉と〈回転移動〉の合成で $\triangle A_2B_2C_2$になりました。

$\triangle ABC$ ⟶ $\triangle A_1B_1C_1$ ⟶ $\triangle A_2B_2C_2$

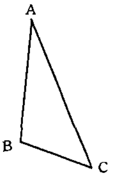
(点O_1を中心に 60°回転移動) (点O_2を中心に 90°回転移動)

$\triangle ABC$を$\triangle A_2B_2C_2$に重ねる変換を調べましょう。

両方とも,
同じ反時計まわりにみて
それぞれの角度
回転しています。



[問題] 回転移動と回転移動の合成で,
回転移動にならない場合をみつけましょう。

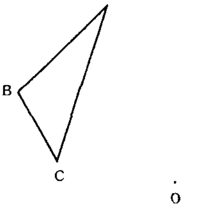


回転移動と回転移動の合成は,

①

②

[問題] 1つの点を中心にする, 回転移動の合成は, どうなりますか。



T　　それを何というかというと？　／　C　　対応した

T　　2つに折るってことは，どういうことなんですか？　／　C　　垂直二等分線

（授業者，垂直二等分線の作図の仕方を15ページに戻って説明，作図していない子どもに作図するように促すが，難しそうなので「折っていい」という）

T　　中心見つけた人？　折らないでやった人？　12人
　　ひとつは，中心を見つけられたから，回転だ。Oの位置については見つかりましたか？
　　回転角は？

C　　60+90で150度　(4人)

T　　次の配るプリントのうえには，$\boxed{\qquad}$があって，何があると思う？

C　　「回転移動と回転移動の合成は回転移動である」

（33ページ配布）

〈33ページ〉

T　　うん，そうだね，ところがそうはいかないんだよね。(問題よむ)

C　　自由でいいの？

T　　ただし，2回やって。(中略)―ヒント，色々な角度組み合わせて。

（子ども，各々作図で取り組む，この時間終了）

〈次の時間〉

（授業者がまず，1回目の回転は，何度でもいいからとにかく書いてみるよう説明，黒板では60度に回転したものを作図する。つづけて2回目の回転をするよう指示し，さらに少し時間をとる）

T　　昨日渡辺がいってたけど回転2回して回転にならないってことは，平行移動になるようにすればいいんだべ，んなこと言ってたんだ。

＊これは，21ページで同じ向きに合同な図形が平行移動か回転移動で重なることを分類したことによる。有効にもちいられた。

このあと，2人の作図を紹介した。

•山崎の作図；これは1回目の回転を図形外の点を中心に180度回転して($\triangle A_1B_1C_1$)，2回目の中心をA_1にして180度回転したものである。

•渡辺の作図；中心はどれも図形外の1点であるが，1回目が225度回転，2回目が135度回転。$\triangle ABC$と$\triangle A_2B_2C_2$の頂点AA_2を結んで，平行移動のベクトルも書き込まれている。

この作図をもとに，黒板で書いた1回目の60度回転の続きにかかった。

T　　O_2はどこでもかまいませんからね。これをどういうふうに回せばいいかというとどう回転すればいい？　山崎？　／　山崎　　120度

T　　ためしにやってみますか？　(授業者が黒板で作図)
　　ん？　これ回転移動でいかないか？　／　C　　いく。

（半回転であることがわかる）

T　　つまり，120度回転では駄目ですね。どうすれば回転でないようにできますか？　渡辺くん，どうすればいい？　／　渡辺　　300度

T　　これが，300度なら書きにくいからこれだと？　／　C　　60度

T　　うん，逆向きに60度。どうなりますかね。(授業者作図)
　　これは回転移動でABCから$A_2B_2C_2$にいくか？　回転の中心はどこですか？

AA$_2$，BB$_2$ の垂直二等分線は交わりますか？

C　平行だから交わらない

T　交わらないですね。平行か，本当か？　60 度回転で向き変わったでしょ。でも 300 度回転で向きとしてはもとに戻っちゃうんでしょ，ここ（△ABC）からここ（△A$_2$B$_2$C$_2$）にいくにはどういう変換ですか？

C　平行移動

（授業者，平行移動のベクトルを記入）

T　300 度にはどういう意味があるか？　別な言い方をしますか？　1 回目の回転が 90 度だったら，2 回目は何度回転になりますか？

C　240 度　／　C　えー。　／　C　270 度

T　なぜ 270 度なんですか？　たして？　横山さん，なんぼ？　／　横山　360 度

T　回転角が，たして 360 度になるように 2 回目の回転にするんだよね。そうするとあれま，結果は平行移動になる。回転移動させようと思って，垂直二等分線，平行になっちゃって，どこまでいっても交わらないから，回転の中心がないという話になりますね。結構難しいですね。どういうとき平行移動になるんですか。こういうことでしょ，回転角がたして？　／　C　360 度

T　に，なる。ただし，360 度だけですか。物好きがいて（ぐるぐる回す）ですから，360 度，720 度，1080 度，

C　0 度

T　ぐるっと回るんでなくて，戻る。こういうのをまとめて，「360× n 度」と。戻せばいいんですよ。45 度回転させたら，逆向きに 45 度回せばいいんですよ。戻してごらん。平行移動っぽくなったひと？，のかんじにすでに作れている人？　5 人，じゃやってみてください。次のプリント配るのやめにします。

＊作図には 1 時間以上かけたが全員作図しおわる必要はない。回転移動にならない場合は平行移動になること，それが 2 つ回転の回転角の和によること—つまり回転角が，たして 360× n になること—さえ，導ければよしとする。平行移動になればいいことは 1 時間目に渡辺が発言している（ただし，時間内ではテープのなかから聞き取ることはできない）。これは「同じ向きに合同な図形の重ねあわせ方」（p. 21）の整理が活用されたことを意味する。回転移動の合成が，回転角の和により分類されることが導かれた。それにしても，5 人もの子どもが自ら回転角を設定して平行移動になるものを作図できたこと（その他にもこの記録の後，作図を終えた子どもが数名いるようだが，人数は不明），なかでも 225 度回転と 135 度回転という明らかにたして 360 度になることを意識した作図は，非常に高度である。一般にこのような作図は小学生には望めないだろう。

回転移動の合成を考えるとき，まずは回る向きを統一して考えることにしてあるが（プラン 32 ページ），授業者自ら授業中に 300 度回転が逆向きに 60 度回転であることを発言した。これにより逆向きに同じ角度回す—「戻す」ことも該当することを示したことになる。これはあとで子どもが導きだすべきものである（実際子どもの発言はあった）。

〈34 ページ〉

（回転移動の合成について復習がてらまとめる。そのあと，同じ点を中心とする回転移動の合成を考える）

T　　自分なりにやってみてください。1回目もO，2回目もO。予想，どうなると思いますか？

C　　回転移動で重なる。　／　C　　Oを中心にして。

T　　それがすべてですか？　／　C　　平行移動

T　　どんなときですか？　じゃ1回目は60度でやってごらん。何度でもいいんでしょ。

（子ども作図中）

T　　回転移動になるのは明らかでしょ。それじゃ，平行移動になるの作ってください。

渡辺　できません。

（まず，授業者が60度回転と90度回転の合成を黒板で作図，合成が150度回転であることが明らかにされた。

T　　うん，150度回転だね。平行移動のとき，たして360度だね。

C　　重なる。

T　　重なっちゃうんだね。つまり，中心が同じ回転移動の合成は回転移動になる，または恒等変換。さっき平行移動ともいったね，長さ0。　／　C　　0度。

T　　回転角が0度の回転だともいえるわけですね。普通の平行移動の場合は，この場合でてこないというわけですね。

＊33ページで導くのに非常に苦労したので，34ページは活性剤の役目になった。さらに回転角の合計が360×nの場合，中心が異なるときは平行移動だが中心が同じ時は恒等変換である。しかし中心が同じときは前の分類から「平行移動になる」ことが予想され，実際に調べてみると恒等変換になることが導かれた。

P. 35〜40

異なる直線を軸とする鏡映の合成は，どのような変換になるかを調べる。まず，ミラーを使って，鏡映の合成が何になるかを自由に軸を設定して2回鏡映すると，回転移動か平行移動になる。両者の違いは，軸の位置によるもので，平行のとき平行移動，平行でないとき回転移動になることを導く（p. 35)。

軸が平行のとき，軸の間の距離がみな同じときは，軸の位置に関係なく同じぶんだけの平行移動になることを，予想することを含めて調べる(p. 36〜37)。さらに，軸に垂直な方向に軸の間の距離の2倍の平行移動になることのひとつの場合について導く(p. 38)。この場合，ベクトルを2本の軸の位置関係で表そうとすると，一般には，負の数，正の数の加法ができなければ説明はつかない。そのためプラン作成上では，38ページで37ページの①の場合のみを取り上げ調べる。いわば，特殊なものしか扱っていないので，説明しつくしたわけではない。が，37ページで①②③がみな同じ結果になるのだから，一つの論理がみんなの場合に共通するのだ，という認識をもてば十分である。

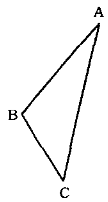
軸が平行でないとき，軸の交点を中心とする，軸の交わる角度の2倍の回転移動であることを導く(p. 39)。さらに，練習問題で同一直線を軸とする鏡映の合成は，恒等変換になることを確かめる（p. 40)。

たかだか3回の鏡映の合成ですべての合同変換を生成することができることを導く。

〈授業の記録〉　〈35ページ〉

T　　鏡映の合成，鏡映2回やってみてください。問題は，鏡映の合成は何になるんだろう，ということです。　／　C　　鏡映になる。

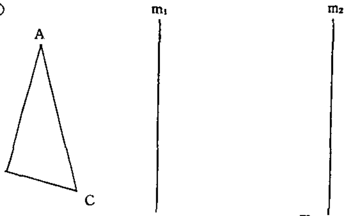
［問題］ 鏡映と鏡映の合成はどうなるか調べてみましょう。



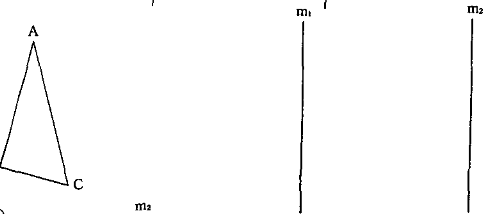
鏡映と鏡映の合成は，

直線m_1とm_2は平行で，m_1とm_2の距離はみな同じです。
△ABCを，直線m_1，m_2を軸として順に鏡映したとき，
どこに動くか予想した位置に$\triangle A_2B_2C_2$をかきましょう。

