《実践報告》

授業書「ホモセティー」と授業記録

―幾何教育における相似変換の指導の一環として―

前　田　輪　音
（北大教育学部教育方法学研究室修士課程）

〈目　　次〉

序　課題と方法
1　授業書「ホモセティー」の論理的骨格
2　解説および授業の記録
3　実践の結果から
さいごに

序　課題と方法

本論文の課題は，小学校における幾何教育において相似変換の指導のひとつを提案することにある。まず初等幾何教育の目標を「ユークリッド空間における図形の基本性質を教えること」[1]におく。相似変換の指導はそのひとつに位置づく。[2]

Felix Klein は1872年，当時あったユークリッド幾何，非ユークリッド幾何，射影幾何などのいろいろな幾何学に対し「統一し，あるいは分類する」[3]原理として「一挙にその時代の各種の幾何全体を見通す考え方」[3]としてエルランゲン・プログラムを発表した。それは「幾何学的性質は主群の変換に対する不変性によって特性づけられる」[4]というものである。さて，「ユークリッド幾何学のすべての命題は，写真の引き伸ばしのように，測定の単位を変えても不変のままであるから，この場合の《主群》は《相似変換》をも含んでいなければならない（相似変換は距離を変えるかも知れないが，もちろん角はそのまま変えない）」。[5]つまり，ユークリッド空間を不変にする変換群は，等長変換群（合同変換群）のみではなく相似変換群も含まれねばならないというのである。

この Klein の理論に基づきユークリッド空間における図形の基本性質〈相似変換群およびその部分群で不変な図形の性質〉と規定する。

次にあげる幾何教育に関するいくつかの授業書が，北大教育学部教育方法学数学グループで作成され，本授業書もその一環である。

① 相似（佐藤敬行：1977年度修士論文）
② 面積（氏家英夫：1981年度修士論文）
③ 多角形と円（須田勝彦：道数協「新訂算数たのしい学習プリント」3年，1991年改訂）
④ いろいろな形（須田勝彦：道数協「新訂算数たのしい学習プリント」4年，1992年）
⑤ 等長変換（久蔵宏幸：北海道大学教育学部卒業論文1986年度／「教授学の探究」第8号

「実践報告『鏡による図形の移動』とその授業記録」　北大教育学部教育方法学研究室発行　1990年）

変換で変わらない性質を調べることを通して，2次元ユークリッド空間における図形の性質が指導可能なことは，⑤の「鏡による図形の移動」とその実践報告で示されている[6]　また，①はタレスの定理を明らかにすることに目標がおかれている。

これらの内容整理，および既存の幾何教育研究の成果の整理はのちの課題として，①と⑤の間に位置する相似変換の指導をめざしてホモセティーの授業書を作成する。

〈注〉

1）須田勝彦　「幾何教育の基本構想」(「実践報告『鏡による図形の移動』とその授業記録」)「教授学の探究」第8号　北大教育学部教育方法学研究室発行　1990

2）前掲論文の幾何教育の基本構想における
「(a)ユークリッド空間を特徴づける変換群が相似変換群であることから，拡大・縮小，及び相似に関する諸性質。量の領域における倍や比との関連づけ」の展開的位置にある。

3）河田敬義　線形代数V『アフィン幾何・射影幾何』岩波講座　基礎数学　岩波書店　1976

4）Felix Klein　現代数学の系譜7『エルランゲン・プログラム』寺阪英孝，大西正男訳　共立出版　1970

5）H. S. M Coxeter『幾何学入門』銀林浩訳　明治図書　1965

6）この「鏡による図形の移動」の改訂版とその実践報告は，本誌に掲載されている。

1　授業書「ホモセティー」の論理的骨格

この授業書の大きな目的は，平行移動，半回転，中心拡大のそれぞれの変換の性質を調べそれらがホモセティーであること，その相互の関係を知ること，などを通してホモセティーとはなにか，相似変換とはなにか（その一部）を理解することにある。

(1)　相似と平行とホモセティー

ホモセティー群は，相似変換群の部分群である。相似変換の定義および基本的性質を示す。

相似変換の定義；

まず相似な図形を〈同じ形〉と定義する。

「平面上の点対応で，任意の2点P，Qの像をP′，Q′とするとき，

$\overline{P'Q'}=k\overline{PQ}$　（kは正の定数)が，常に成り立つ写像を相似変換とよび，定数kを相似比という」[1)]

同一直線上にない3点A，B，Cが，この相似変換により，それぞれ

$A \to A'$，$B \to B'$，$C \to C'$，となったとき，

$A'B'=kAB$　$B'C'=kBC$　$C'A'=kCA$

$\angle A'B'C'=\angle ABC$，$\angle B'C'A'=\angle BCA$，$\angle C'A'B'=\angle CAB$

すなわち相似変換は，図形を対応する辺の長さの比が一定（ここではk）で，対応する角がそれぞれ等しい図形に変換するという性質をもつ。これはすなわち〈相似な図形〉に変換されたことを意味する。すなわち，〈相似な図形に変換することを相似変換〉と定義できることを示している。しかしプランでは相似変換自体の定義は示さない。

相似比とは図形の辺の長さの比のことである。もとの図形Fの1辺の長さがaで，対応する図形F′の対応する辺の長さがbのとき，辺の長さはb/a倍となっている（また相似比b/a＝

k)。小学校高学年を実践対象とする場合，kは有理数に限定する。

平行の定義；

「一致した2直線も平行ということに」[1]して平行の定義の拡張を行なう。

ホモセティーの定義；

「平面上の変換であって，直線を直線に移し，かつ，直線 l の像 l' が常に l と平行になるような写像をホモセティーという」[1]

ホモセティーは異なる2点の変換でどの変換かが決まる[1]。つまり，平面上の点対応ではあるが，2点以上で構成される図形上の点の対応としてもその性質を調べることができるのである。よって「図形上の点の対応」として扱う。

授業書は，相似変換の指導を目標にしていることから，ホモセティーの定義を〈同じ形で対応する辺を平行にする変換〉とする。構成上の統一性を図るために，ホモセティーの定義を示す。

(2) ホモセティーを構成する変換―平行移動，半回転，中心拡大

3つの変換の順序；

相似変換の指導の一環なので，合同変換でない相似変換として唯一の変換である中心拡大を3番目つまり最後にする。平行移動と半回転の順序は任意であるが，半回転は中心拡大の一つとしても考えられるので，半回転と中心拡大を続ける。よって，平行移動を最初にする。以上の点で3つの変換の順序は，①平行移動　②半回転　③中心拡大　とする。

3つの変換の共通の構成は，〈変換の定義，点，約分，三角形の変換による像の作図，変換の性質の整理，それらを利用した応用的問題〉とする。多角形の変換を目標に〈点，線分，多角形の変換〉という構成にする。点，線分，多角形と順をおうのは，変換は△ABC上の ∀P の対応する点の集まりが，△A'B'C' をつくるということつまり図形が点の集まりであるということが前提にある。図形上の点の対応する点の集まりが，変換された先の図形を構成する，ということである。〈応用的問題〉は，「対応する辺が平行である」ことや，「点の変換を手がかりに，線分（辺）全体を変換する」，「辺（線分あるいは直線）は2点できまる」など，さまざまな図形の性質を利用する。

それぞれの定義および基本的な性質[1]を，以下に示す。

半回転；　「平面上に定点Oを定め，平面上の各点Pに線分 PP' の中点がOであるような点 P' を対応させる点対応を，点Oに関する点対称移動，または，Oのまわりの半回転」[1]という。

つまり〈1点を中心として図形を半回転すること〉である。中心が不動点になる。ホモセティーであること，合同な図形に変換されること，対応する点を結んだ線分が1点で交わること―共点性(三角形の3つの頂点P，Q，Rの対応点を P'，Q'，R' とすると，3直線 PP'，QQ'，RR' は常に1点―半回転の中心―をとおる）を明らかにする。

平行移動；「平面上の与えられたベクトルをvとする。平面上の任意の点Pに対して，PP'＝v である点 P' を対応させる点対応をベクトルvだけの平行移動」[1]

授業書ではベクトルの表す意味を「方向と距離」を一度にきめるものとしてとらえ，定義を〈図形上のすべての点を，同じ方向に同じ長さだけ移動すること〉とする。ホモセティーであること，合同な図形に変換されることを明らかにする。

中心拡大；「平面上の定点をO，λ を零でない定数とする。任意の点Pに

$\overrightarrow{OP'}=\lambda\overrightarrow{OP}$ （$\lambda\neq0$）を満たす点P′を対応させる点対応[1]」