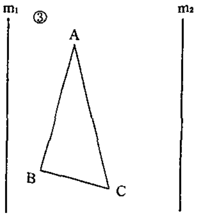
①



②

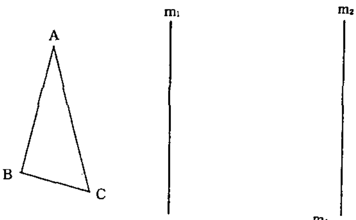


③

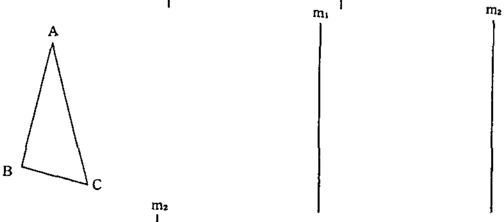


実際にミラーを使って，順に鏡映してみましょう。

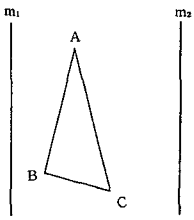
①



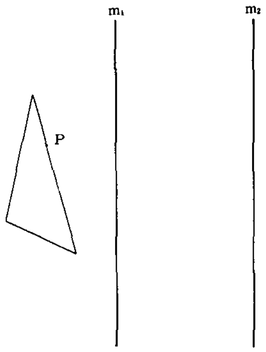
②



③



[問題] 定木とコンパスで，点Pを
直線m_1，m_2を軸として順に鏡映してみましょう。

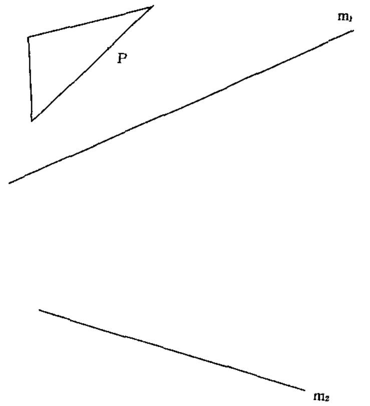


軸が平行のとき，鏡映の合成は，

（　　　　）方向で，

（　　　　）の距離の平行移動になります。

[問題] 点Pを，直線m_1，m_2を軸として順に鏡映して，
回転移動の中心と角度を調べてみましょう。

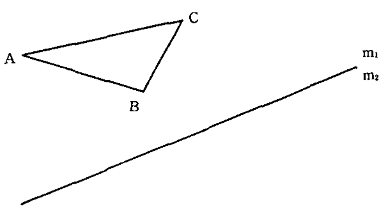


軸が1点で交わるとき，鏡映と鏡映の合成は，

（　　　　）を中心とする，

（　　　　）の回転移動になります。

[練習] 軸m_1，m_2が同一直線のとき，
鏡映と鏡映の合成を考えましょう。



T　　うん，そうか。

（一作業中一）　／　C　　軸は？

T　　軸をここにした，というのは鉛筆で書いてね。軸をどうかくかはご自由に。

C　　軸は変えるの？　変えないの？　／　C　　同じ軸で？

T　　鏡映は軸の位置で決まるやつでしょ。同じ軸でやってみるという場合があるんだけど，そりゃ特殊でしょ。特殊な場合だけ調べても何にもならないんですから，一般にどんなことがいえるかいえないか，を調べてほしいんですよ。そうすると1回目と2回目の軸が同じだとどうなりますか？　／　C　　恒等変換。

T　　うん，だからつまんないでしょ。　／　C　　はみだしたら？

T　　はみ出さないようになってください。まず1回鏡映して，他にまた軸を決めてやってみてください。

C　　できたー。

T　　菊田，最初からみて最後のやつは？　／　菊田　　回転移動で重なる。

T　　お，回転で重なる。あなたは？　／　C　　平行移動

T　　あなたは？　回転移動で重なりそうだというのは，見つけてくださいね。折ってかまわないから（中心を探すことをいっている）。

（板書）

鏡映の合成

①　恒等変換（軸が同じ）

②　回転移動

③　平行移動

人によっては，②だったり③だったりする。そこで，問題です。どういうときに平行移動になって，どういうときに回転移動となる？

（鏡映したり，考えたりしているうちに時間切れ，次の時間に持ち越し）

（次の時間）

T　　どういうときに平行移動になるんですか？

C　　1回目と2回目の軸が平行である。

T　　なるほど，それに対して，こっちは平行でない，ね。実際，自分のみてみて。軸が平行でないとき回転移動になってるね。

（板書）

鏡映の合成

①　回転移動（軸が平行でないとき）

②　平行移動（軸が平行のとき）

③　恒等変換（軸が同じ）

＊まずは1時間目で，鏡映の合成が恒等変換，回転移動，平行移動になることが，いくつかの作図で調べられた。次の時間，平行移動と回転移動になるときの違いは2本の軸が平行かそうでないか，によることが導かれた。

〈36ページ〉

（定木を使わないで，だいたいこのへんにくる，というのを書き込むことを指示した。右にはみ出すと思う人は「右はみ出し」，左にはみ出すと思う人は「左はみ出し」などとかくように説

明した。しかし丁寧に作図をはじめる子どももいたため，それらの作業をストップさせて，手を挙げてもらうことにして子どもの予想をきいた）

T　面白くない，予想してみよう。①，このへんだ，と思う人？（軸 m_2 の横あたりの位置），23〜24人。はみ出すと思う人？　0人

②，「右はみ出し」だと思う人？　20人。左はみ出し？　0人。どこかにおさまると思う人？　7人。（うち m_1，m_2 の間あたりを予想—3人）

③，「はみ出し」の予想0，紙におさまると思う人，かなりいるね。まんなかくらい？（軸 m_2 の右横あたり），19人，このへん？（さらに右横あたり）5人。二度手間になるから，ミラー使っちゃえ。

（このあと，37ページを配布した）

〈37ページ〉

（子ども，作業中）

C　②のやつ，m_2 のやつでやっても，はみだしたよ。

C　やり方が違うと思う。　／　C　わかんない。

C　みつかった！　／　T　待ってろ。おまえ最後にいえ

（黒板に，①②③とも $\triangle A_1B_1C_1$ を作図しておく。①はさらに $\triangle A_2B_2C_2$ も）

T　終わった人は，法則をさがすんですよ。

T　①，②，③の $\triangle A_2B_2C_2$ は，全部同じ位置にきてますね。ということがわかった。他になにか見つかった人？　なぜここにくる？　平行移動ですから，ここからここにきたんですよ（ベクトル AA_2 をかく），矢線で書けば。どういう理屈があるか？

山崎　軸が全部同じ幅で，①②③の，そして平行。

T　うん，軸が全部同じ幅で平行だ。

菊田　軸が平行になっているから，矢線にそって平行になる。

C　m_1 と m_2 の幅の2倍の矢線がある。

T　でるんだねー。ほんとかよ。ここでわかるね。この長さとこの長さ（軸 m_1 とAの距離，軸 m_1 と A_1 の距離），同じなんだね。鏡映したんだもん。次のこの長さとこの長さ（同様に m_2 と A_1，m_2 と A_2 の距離），同じなんだね。こっちでもいえるね。

（説明は途中でおわる—①はたし算ですむが，②はひき算をしなければならず，①より複雑であるため，説明つかなくなり，やめた）

つまり，このときにどれだけ平行移動するかというと，なんていえばいいの，「軸の位置に関係なく」，軸の？　幅の2倍だけ移動する。36ページにかいときなさい。すごい理屈があるんですね。

＊軸の間隔の2倍の平行移動になることの発言がこの時点ででてきた。この時点で，38ページを配布して，最後の授業者の説明を38ページから示した方がいいだろう。あるいは，もしこの発言がでたら，38ページをカットし37ページの①から2倍になることを整理し，「あとも（②，③）同じ」としてかまわない。①の場合は上記のように説明を付けられるが，②の場合，平行移動の距離はたし算だけではなく向きのともなう（あるいは「負の数の」）たし算を要する。小学生には一般に説明できないだろう。

〈38ページ〉

（問題に取り組んだ後，下の空欄についてもう一度考える。37ページをやった次の時間である）

T　方向はどの方向に移動するの？　矢線でかくとこういう平行移動なんだね。
（授業者，黒板で PP_2 を直線で結ぶ）

C　まっすぐな。　／　C　平行に

T　何に？　／　C　矢線に

T　平行移動なんだから，当たり前ですね。　／　山崎　m_1，m_2 の軸に垂直な

T　そのとおり，鏡映だから軸で考えるんだね。ピンポンピンポン。あとは？　この矢線の長さ，なんていいますか？　実はやっちゃったんだね。

菊田　軸の幅の２倍の長さ。

T　そうだね。

渡辺　m_1，m_2 に垂直な方向っていうとさ，正反対になるかもしれない。

T　ああ，こっちの方向もあるってことね，だから正確でないんでないのって？　実は正確な話しすると，m_1 からみて m_2 側なんだね。何いってるかっていうと，
（m_1，m_2 をいれかえて，Ｐを順に鏡映してみせる―P_2 は正反対の位置にくる）軸に垂直で反対側に平行移動するんだね。つまり，m_1，m_2 に垂直な方向というと，あっち側もこっち側もあるってことだね。ま，かたいこといわないで，つっこんでいえばこうだけど，ま，いいやこんなとこでいいや，ということにしましょう。

＊軸に垂直で軸の幅の２倍の平行移動になることが，導かれた。さらにひとりが m_1 と m_2 の軸の位置がひっくり返ったら，反対方向になるので，「垂直な」では正確さに欠けることを指摘した（下線部）。プランでは課題として軸の向きまでは扱わなかった。子どもにより導かれたのはすばらしいことである。このような問題提起があれば，可能なかぎりその意見を生かしたまとめにすればよい。一方，気付かなくてもさほど問題はない。必要なことは，鏡映の合成で平行移動になることがあること，さらには軸の位置から平行移動のベクトルを決めることができる，ということが分かればいい。

〈39 ページ〉

T　これもやってあるようなもんなんですが，やってみましょう。
（子ども―作図）
回転だっていうのはわかりますね，中心はどこですか？　折り返しで見つけてください。（ここでチャイムがなる）
どうも m_1 と m_2 の交わるとこらしい，回転の角度は，ま，いいや，やめっか。

（次の時間）

T　Ｐと P_2 を重ねあわせて見つけるんだね。これはどういうことかというと，Ｐと P_2 の垂直二等分線を引くってことなんだね。
（授業者が黒板で作図）
このどこかにあるのは確かですね。よくみるとこうなってますね。も一カ所やってみないとわかんないかな？　回転移動の中心どこにありますか？　面白い結果でたでしょ？なにか気が付いてませんか？
（授業者あちこちみてまわる）　りかちゃん，自分がやったこと何がわかりますか？じゃ，も一回いうよ。Ｐが P_2 にうつりました。軸が平行でないから回転で移ったんですね。Ｐだけ２回鏡映したわけですが，で，これはＰと P_2 を結んだ垂直二等分線なんですね。このどこかに中心があるんですね。今までのやり方だともうひとつ点いるんだね。（図

形の１頂点を２回鏡映し同様に垂直二等分線を作図）これとこれの交わったところなんでしょ。この点はどういう点なの？(子どものプリントみて)回転の中心はここだっていうんでしょ。ここは何？　どうしたのかな？　ま，いいや。(黒板で，軸 m_1，m_2 をそれぞれ交わるまで延長する)。こういう図かいた人？　軸をのばした人？　そして垂直二等分線がその交点を通る。つまり，どういうことですか。Pを P_2 に変換する回転移動の中心はなんていえばいいんですか？　福原さん？　これはこういうことでしょ。これはB（三角形の１頂点をBとしている）もここに（B_2）なんでしょ。この点はどういう点ですか？　何のうえの点ですか？　こんなこと簡単だべや。