λを0でない定数とするとき，とりあえず相似比と同様に有理数の範囲で考える。共点性，中心が不動点になることを明らかにする。授業書の定義は，O，P，P′が同一直線上にあることを表すようにする。

倍率λをどう扱うかをきめる。λを有理数と扱うか，自然数として扱うかの選択肢があるが，実践対象が小学生である場合，負も数を学習していないので自然数とする。自然数とすると，n倍の中心拡大で対応点が2つできる。この2つを対応する点の中心との位置関係を区別する方法を示す。すなわちP→P′とするとき，P′がOに対してPと同じ側にあるとき〈プラス〉，反対側にあるとき〈マイナス〉，の中心拡大とする。

$\lambda=k=1$のとき，〈マイナス1倍の中心拡大〉は半回転，〈プラス1倍の中心拡大〉は恒等変換である。ホモセティーの相互関係は変換の合成においても考えることができるが，半回転と中心拡大の関係はその定義より明らかであり，合成とは別個に先に扱う。$\lambda\neq1$のとき，合同でない相似な図形に変換される。

(3) 変換の合成；ホモセティーの合成が1つのホモセティーになることの例をいくつかとりあげる。また作図による幾何学的美しさなどをつたえること，もできる。

（参考） ホモセティーの相互関係は次のものにまとめられる。

- 平行移動と平行移動の合成；平行移動
- 中心拡大（倍率$m\neq1$）と平行移動の合成；中心拡大（m）
  平行移動は図形の大きさ，向きを変えないので，合成においては，位置のみを変化させる役割をはたす。
- 中心の異なる中心拡大（m）と中心拡大（n）の合成；$m\times n\neq1$のとき中心拡大
  共線性などの射影幾何学的性質を含んでいる。ただし，対応点と中心の位置関係で相似比は同じであるが，図形の向きはそれぞれ異なる。

	マイナスm倍	プラスm倍
マイナスn倍	プラスmn	マイナスnm
プラスn倍	マイナスmn	プラスnm

いずれも相似比は2つの中心拡大の倍率の合成である。倍率の積が1のとき，〈プラス〉〈プラス〉，〈マイナス〉〈マイナス〉のとき，平行移動になる。〈プラス〉〈マイナス〉，〈マイナス〉〈プラス〉のとき半回転になる。先に述べたように半回転は〈マイナスm倍〉の$m=1$と表せる。よって中心拡大と半回転の合成も同様にこの表で考えることができる。

以上をもとに，全体を次の順序で5部構成にする。

1　ホモセティー変換とは
2　平行移動
3　半回転
4　中心拡大
5　変換の合成

具体的操作―直線を書く道具，平行線を書く道具としての2枚の三角定木と，線分の長さを

保存しうつす，円をかく道具としてのコンパスを使い，変換の性質を明らかにする。

〈注〉

1）那須俊夫「変換幾何入門」（共立出版　1990）ただし，これらのまえに，写像の定義変換の定義，合同変換の定義および性質が，示されている。

実践の概要

実践対象は，合同（現行学習指導要領では5年生），比（同，6年），を学習済みの子どもとする（比そのものを学習していなくても，この授業書で学習すればよい）。小学校高学年が適している。

今回の実践に関しては，1993年2月1日から19日にかけて札幌市立澄川小学校6年3組39名（授業書19ページ以降，1名が転校のため38名），授業者は須田智恵子教諭で，実施された。総ページ数37ページ授業時数は14時間だが，実質的に18時間強ほど費やされている。この学級はこの授業書実践前に，6年生で幾何教育に関連するものは，比，線対称・点対称な図形を学習済みである。

今回の実践用に，授業書（p. 7〜33）を1ページづつBASICでプログラムしたコンピューター・グラフィック（授業プランそれぞれのページに対応し，作図の方法，物理的に動く様子，点がひとつひとつ移動する様子をシミュレートしたもの　作成者；高橋哲男氏—北海道大学教育学部4年）をビデオに収録（協力；若菜博氏—北海道教育大学岩見沢校総合教育研究室）し，プランの区切りのいいところで復習的に使用した。

2　解説および授業の記録

分析の材料は，子どものファイルノート，感想文，授業記録である。感想文は，授業がすべて終了した時点で各自ファイルノートをふりかえりながら自由に題をきめて印象に残ったこと，疑問などについて書いてもらった。