C　m_1 は PP_1 の垂直二等分線ののばしたやつで，m_2 は P_1，P_2 の垂直二等分線ののばしたやつで，そのぶつかったところ。

T　今の言い方で気になるのは，PP_1 と m_1 とどっちが先にあるのですか？

C　m_1

T　うん，m_1 や m_2 のことなんていうんですか。　／　C　軸。

T　うん，そういうこと。m_1 をのばして m_2 をのばして交わるところがここなんだよね。軸ってもともと線分じゃなくて，直線なんだよね。でもめんどくさいからのびてるつもりなんだよね。

(35ページを復習，２本の軸が平行のとき平行移動になるが，それをもう少し詳しく調べた―つまり２本の軸のもつ情報からどのような平行移動になるかを調べた。だから軸が平行でないときも，軸の情報から調べていることを説明。もう一度，黒板での作図を説明，軸の交点が中心になることを授業者がまとめた)

はい，角度は，どれだけ回転してるの？　(PO，P_2O を結ぶ) 何か面白いこと見つかりませんか？　じゃ，色々かいてみましょうかね。なんかみえませんか？

山崎　(ききとれない―授業者がそばにいってボソボソきいている)

T　あとは？　どれくらい回転してる？　何も法則ないんですか？

山崎　m_1 と m_2 の角度の２倍。

T　どうして？

山崎　m_1 と m_2 が PP_1 と P_1P_2 の垂直二等分線になるから。

T　うん，そうだな。だから黄色のが白いのの２倍だっていってるんですね。なんでやねん。見えてきましたか？　何となく見えてきた人？　ことば足りないけど，正しいですね。たぶん。(PP₁ と軸 m_1 の交点をQとする)

渡辺　OP の線と OQ の線の角度と，OQ と OP_1 の角度は同じになってる。下のほうでもそれが同じ（軸 m_2 と OP_1，OP_2 の角度のこと）だから。

＊中心を探すことは比較的スムーズになされたが，中心が２本の軸の交点となることは，なかなか発言されなかった。おそらく，図がいりくんでいたのと，あまりに明らかすぎて何を発言していいのかわからなくなったことによるのだろう。これは，中心を作図して導くのではなく，中心がどこにくるか予想をたててから，確認するという流れにする必要を示している。たしかに回転の中心を見つけるには，１点（P）とその対応点だけでは無理である。だからそこ，その他の情報，つまり２本の軸に焦点を当て中心の見当を付けることを想定して作成したのだが，授業では今までやった方法でまず中心を探すことに取り組んだので，プランの意図からは外れてしまった。

〈40 ページ〉

授業では「軸が平行でない」という表現ですすめたのに，プランでは「1 点で交わる」とある（40 ページ)。その表現の違いに対応できないために反応が鈍いのかと授業者が判断，直線(軸）の関係（3 タイプ—①平行でないとき②平行のとき③同一のとき）を黒板に書き，次のように説明した。

T　（②をさして）こういう場合，なんていうの？　／　C　平行

T　うん，いいよね。これわかるでしょう。こういえば m_1 と m_2 をこの言葉使うと（①をさして）「平行でない」。②のときは，交点は？　／　C　ない。

T　うん。m_1 と m_2 が平行ってことは，「交わらない」ということ。（①をさして）これは，交わるんですか？　／　C　交わる。

T　何箇所で交わる？　1 箇所でしょ。これ延ばすとこれを「1 点で交わる」。「平行でない」という言い方は，「交わる交わらないといういい方」にしてもいいんですね。平行なとき，かならず交わらず，平行でないとき，かならず 1 点で交わる。だから（①をさして）軸って，直線のことですよ，軸が？

C　平行でない

T　ということですよ。実は表現は違いますが直線と直線の位置関係でしょ，同じことなんですよ。だから軸が 1 点で交わるってことは，平行でないってことなんですよ。（中略）それで，その下のところはもうやりませんね。やんなくたってわかりますね。（問題読む）前，やったんだよなちょこっと。どうなりますか。m_1 で鏡映しますね。でそれをもう一度 m_2 で鏡映します。

C　はじめのに

T　もとにもどりますね。この作図はわかっちゃってることなので省略します。（このあと，2 つの鏡映の合成がなにになるかを，軸の位置関係で整理した）

＊ 2 本の軸が，「平行でない」ことと，「1 点で交わる」ことが同じことを意味していることがわかりにくかったようで 40 ページ上部のまとめの記述に戸惑いがみられた。38 ページの表現で「軸が平行のとき」としたので 40 ページはそれと対応する表現で「軸が平行でないとき」とするべきだったのだろう。また，同じ軸での 2 回の鏡映の合成は恒等変換になることが導かれた。これは 35 ページの時点ですでに導かれていた。鏡映の逆変換を考えることと結果的に同じになるからである。

P. 41〜43

1 回の鏡映で重なりあわない裏返しに合同な図形を重ねあわすのは，3 回の鏡映であることを導く（p. 41）。平行移動，回転移動，鏡映，恒等変換した図形を重ねあわすのはたかだか 2 回の鏡映であることを導き（p. 42），これらをとおして合同な図形はたかだか 3 回の鏡映で重ねあわすことができることを導く（p. 43）。これはすべての合同変換が鏡映で生成されることを示している。ミラーを用いて行なう。

〈授業の記録〉　〈41 ページ〉

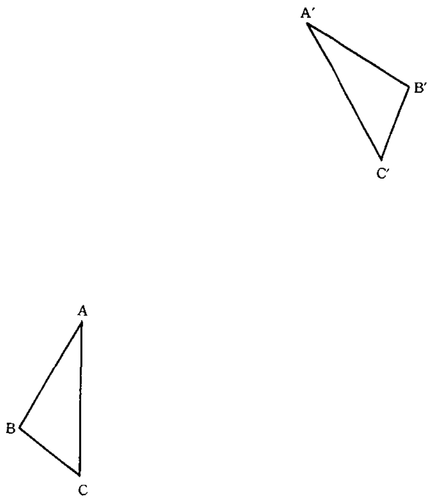
（課題をよみあげたあと）

T　ミラーを使うということは，何をするんですか。　／　C　合同変換

T　もうちょっとさ。　／　C　鏡映

T　うん，1 回でばっちりいきませんね。なんかとにかく△ABC を△A′ B′ C′ にもってっ

[問題]　△ABCと△A′B′C′は合同です。
ミラーを使って，
△ABCを△A′B′C′に重ねる方法を考えましょう。

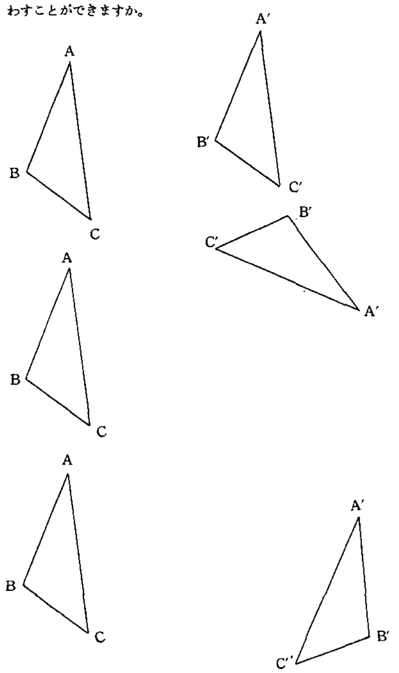


[練習]　△ABCと△A′B′C′は合同です。
ミラーを使って，何回の鏡映で△ABCと△A′B′C′に重ね合わすことができますか。

①
(　)回

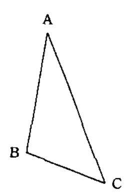
②
(　)回

③
(　)回



[問題]　△ABCと△ABCは合同です。
ミラーを使って，何回の鏡映で△ABCを△ABCに
重ね合わすことができますか。

④



(　)回

合同な図形であれば，どのような位置にあっても，
(　)回以内の鏡映で，重ね合わすことができます。

てください。やってみると1回でいかないのわかる，なぜですか？

菊田　向きが違う。(ひっくりかえすという意味で)

T　できるだけ少ない回数でもっていけばいいんですから。

(軸と頂点の名前は記入，1回目を$A_1B_1C_1$，2回目を$A_2B_2C_2$…とするよう説明)

(子ども，作業中―　3分くらいで重ねあわすことができた子が出始める)

T　何回でできた？　／　C　3回でできた。

(授業者はできた子のところにいって，作図を見せてもらう)

T　近付いていくけど，みんななかなかいきませんね。ポイントは何なんでしょうね。ただ，何となくやってみて，なんでこうなるんだろうな。A_2がA'にいくように調整したんだな。1回目，てきとう，2回目，$A_2B_2C_2$が$\triangle A'B'C'$にうまくいくように。(黒板で，おおまかにこどもの作図を説明)

〈子どもの方法〉

授業者がこの2つを取り上げ黒板で説明した。

(a)　1回目は適当に軸をとる。($\triangle A_1B_1C_1$)

2回目は3回目が1回の鏡映で重なる位置にいくように軸をとる。($\triangle A_2B_2C_2$)

3回目は，1回の鏡映。($\triangle A'B'C'$)

(b)　1回目は，AとA'がかさなるような位置に軸をとる。($\triangle A'B_1C_1$)

(これで，あとはA'を中心とする回転移動に相当する鏡映を2回すればいい)

2回目は，A'を通る軸　($\triangle A'B_2C_2$)

3回目は，やはりA'を通る軸。($\triangle A'B'C'$)

T　誰かが2回でできるっていったけどできますか？　／　C　できない

T　なぜ？

C　向きが反対になる。(2回鏡映したら，それは$\triangle A'B'C'$とは向きが反対になってしまうことをいっているようだ)

T　2回だとうらがえしなんでしょ。4回だと裏返しになるんだね($\triangle A'B'C'$に対して)。5回ならできますか？　できるね。

C　1回，3回，5回，7回…。　／　C　奇数ならできる。

T　そう裏返しの図形だからですね。裏返しでなければ，たぶん何回でできますか。

C　2回。

〈42ページ〉

T　(①向きがどうですか？　／　C　同じ

T　うん，向きが同じだと，偶数回だよね。これはどういう移動ですか？

C　平行

T　うん，平行移動ですね。どういう平行移動かというと(ベクトルAA'をかいて)，この方向にこの長さの平行移動ですね。これどうでもいいでしょ。軸かけばいいんでしょ。昨日黒板に書いたやつ，軸が平行のときには軸に垂直な方向に，鏡映の合成は平行移動だよね。平行移動になっている鏡映の合成。

軸が平行のときは，合成は平行移動になる。その反対というか逆の考え方ですね。軸平行に2本おけばいいんですね。1本目の軸，大事なのは，これをここに鏡映2回で，結果が平行移動になるときですから，この向きですから，軸は平行移動の方向に垂直

であればいいんでしょ。いいかげんにひきますか。先生はミラー使わないでもできます。これを m_1 にします。m_2 をどこにやればいいでしょう？

C　矢線の2分の1，どうやってはかれば？

T　どうやってはかるかわかんない。奥の手は，定木とコンパスでやる手もあるけどやめときましょう。(めもりをつかって)移動距離は6 cm です。m_2 をどこにおけばいいんでしょう？　／　C　3 cm。

T　どこから3 cm？　／　C　m_1 から

T　試しにみんなはかってごらん。きれいに半分この所でしょ。みんなはこんなこと意識しないでとにかく重ねあわせようとしたでしょ。でもなぜか移動距離の半分のところですね。

C　ぴったり6 cm だ。　／　C　先生，6 cm ないよ。

T　まあいい，(コピー機のずれであることを説明)
軸みごとに平行になってますね。みんなの2倍になってるってことは，逆にこうすればわかるね。(コンパスで m_1, m_2 の距離をとって，矢線にあてる―2倍分になる―$AA' = BB' = CC' = 2\,m_1m_2$ を示す)あーぴったりになった，そうなってますね。そんなこと意識しないんだけど，軸は平行移動の方向に垂直で軸の幅は移動距離の半分になる。つまり，ここの所なんてかくかというと？

C　2(回)

T　そして②のところはなんですか？　／　C　同じ。

T　もとの図形からダッシュの図形をみると，これは何になってますか？　どういう移動になってますか？　／　C　回転移動。

T　回転だって，わかりますか？　みんなはとにかく苦労してやったでしょ。先生は苦労しないでやります。　／　C　ぼくも苦労しなかった。

T　あんたも苦労しなかった？　はい，どういうふうに苦労しなかった？

C　ABC のAを A' にあうように鏡映した。

T　あなたがいってるのは，1回目の鏡映で頂点があうようにやったってことですね。

(このあと，授業者が，回転移動が2つの鏡映に分解できることを，軸が平行でない2回の鏡映の合成が回転移動になることを利用して，重ねあわせる方法を示した。まず，回転移動の中心を折り返しにより探す。この中心を2本の軸が通ればいいことを説明し子ども各自に，自分たちの軸を延長してこの交点を通っていることを確認させた。さらに $\angle AOA'$ が120度であることを調べて，軸の交角が60度であればいいことを実験的に示した。そのあと，子ども各自に，自分たちが書いた軸の交角が60度であることを確認させた)

T　つまり回転移動の場合，鏡映，何回になりますか？　／　C　2回。

T　うん，2回によって重なる。③は簡単ですね，みたら，？　／　C　鏡映。

(①～③のそれぞれの移動の種類を黒板でまとめ，何回の鏡映で重なるかをまとめた)

T　合同変換はこの3つで全部ですか？　晃くん？　／　晃　恒等変換。

T　そうです。恒等変換を鏡映でどうすると重なるか，ということです。

〈43ページ〉

T　何回ですか？　／　C　2回。

T　どういうふうに鏡映するの？

C　　好きなところで鏡映して，2回目は同じ軸で鏡映する。

T　　ポイントは同じ軸ですね。ただもっとセコイやつもいるかもしれないよ，0回とか，ヌハハハハ。

（板書―①　恒等変換
②　平行移動
③　回転移動
④　鏡映）

面白いことはこれなんですね。これらはすべて，恒等変換は鏡映何回？

C　　2回

T　　平行移動したやつは何ですか？　　2回

回転移動はやっぱり鏡映2回でできるんですね。鏡映は1回。あと，前のページでやった変なのがありますね。3回しなきゃできないやつがありますね。鏡映してから平行移動や回転移動だとごちゃごちゃしたやつ。

C　　鏡映，偶数。

T　　①，②，③，鏡映，偶数回，のんびり何回も何回もやっていくとそういうふうになりますが，一番少なくいくとこういうふうになります。ですから43ページの箱の中をなんて書くかというと，最大何回以内でできるだけ少なくしてできますか？

C　　4　／　C　　3　／　C　　4

T　　これがあるんでしょ，3回しなくちゃなんないやつだよ。すべて合同な図形はたかだか最大，1回でできるものあるし2回でできるのもあるしどんなヘンチクリンなやつでも，3回やればぴったり重ねあわすことができる。ということは合同変換というのは，鏡映だけで考えればだいたいすむんだね。

*すべての合同変換は3回以内の鏡映で生成されることが導かれた。

授業者が，鏡映の合成により，軸の位置関係で平行移動（ベクトルを含めて）と回転移動（中心と回転角を含めて）を生成できることを明らかにしたことを利用して，平行移動，回転移動を2回の鏡映の合成で表すことができることを示した。正の合同変換を鏡映の合成で生成するには2回必要であること自体は41ページの授業過程で予想された。

42ページの②で発見された1頂点をまず重ねあわす方法は，鏡映の合成による重ねあわせできわめて有効である。これは41ページで〈まず1回目の鏡映で1頂点を重せ合わす〉という方法にヒントを得ている。同様の子が①に関してもいたかもしれないが，ファイルノートを回収していないので，残念だがわからない。

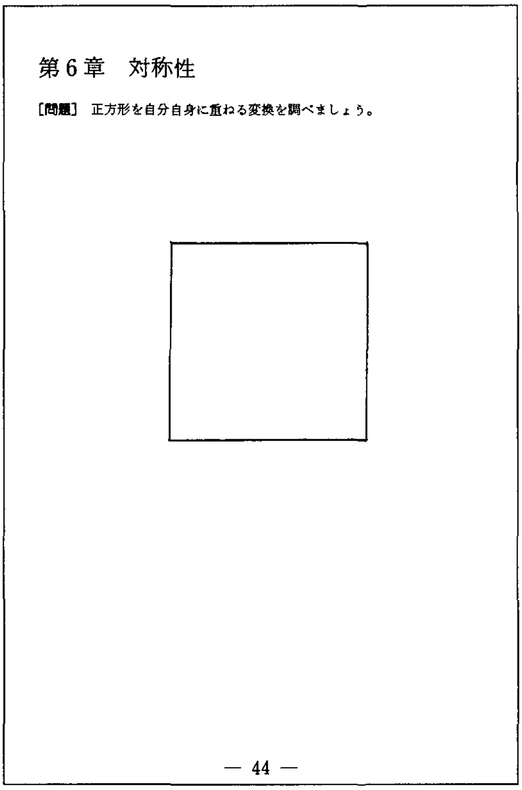
43ページの恒等変換を表す鏡映の合成の回数は，授業者が例として示した「0回」という意見を指示する声はでなかった。変換自体を何もしないことは，子どもにとっては変換をしたことにはならないことがわかる。これは「長さ0の平行移動」が恒等変換を示すことが理解されたこととは明らかに異なる。

《第6章　図形の対称性》　(p. 44～)

〈6章の内容〉　いくつかの図形で，その図形の回転対称性，鏡映対称性，併進対称性を調べる。

P.44

「正方形を自分自身に重ねる変換を調べ」ることを通して，形も位置も変えない（「自分自身



第6章　対称性

[問題]　正方形を自分自身に重ねる変換を調べましょう。

— 44 —

に重なる」)変換があること，それが合同変換でそれにより図形を調べることができることを導く。

OHPシート（プランの図一正方形一をうつしとれるぐらいの大きさのもの）を子ども各自に配布。鏡映対称性はミラーで調べることができる。回転対称性を調べるときはOHPシートに同じものをなぞってかき(水性ペンも配る一何度も消してはかける)，一方を固定し他方を回転させて重なる点を見つけたり，中心や角度を見つける。授業者はプランをシートにコピーし，OHPを使用。

〈授業の記録〉

T　　正方形を，今まで合同変換やってきましたね，この正方形を自分自身に重ねあわせるような変換をさがしてください。

C　　鏡映じゃないの？

T　　さ，どういうのがあるかな。鏡映の場合は，鏡映の軸を書いてください。回転の場合は，回転移動の中心を書いてください。他に○°回転というのがありますね。どこを中心に何度回転かということを書いてください。話はそういうことです。

(OHPシートを配布，使い方を説明する)

T　　いっぱい見つけてくださいよ。本当に限りないんだから，念のためにわけわかんなくなったら困るから，<u>頂点に名前をつけよう</u>。

(便宜上，それぞれの頂点に順にA，B，Cと名前を付ける)

(子ども一作業一5分くらい考えているが「わからない」という声が多い)

あー問題の意味わかってないのかな。自分自身に重ねるっていうのは，どういうこと

かわかりますか？　鏡映２回やれば，自分自身に重ね合わさるんでしょ。ただし１回で，ただ１回でポッと自分自身に重ねる。

C　だから，これ軸無いでしょ。どうやって～(聞き取れない)

C　いいな～いいな～。　／　わかんない～。

T　自分自身に重なるってことは，どうにかしたら四角形としたら同じものに重なるんでしょ。変換１回やってぴったり重なるようなやつ。

C　１回だけ？　／　え～わかんない～。

T　まず，鏡映からいくと，これでしょ。一つの鏡映は軸あれば決まるでしょ。軸１本かけばいいでしょ。(線分 AD と BC の中点を結んだ直線を一本かく)これ書けばいいんでしょ。先生言ってるのはそういうことなんです。

C　あと，平行移動。

T　重なる？

C　平行移動で長さ０，あともういっこ，地球のうえに重ねてグルーッと一回りする。

T　ま，それでも重なりますね。こんなの時間とりたいと思わなかったのにね。
ま，いいけど。一つは恒等変換ありますよね。あと，なにあるの？

C　回転移動／無限にある

T　無限にあるの？　回転の中心どこ？　／　C　うんとね。

T　あの，こんなふうに考えている人いるのかな？
(ここで，図形外の１点を中心に 360° 回転を示し，これは無数にあるが，恒等変換なので，あわせて全部T「しょせん恒等変換なんだ」と説明した)

C　AがBに重なるやつ。　／　C　対角線を引いて，そのぶつかったとこ。

T　ウン，そして何度？　／　C　90 度。
(ここで，OHP シートを２枚かさね，同じ正方形をかき，下のものを固定し，上のものを中心にコンパスの針を当てて，まわす。さらに，それぞれの頂点が，どこにうつるかを，調べる一同様に，180° 回転，270° 回転も調べた)

T　じゃ，あと 360° 回転したら？　これは？　／　C　恒等変換。

T　うん，あとは？　／　C　450 度

T　はい，結果をみたらなんと同じですか？　／　C　90 度

T　ウン，90° 回転と同じですね，だからこれも数えません。90° 回転を代表にします。だけどもこれは反対に回したのは，どれと一緒になりますか？

C　270 度

T　だから，回転移動については，この３つだけ。鏡映は軸わかってればいいね。これですか？　／　C　平行に　／　C　AD と BC に垂直二等分線。

T　ウン，そうなるね，変換したやつっていうのは，AがDに，BがCにいくね。これは回転移動とは違うね。大丈夫ですね。これが一つありました。
(さらに授業者がAB，DC にたいして垂直二等分線もあることを示す)
それと？　／　C　対角線，なる。