授業書とその内容，および授業記録，あるいは授業の様子，子どものファイルノートをまとめた。若干のコメントを*のあとに行なう。

授業記録は，授業者；T，子ども：Cとし，テープおこしの可能な範囲でわかった子どもの名前はそのままのせた（敬称略）。

第1章　ホモセティー変換とは？　(p. 1〜6)

〈第1章の内容〉

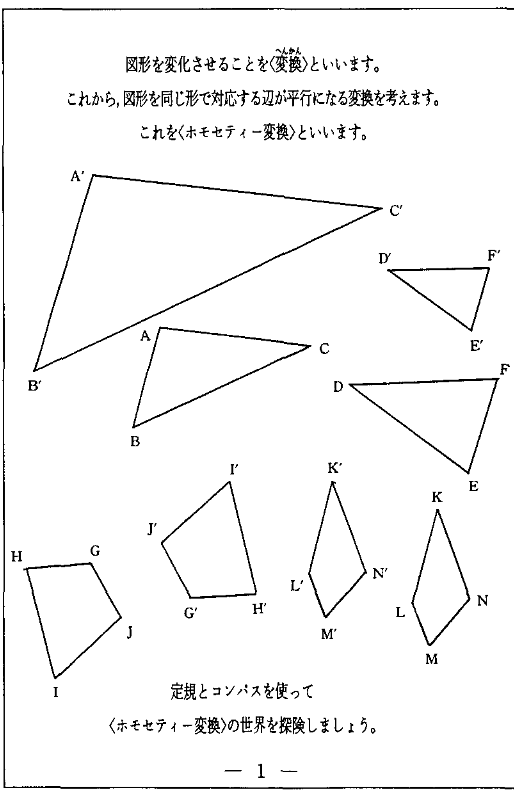
ホモセティー変換の定義を示し，そのあとホモセティー変換の性質である〈相似〉(p. 2〜5)と〈平行〉(p. 6)の定義を示しその性質を導く。相似，合同，平行はそれぞれが同値関係(p. 6)であることを示す。同値関係は，つづく第2章からの各変換の性質，及び変換の合成を導くなかで用いられることになる。

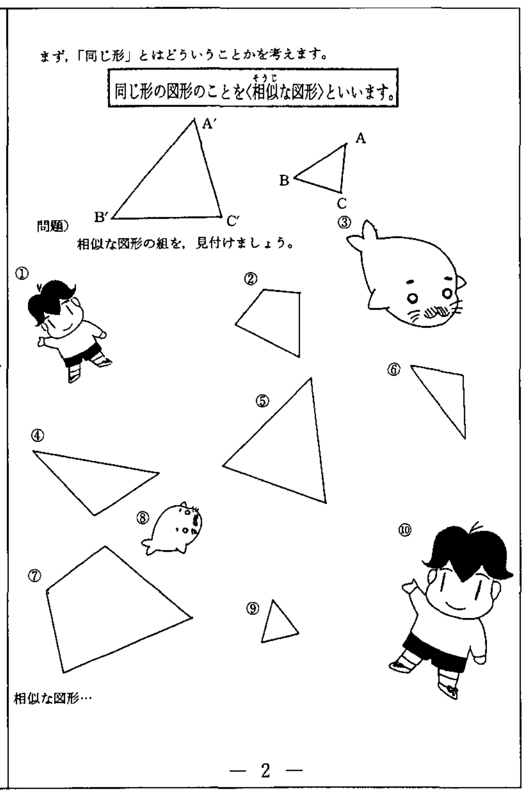
P. 1

変換・ホモセティーの定義の意味すること，及び対応する点，対応する辺，対応する図形などの用語の用い方，などを考える導入部分である。

〈授業の記録〉

T　　切らないで同じ形にするには，どうしたらいいか。
C　　線対称か，点対称にしてみる。
C　　定規やコンパスを使う。
T　　どこで使えばいいか？
金沢　HGとIJ，H′G′とI′J′をはかる。（四角形GHIJ，G′H′I′J′の対応を考えている）
T　　あとない？
内藤　（ききとれない）
C　　大きさが違う。
C　　同じ形だ。
T　　いま，何を考えているの？
C　　同じ形のもの。
吉田　—
T　　どういうふうに考えたらいい？
C　　同じ字をあわせればいい。
T　　こういうのをどういう？
C　　合同？
　　　同じ長さ？
　　　対称？
T　　違う。