T　ウン，対角線そのものなんですね。軸が AC そのもの。AC があるから？

C　BD

T　ウン，これでもいきますね。全部で何個ありました？

C　　8つ（対称性の位数をさす　下の「板書」のア～ク）

T　　鏡映，回転，恒等変換があるね。平行移動なんてないですかね？
　　平行移動ありますかね。自分自身にかさなんないね。

（このあと，これまで出た8つの変換に「アイウエオカキク」と名前をつけた）

板書　正方形を自分自身に重ねる変換

ア・恒等変換
・回転移動
イ・中心（対角線の交点）90度　回転角
ウ・中心（対角線の交点）180度
エ・中心（対角線の交点）270度

・鏡映
オ・軸　AD，BCの垂直二等分線
カ・軸　AD，BCの垂直二等分線
キ・軸　AC
ク・軸　BD

ここで，「問題じゃないからね」と断ったうえで，エ（270度回転）をとりあげ，「たとえばこの変換を，鏡映だけでやってください」という課題をやってみた）

C　　合成してやればできる。

T　　ウン，できるんだよね。何をやってから何をやる？　（エの説明をして）これを鏡映2回でやってみよう。　／　C　　え，2回？

T　　3回ですか，これは？　3回しますか？

C　　2　／　C　　2回　／　C　　2

T　　3回しますか？　はい，何をやってから何をしますか？

C　　BDの対角線で1回鏡映して（板書のク），それからえーっと，DCの垂直二等分線で鏡映（板書のカ）。

T　　本当にできますね。（OHPシートでやってみる）できましたね，ABCDの順番で270°回転になりましたね。と，いう面白いことも遊べるというわけなんですね。

*対称性の定義を「自分自身に重ねる変換」としたとき，頂点に名前がついていればそれは恒等変換以外ありえないことになってしまう。それゆえ「正方形を自分自身に重ねる変換を調べましょう」という課題にして，正方形の頂点に名前を付けなかった。しかし実際に授業では授業者が便宜上，頂点に名前を付けてしまったため，課題として恒等変換の方法をきくものになってしまった。これによって，はじめ子どもに恒等変換を説明させる結果になってしまい，戸惑いのモトになった。が，恒等変換を探すことではないことが授業者より説明されてからは「AをBに重ねる」という発言等が出始めた。

P. 45

対称性の定義，および，いろいろな図形の対称性を調べる。対称性により図形を調べることができることを導く。

2枚のOHPシートにプランをコピーし，一方を問題ごとに切り離し，そのつどそれぞれの問題で回転対称性を調べるために用いる。鏡映の軸はミラーで調べる。

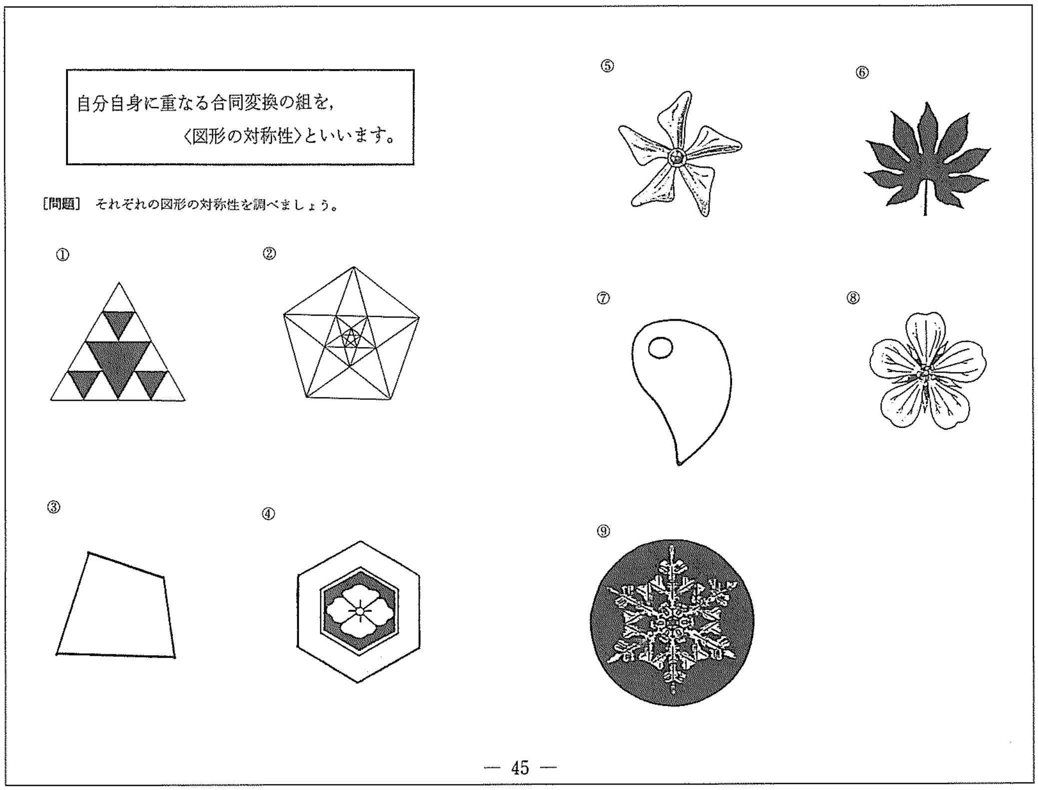
〈授業の記録〉

前の時間の終了時間近くに配布され「自分自身に重なる合同変換が何個あるか（対称性の位数）を調べる」という宿題になった。次の時間は「対称性が何個あるか」挙手してから，それぞれの図形を調べた。まず，恒等変換を一つ，鏡映の軸を書き込んで何本あるか，回転移動は中心と回転の角度の違いで，個数を数えた（つまり，90°回転と，180°回転，270°回転で「3つ」と数えるという意味）。

（①の図形は，次のように調べられた）

T　　対称性はいくつありますか？　／　渡辺　　4　／　C　　3

T　　恒等変換も1個に数えますか。



C　　4 ／ C　　3
T　　これを見つけたら，こうかいてくださいよ。（まず鏡映の軸を書き込む）
これ見つかるとあとは簡単ですね，これですね，もうひとつはこれですよ。これで3つ。あと恒等変換で4つ。えーほんと，あとないの？
C　　中心がわかんない。
T　　これで3つ。鏡映だけで3つあるんだよ。先生は(同じものをコピーしたOHPシート）これを使う。回転の中心どこ？　想像つきますね。鏡映の軸まえもって見つけてあった人何人いますか？（12人)実は，これの他に回転移動もあるんでしょ。回転の中心どこですか？
C　　（鏡映の軸の）3つの交わったところ
T　　ウン，3本の鏡映の軸が1点で交わってますよね。本当に重なるか。これちょっとづれましたが，何度回転したのよ，いま？
C　　120度 ／ C　　60度
T　　正三角形だから60度だね。
T　　だれかニャッと笑いましたね。60度ですね。 ／ C　　120度。
T　　ニャッと笑ってるんだから60度でないんですよ。
(OHPシートまわす)これで何度回転したんですか，ここからこう回ってたんでしょ。藤原くん，ここからここまで何度回転した？（回転角のところに印） こうやってみると，1／3だな。
（鏡映の軸の交わった点をOとし，頂点を結んだ線分で正三角形を分割，正三角形の頂点にABCと名前を付ける。△OABは，OA＝OBとする二等辺三角形になる）

ここ（角ABO）何度？　／　山本　30度

T　ウン，どうして30度？　正三角形だから，60度の半分。（角OABにも30度と記入）で，180−60＝120。

そこで問題をもどしますよ。つまり，一つは120度，回転はこれだけですか，もっと回して，120度よりもさらに120度回してぴったり重なりますね。これ何度回転？

C　240度

T　そうですね。あとありますか？　あとはこれやると，もとに戻る恒等変換ですね。①には，

（板書一問題①のところに

恒等変換	1
鏡映の軸	3
回転移動	2
	6）

全部で6つあるんですね。6で見つけた人何人？　（1人）

5（山崎），4（3人），3（9人）

美しいっていうのは対称性が豊かだってことですね。①だけ昨日やっちまったほうがよかったね。

このあと5分ほど時間をとり，①のように，各自，他の図形も調べるように指示した。

②の対称性を表す合同変換の個数を各自調べた結果（挙手による）は，

6つ；1人　8つ；6人　10：11人　11；2人　だった。

T　まず，何からいきますかね。恒等変換　1，鏡映は？

C　4　／　5　／　5　／　5　／　5

T　と，回転移動は？　ここんとこ線ひっぱっときますよ，回転移動させますよ。何度か知ってる？　／　C　72度

T　360度を5つに分けてますから，いや，72度ってどうやって出てきたの？

360÷？　／　C　5

T　これで？　（頂点2つぶんまわす）　／　C　144°

T　はい，3つめ，それは72度足すといいね。　／　C　216度

（4つめがさらに72度たせばいいことを説明「回転移動が4つ」とまとめる）

T　繰り返しますが，恒等変換を数えないこともある，いまは数える，これで11人の人が正解でした。はい，③番。いちばん簡単ですが。

C　1つ　／　C　まだある

T　なんや？　／　C　長さ0の平行移動　／　C　でも，それ恒等変換だよ。

T　そうだね。

（④の予想；

4つ；2人　5つ；1人　4つ（数名いるもよう）

C　4だよ　／　5だよ

T　これはいいんですか？　／　C　だめ，中の形あわない。

T　なぜ？　／　C　微妙に合わない。

T　中の形あわないんですよ，じゃこれは？

C　微妙にあわない。

T　じゃ，これ1個しかないんじゃないの，鏡映は？　／　C　まよこ

T　これですね。問題は回転移動。　／　C　これじゃ駄目なの？

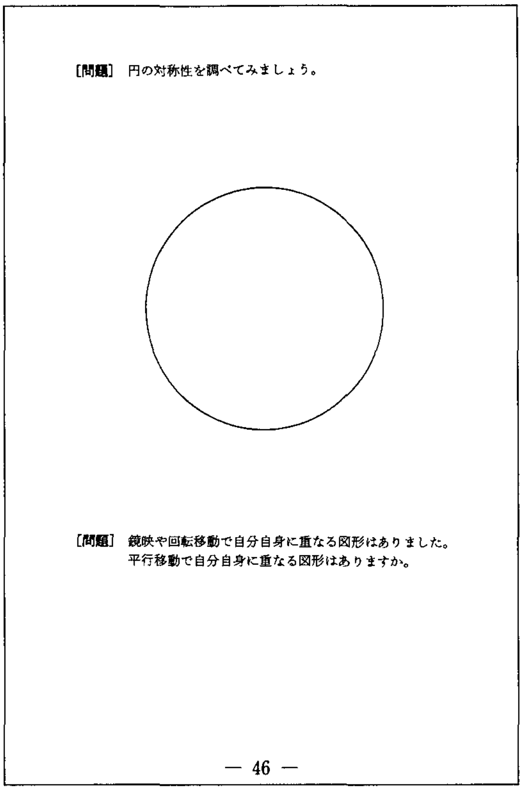
T　なぜだかわかるか？　中の模様だよ。　／　C　あー。
T　回転移動は？　／　C　1個
T　何度回転？　／　C　180度回転
（授業者がいくつかあわない変換を示す。このあと，少し時間をとり，やってこなかった人も調べる）
C　（⑤について）　5
T　5の人？　鏡映ありますか？　／　C　ない。
T　鏡映ないんですね。ひっくりかえすとこんなんなっちゃうんだね。こういうやつですね。何度回転ですか？　／　聡　90度
T　だいたい，1まわりの何等分なんですか？　一回りの5等分ですよ。
（対称性を決める変換が5つであることを記入）
T　⑥は恒等変換のほか，ま，これですよね。大体ですよ。これはさっきもいったけど自然の中にあるものですよ。つまりこれはいくつですか。
C　2
（⑦は「1」と授業者が説明）
T　（⑧）これはいくつなんですか？　／　C　10。
（授業者が同様に説明）
T　⑨ってなんだかわかりますか？　／　C　結晶。
T　はい，これはまずいつものように，⑨は恒等変換1，鏡映ありますか？
C　ある。
T　いくつある？　／　C　4
T　大体これ何に近いの？　／　C　六角形。
T　六角形っぽいやつですね。これで一つなんでしょ。予想たつ人？　あー13人。
C　6,　（10人）
T　6でない人？　／　C　4（7人）
T　はい,6になりそうだな。実際自然にあるやつをコピーしたから難しいかもしれないな。じゃ，回転移動は？　あ，この回転ですね。何度回転だ？
（60，120，180，240，300度―回転移動は5つ）
回転移動は，いくらづつありましたか？
C　5つ。
T　全部たすと，12。12って，書いてあった人？(5人)ま，図形が見えずらかったってこともある。12です。