C　点対称。
T　こういうの，〈なんの点〉という？
C　対称な点。　／　対称な変換／対称な長さ／対称点／対応する辺
T　そう，「対応する辺」です。

*「同じ形」のものをあげたとき，はじめに合同な図形があげられたのは，「同じ形」が「合同」すなわち「重なり合う図形である」という認識があることがわかる。しかし大きさが異なる図形もやはり「同じ形の図形」といえることで，その共通点を考える，つまり「相似」とはなにかを考える出発点となった。

P. 2

相似な図形の定義，およびその意味することを考える問題である。

〈授業の記録〉

（色画用紙で作った相似な2つの三角形を黒板にはっている）

T　気のついたことを言ってください。
C　角度が同じ／形が同じ／
大井　色が違う。
浅野　大きさが違う　全体の長さが違う　辺の長さが違う。
T　同じなのは，形が同じなのです。
　「形が同じことを〈相似な図形〉といいます」
C　この漢字の意味はどういう意味でしょう？
T　いいこと言うね
C　「相」は相性の「相」，「似」は似ている
T　新しいことばだけど慣れたらいいね。4年生のときならったのは？
C　合同
T　相似な図形を探してもらいます（黒板に貼る）

（子ども―キャラクターにうけている）
（T―　2頁を子どもに配る）
（2頁を子ども御部で読む―問題を解く）
（作業中）

　C　なんとなんでいいの？
　T　はい。
　C　①，③，⑧，⑩は，変な図形だ。
　C　（アニメのキャラクターも）図形に入っていた。

T　では，発表してください。（次々に，相似な図形の組を発表）

P. 3

用意したもの一合同な図形を切りぬいたもの（緑の色の画用紙で作ったもの）を19枚，各自に配布一作った三角形はこの頁に各自糊付け

〈授業の様子〉

枚数を増やせば大きな三角形ができること，枚数によって三角形の大きさが違うこと，見る角度を変えると違う形に見えること，などに気付いた。さらに大きさを変えるには「下につなげてもいいんでしょう？」という発言もあった。また三角形ではなく「平行四辺形を作れた」