＊③は家紋である。外形が正六角形で「対称性の数」は多くなるようにみえるが，中の花の模様に制限されて意外に少ない。ひっかけ的要素を含んだ問題であることを子どもに指摘され，見事にこの図形の対称性を導かれた。また⑤は，恒等変換の他には回転対称性のみである。鏡映対称性がないことも理解されている。⑨は「自然界の物だから」だいたいのところを考えるように授業者が説明しているが,原盤自体不鮮明であり,調べにくそうだった。全体的にはOHPシートやミラーを使って，興味深く取り組んだようだ。

P. 46
円の対称性の位数が無限にあることを導く。

〈授業の記録〉

T　円の対称性を調べてみましょう。
（黒板に
恒等変換　1


［問題］ 円の対称性を調べてみましょう。

［問題］ 鏡映や回転移動で自分自身に重なる図形はありました。
平行移動で自分自身に重なる図形はありますか。

— 46 —

回転移動

鏡映　　　　　　　　と，記入）

はい，なんぼですか，書いてください。（まず，鏡映の軸について）

C　先生，ちゃんと数えるの？

T　ちゃんと数えれるもんなら数えてみろ。

C　いっぱいある。

T　「いっぱい」ってどれくらいあると思う？

C　無限にある。

T　1000 くらいか？　1001？　1002？　あ，わかる？　こんなもん限りないの？　わかる？
もいっか。じゃやめっか。

C　いや，やる。

T　なるって？　やめるって？　じゃ，なんて書くのここに？

C　無限。

T　お，いいこと言ってるね，はい，これで 1 個，ほら，2 個，3 個，……
（中心を通りながらわずかずつ軸を回してみせる）
こんなもの 10 までやったら馬鹿だからやめるけど，なんて書きますか，ここに？

C　いっぱい

C　無限個

C　永久

C　永遠（とわ）

C　無限大。

T　じゃ，回転移動は？

C　回転はそんなにない。

T　回転はそんなにないかい？

C　あるってか？

T　回転は何個ありますか？

(このページをコピーしたOHPシートを2枚かさね，半径の線を1本目印にする―こうすると，どのくらい動いたかがわかり，なおかつ，重ね合わさっていることの両方がわかる)

はい，いきますよー。はい，0.05度回転（わずかに回転する）

やっぱり重なってますね。もう。　／　C　どこまでもいい。

T　どこでも，何度でもいいんですね。まぁこんなん時間かけてもしょうがないですけどね，つまりここはなんて書くんですか？

T　角，無限。　／　C　数えれるんなら，数えるの？

T　数えきれますか？

C　きれる／きれない／きれます／きれない

T　いま，0.05度と，言ったけど，もっと小さくしてもいいんでしょ。

C　0.000000000―

T　限りないんですよね。はい，全部あわせて何個ですか？

C　無限。　／　C　数えたくない。

T　はい，つまり円つーのはさ，円つーのはさ，対称性ということからみると，非常に特殊というか，美しい形なんだね，きわめて特殊なんですね。

C　先生，下の問題は？　／　T　あ，そうか。

(問題にうつる―問題読む)

今のところ，平行移動で重なる図形は出てきませんね，そういう図形は，はたしてあるでしょうか？　問題わかったかな？　今まで全部回転移動か鏡映か恒等変換だったでしょ。平行移動でぴったり重なる図形って，こうちゃん，あると思う？

C　あると思う。

(中略)

C　読んだら思った。

T　ウン，じゃ，どんな図形だったら，あると思いますか，さー発想の転換かもしれませんね。はい，どうぞ，思いつかないか？

子どもたち，ぶつぶつと，

C　はいー，　／　無限でー？，　／　わかった，せん，せん，せん！

T　何だってーお前言えー。　／　C　線。

T　百じゃなくて千？　うそだよね，線？　（シートに曲線をかいたのをさして）線？

C　違う。直線。

(授業者がOHPシートを2枚重ねて，直線をかきずらしてみせる)

T　これ？　平行移動？　重なるよ。直線ていうのはもともとなんですか？

C　限りなくつづく。

T　そうですね。限りなくつづきますね。でも我々は限りなくつづくふうにかけませんから，こんなふうにかいてるんだけなんだけど，限りなくつづいている直線。

(先程のOHPシートでもう一度直線どうしを平行移動して示す)

ずーっとつづいてるとしますよ。そしたら，この方向の平行移動，長さはなんぼ？

(ベクトルを記入）出ましたね。はい，ここで直線だけですか？

C　　線分。

T　　線分は駄目でしょ。自分自身に重なんないんだもん。どうもってったって，重なんないでしょ。線分は駄目なの。直線と線分の違いはなんでしたっけ？

C　　直線は限りなくつづいて，線分はとまる。

T　　ウン，そうだよね，それがヒントですね？　どんなの考えられますか？

C　　四角形の連続のやつ。(ここは，次の時間，無限に広がった方眼紙のようなものをイメージしていたことが，授業者の問いかけで示されている)

T　　？（ききとれない）　／　C　　線路。

T　　線路。いいセンスしてますね。あれも地球ずーっと1周りしてればいいですね。銀河鉄道999の線路もそうかもね。
(OHPシートに線路をかく)

C　　間の長さが等しい。(枕木と枕木の幅が等しいことをさしている)

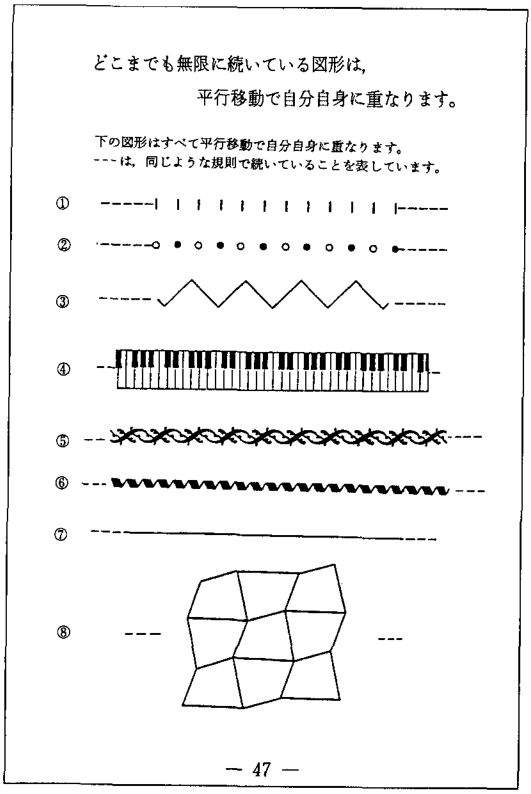
T　　そう，そう，そう。これだな，この平行移動だな。うーん。なるほど。みなさん，賢いです。そんなんですよ。平行移動でも重なる図形はあるんです。

＊円の対称性の位数が無限にあることが導かれた（下線部)。「無限にある」ことと「いっぱいある」ことの違いが授業表の発問を通じて徐々に導かれていった。併進対称な図形の存在の有無を問う課題では，「直線」や「線路」がそれであるということまで発言された（下線部)。併進対称性が無限とともに認識されていることを示している。一般にはこのような発言はたとえでなくてもかまわない。あると思うか無いと思うかにとどめてもかまわない。

P. 47

無限につづく図形で，平行移動で重なるものの例をいくつか示す。

授業では，OHPをつかって46ページと同様に同じものをOHPシート2枚にコピーし①，②，


どこまでも無限に続いている図形は，
平行移動で自分自身に重なります。

下の図形はすべて平行移動で自分自身に重なります。
---は，同じような規則で続いていることを表しています。

①
②
③
④
⑤
⑥
⑦
⑧

— 47 —

③と問題ごとに裁断，問題ごとに重ねてずらしながら方向や距離を調べた。子どもは44ページから使用しているOHPシートをそのまま使う。

〈授業の記録〉

T　ちょうど線路と同じですね。線路は続くよどこまでもと同じです。面白いですね。方向はわかりますね。
①の場合，どの方向にどれだけの平行移動なら自分自身に重なりますか。この点点々は，書ききれないから，……，大丈夫だよね。この，幅だけ平行移動，平行移動，平行移動(ずらしながら)。この方向ですね。矢線で表します。そしてこの長さです。いや，この長さでもいいです。(先に矢線の2倍の長さ)，この長さにします（＊3倍の長さ)，いいですね。
②，どういう長さですか？

C　白まるから白まるへ　／　C　白まるから黒まるに

T　「白丸から黒丸に」でいいですか？　／　C　だめ。白丸に白丸。

T　はい，これじゃ駄目ですね。ここまでいかなきゃだめですね。はい，③は？　四角形もあるよね，下にあるね，四角形っていうのは，方眼考えたんでしょ？

C　うん，

T　実は，どんなんでもいいんだねー，あとでやります，でもすごいねー。
はい，これはどうですか。「山から山へ」でいいですか？

C　てっぺんからてっぺん　／　C　それ，同じ人が手つないだらどうなるの？

T　同じ人だけで地球一周してか？
いや，この長さでも（山2つぶん)，この長さ（山3つぶん）でもいいですね。次のピアノ（④）はどうですか？　どのくらいの長さの平行移動ですか？

C　同じ音

T　たとえば？　／　(3)　ドからド

（中略）

T　鍵盤の数にして，何個ですか？
ここがドでしょ。(数えて)7つね。はい，これだけ，オクターブっていわなかったかそれ？　ここからここまでで，また2オクターブうえまで。
⑥をみると，どれくらい動いているかわかるな？　⑦はなんぼでもいいんだよね。

C　でも，太さ違うから。

T　それは，書くときズレたんです。問題は最後です(⑧)。何だよこれ，これ，本当になるの？　(ほぼ右方向に平行移動してみせる）あとないですか？

C　上。

T　いいですね。これは，かくのめんどくさいけど，ずーっと同じの続いてるってことですよ。

C　斜めの平行移動ってないの？

T　こっちがあるってことは反対向きもあるってことですね（左方向，下方向）これで全部ですか　／　C　あと，ななめ。
(ななめも，それぞれ反対向きがあることを確認する)

C　みんなの（今まででた方向で四角形一つ分の平行移動の距離）2倍もある。

T　ウン，それぞれの2，3倍とあります。

C　あと，反対方向の斜めのもある。　／　C　8方向。

T　つまり，上下左右，ななめ（4つ)，8方向ありますね。

さらに，エッシャーの作品一対称性を備えながら無限に続くことが容易に予想することがで

きるものを見せて，対称性を調べた。
＊平行移動の方向，距離などのいくつかが，導かれた。距離は，たとえば②では「白丸から白丸へ」（下線部）などの表現で発言された。①から⑦まで左右の方向のみをさすベクトルで示すことができたが，⑧は斜め方向もベクトルを見いだすことができる。「斜めの平行移動ってないの」（下線部）という発言が導かれ，その役目を果たした。2次元の方向に併進対称のベクトルを考えたことになる。それには「8方向の平行移動がある」こと，四角形1個ぶんの長さ，その2倍，3倍…となるはずだ，ということなども取り上げられた。前の時間をふりかえり，平行移動で対称な図形に「四角形」といった子どもは方眼紙を考えていたことがわかった。さらにOHPシートに四角形のしきつめ図をうつしさらに延長して書いている子どももいた。それぞれに興味が示された。授業者が使ったOHPシートのコピーしたもの（問題ごとに細切れ）を時間終了後に欲しがる子どももいた。

〈授業プラン作成にあたり，用いた図版〉

・ドリス・シャットシュナイダー『エッシャー・変容の芸術　シンメトリーの発見』　梶川泰司訳　日経サイエンス　*1991*
・『MESSAGE FROM M.C. ESCHER』No.①，②　甲賀正治コレクション　日本M.C.エッシャー著作権委員会　1986
・ヘルマン・ワイル『シンメトリー』　遠山啓訳　紀伊國屋書店　1970
・J・ローゼン『シンメトリーを求めて』　永田雅宣監訳　紀伊國屋書店　1977
・『形・フラクタル』『別冊　数理科学』　サイエンス社　1986
・マーチン・ガードナー『ガードナー数学ギャラリー　ペンローズ・タイルと数学パズル』　一松信訳　丸善株式会社　1992
・遠山啓『2次元の世界』　数学の広場No.3　株式会社ほるぷ出版　1979
・植田三郎・上垣渉『しきつめの幾何一中学校一』　国土社　1986

3　子どもの感想文から

実践終了後，個々に配布され課題に取り組んだ各自のプランとプリント全体をみながら，全体または個々について面白かったところ，わからなかったところ等，自由に感想を書いてもらった。以下，その感想文から各章ごとの内容について等の記述を抜粋する。全体または個々の部分のどちらかを含めて「おもしろかった」「難しかったけどおもしろかった」「楽しかった」「心に残った」などの記述が，提出した29名中28名にみられた。

(1)　序章について

「『世の中変わっても変わらねえものがあらあ！』で始まって何がなんだか分かりませんでした。そして時授が始まって，変化したのと変化してないのの所で私は思いました。『角度』と『角の大きさ』ではちがうのだろうか？と…！」（福原美紀）／「最初は形を変かんしてきました。変かんすることによって向きやいちがかわりました」（山家隆光）／「0章では変換でした。私はさいしょ変換の言う意味がぜんぜんわかりませんでした」そしてプリントをもらっていくほどだんだんもらってくほどわかってきました。変換のできないのと変換のできるのとでできるのとできないのではくべつがつきませんでしたが，もらっていくとわかってきました。次に合同変換がでて，これはわかりやすいのですぐにわかってきました」（佐藤美香）／「一番かんたんだったことは最初にやった，何が変化して，何が変化しないかという問題でした」（高橋里佳）／

プラン1ページの上部の絵の模写—せりふ付き「世の中，変わっても変わらねえものがあらあ」（高橋和信）

＊これから何が始まるのだろうか，最初は意味がわからなかったにもかかわらずだんだんわかってきた，との記述から，このプランの序章の役割をはたしたものとなった。

(2) 第1章　恒第変換について

「最初に『ぷりんと』をもらった時いみがわかりませんでした。でもだんだんすすんでくるうちにたのしくなってきました。とくに，おもしろかったのはやっぱり恒等変換です。プリントでは1ページで終わってしまったけどおもしろいとおもった」（菊池晃）／「最初は『やだなぁ』と思いました。でも，恒等変換で1Pしかつかわなかったのでオレの思ったよりむずかしくないなぁと思った時先生が1Pの部分はここだけだよといって『ガーン』と思いました（小野弘樹）

＊合同変換を構成する変換のうち，最初に，しかも1章ぶんとったことが，意外性とともにその面白さを予感させるに足るものとなったことがわかる。

(3) 第2章　平行移動について

「第2章の平行移動で一番心に残っているのは矢線です。矢線は移動するときの方向や長さの2つ意味しているのに私はたのしくなりました」（横山実佳）／「私が一番おもしろかったのは『平行移動』がおもしろかったです。それは，矢線どうりに動くことがよかったです」（村上千佳）

＊ベクトル（授業では「矢線」）が向きと距離のふたつの要素を含むことの，ベクトルならではの性質が理解されたといえる。

(4) 第3章　回転移動について

「（面白かったのは）『垂直二等分線』もかんたんなやり方でできたことです。次に難しかったことは『回転移動』です。回転の角度や点をさがすことなどのもとめ方（やり方）などが難しかったです」（村上千佳）／『回転移動』はむずかしくて図形を移動するときは，むずかしくてたいへんだった。中心の点をさがすのもなかなかみつけられなかった。平行移動で重ならない図形や回転移動で重ならない図形を書くのもたいへんだった」（蜂谷斐子）／「一番難しかったことは始めてやった時に，回転の中心をさがすのがとてもたいへんで難しかったです。でも今は算数Bの授業をうけてかんたんにできるようになりました」（高橋里佳）／「回転移動のコンパスでやるやつはさいしょはよくわかりませんでした。だから友だちや班の人にきいたりしてわかるようになってきました。でも折ってやったほうがかんたんなようなきがしました」（小沢彩香）／「回転移動は……線分を回転移動したりして私はむずかしくなってきました。それに回転移動をして作図の中心点をさがしなさい，なんてところはよくおしえてもらったりしました」（上石美加）

＊難しかったにもかかわらず，特に中心の見付け方などがわかったことの喜び，達成観が感じられる。

(5) 第4章　鏡映について

「最後に楽しかったのは「鏡映」です。軸をさがすことや逆にうつせることがよかったです」（村上千佳）／「鏡映はおもしろかったです。ミラーがあればかんたんにできました。……いちばん鏡映がおもしろかったです」（山家隆光）／「平行移動や回転移動は頭のなかがこんがりました。でも鏡映に入っておもしろそうだと思いました。最初のうちはおもしろかったけどじくをかけとかいわれて書いてみて，その上に軸をのっけたら重なんなかったのでむかついてきました。それでそのままにしといたら自分でもなっとくがいかず自分自身であたらしい方法を見

つけました。それで一ようできました」(小野弘樹)／「ミラーがあつくてせんのまん中にするのがたいへんでした。……ミラーをつかわなくてもじょうぎとコンパスだけでもABからA′B′を鏡映できることもはじめてわかりました(あたりまえだけど)」(小沢彩香)／「そろそろミラーをつかわないで軸を見つけなさいというのがありました。私は『えーそんなことできるのかなぁ』と思ったら定木とコンパスでちゃんとできました」(上石美加)
他に，阿部純子，蜂谷斐子など数名
*鏡映が負の合同変換であることへの興味，ミラーを使ったことおよびミラーを使わないでも軸を探すことを通して作図の方法を導いたことに対する興味があらわれている。

(6) 第5章　変換の合成について

「『変換の合成』はとてもむずかしかった」(蜂谷斐子)／「へんかんのごう成も泉(線)をひっぱって色々な形になりおもしろくなりました」(小野弘樹)／「第5章では……31ページの平行四辺形をさがしましょうというので，いろいろさがすといっぱい見つかるんだなぁと思いました」(小沢彩香)／「平行移動と平行移動の合成は平行移動になるや，回転移動と回転移動の合成は回転移動になるなど，今までやってきた合成のちがいを勉強しました。難しかったけれどよく考えてみたらおもしろくなりました」(村上千佳)「『第5章　変換の合成』の鏡映の合成ではとても不思議なきまりがでてきて，この授業が楽しくなりました」(渡辺宗生)／「鏡えいもミラーをつかったりしてやっておもしろかったです。鏡えいやいろいろな変かんもいろんなかんけいがありました。たとえば鏡えいの合せいはじくとじくが平行なとき，m_1m_2 のじくの間の2倍の平行いどうすることなどわかりました。もっとやりたかったけどたのしかった」(山崎勇一)／「平行移動，回転移動，恒等変換が鏡映一つでできることがわかった。変換の合成では，いろいろ合成できた。回転移動の合成は平行のば合，軸の幅の2倍のきょりの平行移動できる。この3つをわすれないようにしたいです。鏡映と鏡映の合成　I 回転移動(軸が平行でない時)II平行移動(軸が平行の時)III恒等変換(軸が同じ時)」(菊田政俊)／「合同な図形であればどのような位ちにあっても3回い内の鏡映でかさね合わせることができるということがすごいなぁと思いました」(沢田清香)／「ぼくはその中でいちばんおもしろかったのは，鏡映です。鏡映は恒等変換，平行移動，回転移動，を鏡映たった一つだけでできるのがとてもおどろきました。鏡映がいちばんふしぎな変換でした」(松平総)／「一番おもしろかったのは鏡映です。それはミラーとトウメイシートを使ってからです。ミラーで見ると図がさかさになってうつります。だから二回やらないともとのところにはもどらないのです」(信田淳一)
*変換の合成がひとつの変換になる，ということの不思議さ，およびその法則性，とくに負の合同変換である鏡映が合同変換を生成することに興味が示された。この授業書の目標のひとつともいえる。

(7) 第6章　対称性について

「対称性は，自然の中には，さがせばたくさんあることもわかりました。それと，恒等変換はどの形にもあることもわかりました。……人がかいた絵にも対称性があるということがなんとなく，すばらしく思えました。私は対称性には，なにか決まった絵，形(何か先生がかくしている)などと最初に思っていました」(髙橋里佳)／「ぼくが一ばんおもしろかったのは最後の方のいろいろな図けいのたいしょうせいをさがすやつでした。ふくざつな絵にも回転，平行，鏡えいなどいろいろな変かんがあるんだなと思いました」(山崎勇一)／「第6しょうのたいしょう生がいちばんおもしろくて勉強時間がもっとあればいいなぁなんておもった時もあります。