という子もいる。ほとんどの子どもが，課題を満たしたしきつめを行なっている。

P.4

3ページの作業（しきつめ図）をもとに，相似の性質を導く。しきつめ図で考えられるのは相似比が有理数の場合のみだが，相似の性質を導くには有効だと思う。

相似比の定義を辺の長さの比の値とする。合同を相似の特殊な場合に位置付ける。

しきつめ図の構造を，作図により考える課題

〈授業の様子〉

しきつめ図から，容易に相似の性質を導いた。また，いちばん下の問題も，主に2通りの方法で作図された。27名／38名中が課題の条件を満たしたものだった。

P.5

4ページの相似における合同の特殊化の実例にふれる課題である

〈授業の記録〉

（問題が一通りおわったあとに）

松本　相似と合同は，同じじゃないの？

T　相似のなかに合同いれると思う人？　いれないと思う人？

志田　さっき，同じやつ（合同な図形）でも1：1で，比が1であったから

T　相似比1のとき

C　合同

T　だから，(1)　相似な図形　に合同は，いれるでしょうか？

C　いれる／いれない

問題）

同じ形で同じ大きさの三角形がたくさんあります。

これらをすきまなくならべて一つの三角形を作ってください。

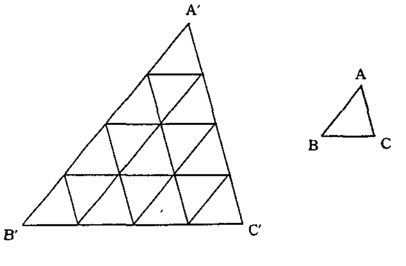
— 3 —

△A′B′C′と△ABCは，相似です。

[A′ B′]：[AB]　　角A′=角（　）

=[　　]：[　　]　　角B′=角（　）

=[　　]：[　　]　　角C′=角（　）



相似

・対応辺の長さの比は，すべて（　　）。

・対応角は，それぞれ（　　）。

対応辺の長さの比の値を〈相似比〉といいます。

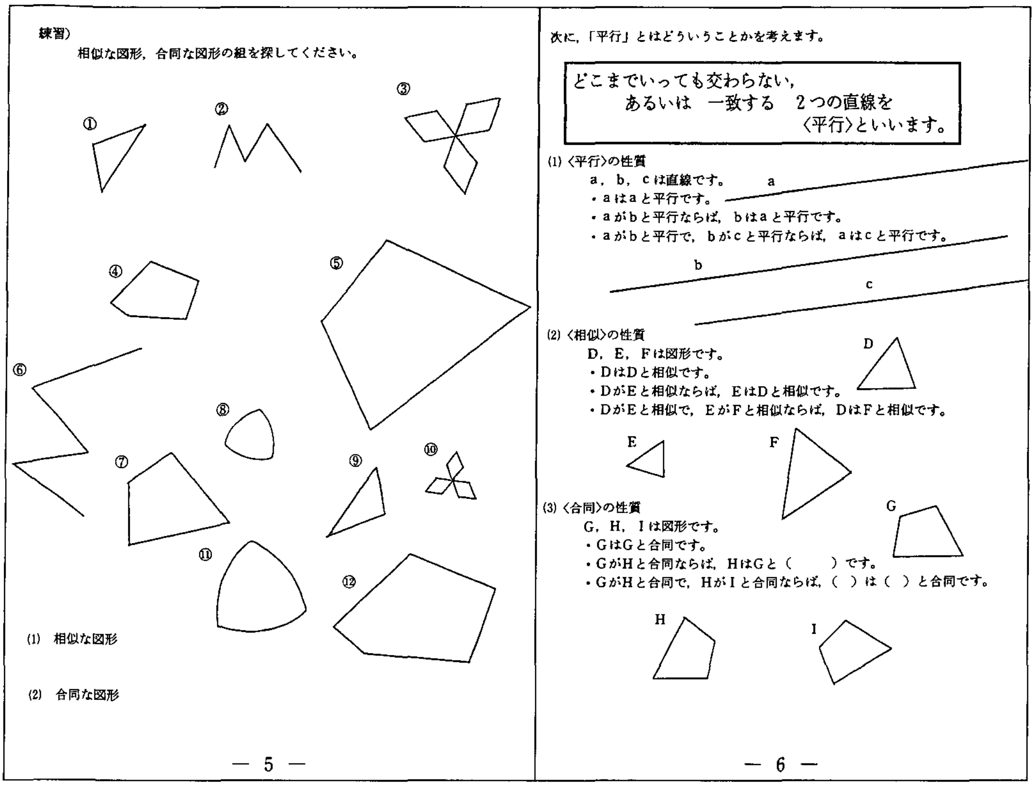
相似比1の図形を特に〈合同な図形〉といいます。

・△A′B′C′と△ABCの相似比は（　　）。

・上の図で，△ABCと合同な三角形をいくつか書きたして，

　△ABCと相似比5の三角形を作図してください。

— 4 —



練習)

相似な図形，合同な図形の組を探してください。

①　②　③　④　⑤　⑥　⑦　⑧　⑨　⑩　⑪　⑫

(1)　相似な図形

(2)　合同な図形

— 5 —

次に，「平行」とはどういうことかを考えます。

どこまでいっても交わらない，
あるいは　一致する　２つの直線を
〈平行〉といいます。

(1) 〈平行〉の性質

ａ，ｂ，ｃは直線です。

- ａはａと平行です。
- ａがｂと平行ならば，ｂはａと平行です。
- ａがｂと平行で，ｂがｃと平行ならば，ａはｃと平行です。

a　b　c

(2) 〈相似〉の性質

Ｄ，Ｅ，Ｆは図形です。

- ＤはＤと相似です。
- ＤがＥと相似ならば，ＥはＤと相似です。
- ＤがＥと相似で，ＥがＦと相似ならば，ＤはＦと相似です。

D　E　F

(3) 〈合同〉の性質

Ｇ，Ｈ，Ｉは図形です。

- ＧはＧと合同です。
- ＧがＨと合同ならば，ＨはＧと（　　　）です。
- ＧがＨと合同で，ＨがＩと合同ならば，（　）は（　）と合同です。

G　H　I

— 6 —

Ｔ　考えてやりましょう。
　　（中略）
Ｔ　１と９はどんな形？
Ｃ　合同
Ｔ　相似比は？
Ｃ　１
Ｔ　つまり，
Ｃ　相似な図形
Ｔ　順番にもう一度こたえをいいます。—
Ｃ　２と６（折れ線）って，図形じゃないんじゃない？
Ｃ　線だから図形でない。
佐竹　線も図形にはいる。
田中　気にしない。
Ｃ　囲んでないから図形じゃない。
松本　形になってない。
Ｃ　折れ線グラフ。
志田　図形。
Ｔ　閉じてなければ図形でないの？　昨日のアシベ君（ｐ２漫画）は図形でないの？
Ｃ　囲んでいるから図形。
Ｔ　つまり，図形って，何の集まりなの？

C　　線／形／辺

C　　点

T　　点の集合でしょ？　アシベ君も。点がたくさんつながって形になる。パソコンとかワープロはドットって言って，点の集合でしょ。点がたくさんつながって，線になる。図形は点の集まりだから2と6も図形と考えます。パソコンも点がたくさむつながって，文字になる。24ドットとか，36ドットとか。3や10は，図形？

C　　囲んでいるから図形

＊合同が相似にはいるのかどうかが議論された。また図形とは「囲んでいるもの（閉じているもの）」という位相的な認識により，2ページの男の子と海豹，5ページの③と⑩（対称性をもつ図形）が図形として認識されていたことがわかる。これは現行の幾何教育が，閉じた図形のみを図形として扱っていることの端的なあらわれであるといえる。点の集まりが図形であること，つまり折れ線も図形の一つであることなど，ひとつの驚きとして認識された。次の感想文にもあらわれている。

〈感想文の抜粋〉

広瀬雪「……図形は点の集まりということが，勉強になった」

前田真里「……線も一つ一つの点でできていることが，すごく感心しました」

P. 6

平行線の定義付け，平行，相似，合同の同値関係を示す他に，平行線をかく課題を追加する。次の2点を考える。

- 点Aを通り，直線aに平行な直線をかく　（ただし，点Aは直線a外の点）
- 点Bを通り，直線aに平行な直線をかく　（ただし　点Bは直線a上の点）

〈授業の様子〉

既習（4年生）の「平行」の定義を拡張した「直線それ自身も自分に平行である」ということは，容易に受け入れられた。「カーブしたのも（どうし）平行というの」（たとえば汽車の2本のレール）という質問をした子どももいた。

対称律については「当たり前～」という反応が多かった。

平行線をかく課題では，「1本でいいんでしょ」という発言があった。

＊平行の新しい定義（反射律を含めて）が十分に認識されたことがわかる。

第2章　平行移動　(pp. 7～12)