トウメイシートやミラーなどおもちゃをつかってやってよかったです。おまけ，トウメイシートにいんさつしたものをもらってうれしいです」(加藤恵美)／「私はこの算数がおもちゃをつかい楽しくできた。恒・鏡・回・平，この4つ，とくにさいごの4つをしらべたりするのだ，考えて，鏡映のじくをさがしたりしてだいたい6章あたりがよかったです。円のたいしょうせいもバカバカしくて，おもしろかったです。エッシャーさんのすばらしい絵でも4つのことがわかりただ1での方はきょうえいが0だった。きょうえいもあった方がよかったのに。きー」〔佐々木ゆき」／「ずけいの勉強はあとからどんどんおもしろくなってきた。とうめいしいとを使った所から，図形の勉強がおもしろかった」(高橋和信)／「6章は（プランの45ページの①の絵がある)のような図がでてきてたのしかった。(使ったものの絵がかいてある―ミラー，三角定木，コンパス，クリアシート，水性ペン，分度器)」(阿部純子)／「絵の対称性はとうめいシートでやっていろいろやりました。最初はぜんぜんわからなかったけどだんだんわかってきておもしろくなっていきました……。エッシャの絵はおもしろかった」(沢田清香)／「ぼくは算数Bをやって1ばんおもしろかったのは対称性です。いろいろなもようをみて鏡映・平行移動，回転移動などをさがすのはすごくおもしろかったです。貝やひとでのうつってる絵から平行移動をみつけるのがむずかしかったです」(今野賢弥)／「対称性」というのは，さいしょ意味がわからなかった。でも勉強していくうちにわかってきてよかった。いろんな図形がでてきて今度はむげんに広がっているすごい図形がでてきて，その対称性をしらべるのができたけどあまりよく意味がわからなかった。そして最後の不思議な絵（M. C. エッシャーの絵）では，おどろきました。最後は一番楽しかったです」(蜂谷斐子)／「円の対称性を調べたら，恒等変換―1，鏡映―無限個，回転移動―無限個でいっぱい。わたしは『うっそーすごい』と思ってばかりでした」(上石美加)他にも，第6章の対称性が面白かった旨の記述は，小沢彩香／信田淳一／小野弘樹／青木広太／渡辺宗生／横山実佳／佐藤広一／作山公介／菊田政俊／村上千佳の感想文にもみられた。

＊対称性に興味が示された感想文は非常に多い。鏡映，回転移動，平行移動をつかってこのように図形を調べることができること，さらには自然界にも対称性をもつ図形があること，ひいては，エッシャーのように対称性をもつ図形をかけることができることに対してたいへんな興味が示された。

(8) 全体を通じて

「変換は変換でもいろいろな変換があるということもわかりました」(高橋里佳)

「ぼくはこの勉強をして思ったことは最初は“図形”というものだったけどだんだんむずかしくなってきました。でも最後の方でクリアシートをつかったべんきょうはとってもおもしろかった。ぼくは平行移動や回転移動や鏡映とかは始めのほうはむずかしかった。でもなれてくるとたのしくなってきた。垂直二等分線が対称性とかいみがぜんぜんわかんないことばがいっぱいでてきたけどたのしかった」(佐藤広一)

「変換というものはおもしろいものだなと思いました。勉強というより，遊びというか未知の世界というか，少し，自分が物を見る目が変わってしまいました。今まで勉強した変換は，ほんと小学生レベルというかんじでした。私が学習した変換はもっといろいろ探してみればたくさんの変換があると思います。私は，まだわからないけどこの勉強で一番心に残ったものは鏡映です。この算数Bの（エッシャーの絵の「自画像」をみて）エッシャーが水晶か何かを持ってる絵があります。1しゅん見た時はよくある鏡映として見ていたけれど，……じわじわとおも

しろみがでてきます。今日もその絵を見ていたら軸がわかりました。たぶんその軸は水晶自身だと思います。(先生の持ってきたエッシャーの絵を見て)エッシャーが残した絵みてなんだかじーんときました。もうちょっと鏡映のことが知りたいです。算数というより図工みたいで楽しかったです」(渋谷かおる)／「とても図形がたのしくなりました。またちがう図形があったら勉強したいです」(横山美佳)「垂直二等分線が対称性などいみがぜんぜんわかんないことばがいっぱいでてきたけどたのしかった」(佐藤広一)／「いろいろむずかしかったけど，なんかすごくむずかしいことを勉強したような気がしてよかった」(蜂谷斐子)
＊プランの構成が徐々に興味をもたせていくものであったこと，いくつか難しいところがありながらも学んだことへの充実感がよみとれる。また合同変換に限らず，他の変換の存在の予感，対称変換を通しての幾何学の美しさとでもいいうるものを，感じとっている。

4 実践の結果から

一到 達 点一

以下，プランの順をおってそれぞれの到達点を示す。

(1) 序章；導入部として，“これから何が始まるのか”と，興味を引くものとなったこと，変換とは何かを考えるうえでの導入の役割を果たしたといってよいだろう。

(2) 恒等変換；何も動かさない変換も変換として位置付けたことは，いわば数における0の導入とも言え，最初に扱ったことがなおのこと奇異にみえる。加えて，1ページだけしかないのに1章として位置付けたことに，驚き，意外性を感じていた。反対に何の抵抗もなく受けとめた子どももいる。また，平行移動，回転移動，変換の合成，対称性においてもそれぞれ恒等変換が導かれた。恒等変換が，ひろく合同変換に必要な概念であることが理解された。

(3) 平行移動；平行移動のパラメーターとしてのベクトルを導きだすという役割を担っていたにもかかわらず，必ずしもそうはならなかった。しかしベクトルについて授業者の説明，及びそのあといくつか平行移動する課題を通して，その意味が理解されたといえる。

異なる2つ以上の点（あるいは線分，あるいは多角形）を平行移動し，対応する点どうしを結ぶと平行四辺形ができる。平行移動の性質を導くことにより，〈平行四辺形が向かい合うひと組みの辺が平行で長さが等しい〉という平行四辺形の性質を導いたこと，あるいは導くことの可能性を示したことにもなるのである。

(4) 回転移動；平行移動とのちがいを考えるという課題から，1頂点を共有する回転移動した図形をみて，〈1点を中心としてぐるっとまわす〉という回転移動の定義そのものが導かれた。また，回転の中心と対応点を結ぶ線分の長さは等しい。つまり，二等辺三角形ができる。逆に回転の中心は，異なる2点（つまり対応する点1組）から等距離にある。そのような点の軌跡は，その2点を結んだ線分の垂直二等分線である。回転の中心を探す際にこれらのことを導いたことになる。しかし回転移動の中心を探す課題は，困難であったことがうかがえる。

(5) 鏡映；先の3つの変換と異なる点一図形が裏返しになることが導入部分でミラーを使うことにより導かれた。それはたとえば「ひっくりかえ」るなどの言葉で表現されている。ミラーの効果は大きい。ミラーを使わずに鏡映する作図課題を通して，軸とそれに交わる線分との交角に限定したとはいえ，それが保存されることを用いた作図を行なった。それは角が保存されることをすでに導いており，「ひっくりかえっ」ても合同になることをすでに理解しているので

ある。たこ形を作ることを通して軸を作図することにより，二等辺三角形の鏡映対称性，および底辺の垂直二等分線が頂点を通ることを導いた。つまり，異なる2点(つまり対応する点1組)から等距離にある点の軌跡は，その2点を結んだ線分の垂直二等分線であることが導かれた。

(6) 変換の合成

平行移動の合成；図形を平行移動すると平行四辺形を見いだすことができることをもとに(8ページで明らかになったこと)，平行四辺形になっていればむかい合うひと組みの辺は平行で長さが等しく，それは平行移動で重なり合う線分である―ということが，平行と合同の推移律を用いて授業者の発問を通じて導かれた。平行移動の合成をまず最初に調べたことにより，〈変換の合成が何か一つの変換になるから，それをみつけよう〉という，変換の合成が何になるかを導いていくという課題が明確になった。

回転移動の合成；回転の中心の発見法（15ページで導かれたもの）により，中心が見つかれば，回転移動で重なる，と導かれた。これには，一目みて平行移動で重ならない同じ向きに合同な図形は回転移動で重なるということがその前提にあるからである。回転の合成が回転にならない場合を調べるときには，20，21ページの整理が生かされ「平行移動になるということだ」ということが導かれた。回転角の和によって回転移動の合成が平行移動になる，など，正の合同変換の相互関係が明らかになったのである。

鏡映の合成；負の合同変換である鏡映の合成がすべての合同変換を生成することが導かれた。これは合同変換全体の相互関係が明らかにされたことを意味する。変換の合成について，変換の相互の関係の面白さ・不思議さは感想文に記されているが，特に鏡映の合成に関しての記述は多数にのぼったことは，変換の合成のなかで鏡映が山場であったことを示している。

(7) 対称性；図形ごとに対称変換を調べることは，いずれ対称変換群を考える可能性を含んでいる。実際，正方形の対称変換のうち一つを他の合成で表すことを考えることは可能だった。また併進対称性を考えることから図形の無限性を考えた。結局5章まででで学習した合同変換で図形を調べる，いわば合同変換の役立ち方とでもいえるものを感じとったと思う。ミラーやOHPシートを使ったことも効果的だった。

―改善すべき点―

改善すべき点として主に3つ点の点について述べる。

(1) 平行移動をきめるパラメーターがベクトルであることを導くことは必ずしもできていない。ベクトルの必要性を導くためにいくつかのステップが必要である。

まず，具体的な方向と具体的な長さをそれぞれ指定して移動する課題，次に矢印と具体的な長さを指定し移動する課題，たとえばこれには作図に限らず実際に子どもを「点に見立てて」移動するということなども含める，というように，段階をふみ，平行移動のパラメーターのベクトルのもつ意味を導きつつそれを用いて平行移動する課題設定である。

(2) プランの図の不手際がいくつかあった(p. 2, 3, 15, 45)。構成上の最も大きな問題は，回転移動で60度回転の課題を用いたことである。これでは回転移動した点と中心をむすぶと「二等辺三角形ができる」というより，「正三角形ができる」と強調したようなものである。少なくともプラン12～16ページでは45度回転などを題材にするべきである。

(3) 回転の中心を調べるのはいくつかの段階を要する。折って見つけるという見事な方法が発見されたが，今のプランの構成では一般に小学生にこの発見を望むことができるかどうかはわからない。少なくとも対応する点を結んだ線分の垂直二等分線上に中心があることをまず導く

ことが必要である。こうすると，折って見付ける方法は今よりも発見されやすくなると思う。

その他，久蔵プランで課題として残された回転移動の作図の道具の開発は保留されたままである。定木とコンパス，折り曲げなどによって導かれるのはもちろん必要なのだが，それに至るまでの，回転移動のイメージを伝え（鏡映のミラーのような）うる便利な道具があれば作図の簡易化をすすめることができる。

一全体を通して一

合同変換とは何か，それぞれの性質，その相互関係，対称変換などを調べるに際して，図形のいろいろな性質が必要なこと，子どもがいろいろな図形の性質を導くことができた（あるいは導くことが可能である）ということを示すことができた。前述したいくつかの改善すべき点はあるが，久蔵プランの改訂版として，小学校高学年向けの合同変換の授業プランに足るものとなったであろう。

最後に

この授業プランは久蔵プランの改訂として，北大教育学部数学教育グループ（須田勝彦，前田輪音）で前田の原案をもとに十数回にわたる検討により作成された。

実践予定校所在の多賀城において，数学グループおよび授業者佐藤敬行氏，大田邦郎氏（千葉大教育学部），岡野勉氏（新潟大学教育学部センター）らにより，検討の機会（8月29日）が設けられた。

また，数学グループに加えて高村泰雄氏，大竹政美氏，研究室院生諸氏にはプランの検討および実践報告に関して検討いただいた。また堀岡武氏（もみじ台小学校教諭），亀廼井宏幸氏（青葉小学校教諭），栗島史子氏（美香保小学校教諭），佐々木和子氏（もみじ台小学校教諭），長沢達也（幌東小学校教諭）には，月に一度，プランの検討および実践記録から検討いただいた。

記して感謝する。

なお，この実践報告について事実の誤認等があれば，それは前田の責任である。