〈2章の内容〉

平行移動の定義（p. 7）から，点・線分の変換，それを通して多角形（三角形）の像を作図することなどから保存される性質を導く（p. 7～9)。

また，変換の性質を実際に利用したいくつかの課題を解く（p. 10～12)。

P. 7

〈授業の記録〉一平行移動の定義

T　　平行移動だから，方向が決まっている。こっちの方向に，またこっちの方向に。

C　　平行って，曲がらないの？

T　　うん。平行って何だったっけ？

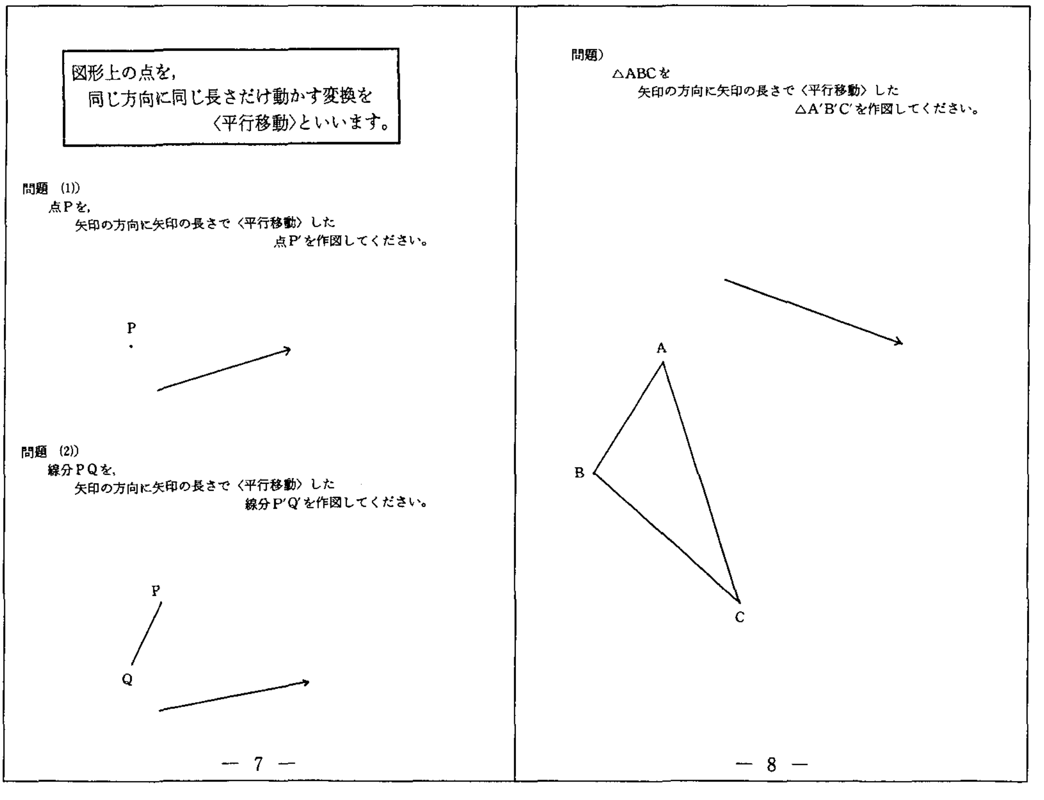
C　　1つの直線か，全体が重ならない。

T　　一つは，こっちの方向—というように方向が決まっている。
　　ふたつめは，長さが決まっている。
C　　長さが違っちゃ駄目なの？
T　　駄目なの。こっちの方向に，この長さで動いてください（というもの)。
C　　長さも決まっている。それ以上には？
T　　それ以上なんかあったら，平行移動したことにならないの。
　　C　　どうして？
　　C　　同じ長さならいいの？
　　C　　スタートちょっと遅れたら？
　　C　　だめだ，それは
T　　同じ方向で，同じ長さの分だけ動かないと駄目。
C　　途中でまがったら？
T　　だめ。
C　　こういうのの長さで同じのは？　　（？？？）
T　　それはいい。
　　やっていくなかで，わかっていくから。

〈授業の様子〉　問題(1)・(2)

問題(1)（点の平行移動）ではイメージの助けとして，子どもひとりを点に見立てて，教室内を歩かせて平行移動させた（授業者の提案による)。

問題(2)（線分の平行移動）では，線分PQと長さが等しい棒状の磁石を数本用意し，線分P′


図形上の点を，
同じ方向に同じ長さだけ動かす変換を
〈平行移動〉といいます。

問題（1))
点Pを，
矢印の方向に矢印の長さで〈平行移動〉した
点P′を作図してください。

問題（2))
線分PQを，
矢印の方向に矢印の長さで〈平行移動〉した
線分P′Q′を作図してください。

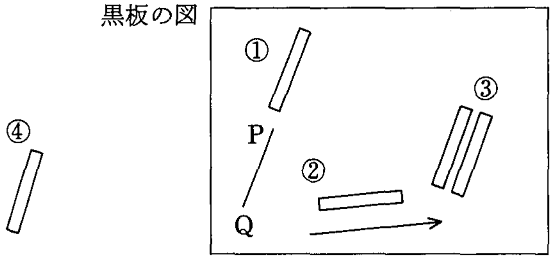
— 7 —

問題)
△ABCを
矢印の方向に矢印の長さで〈平行移動〉した
△A′B′C′を作図してください。

— 8 —

Q′ の位置の予想を発表した結果，3タイプ（①～③）にわかれ，議論になった。

黒板の図



① 線分にそった平行移動
② 矢印に平行な位置への移動
③ 矢印による平行移動
（課題の条件を満たしたもの）
④ 矢印の正反対の方向に矢印と同じ長さの平行移動

いずれもなんらかの「平行性」を認識したものだが，矢印の役割，何について平行なのかについて議論の焦点が当てられた。

①に対しては 「矢印の意味がなくなる」

②に対しては、「矢印に平行に動くが，線分 PQ に対しても平行になるはずだからおかしい」
「線が倒れて移動するのは，おかしい」
「『矢印の方向』に動かないといけない」

③に対しては，肯定する意見の他に，矢印の長さで，矢印と反対向きの位置を提案する意見がだされた（④)。

どの意見に賛成かを挙手の方法で調べると，およそ①：③＝1：2 くらいであった。

〈ファイルノートから〉　問題(2)

	作図のタイプ	人数	
(a)	点P，Qそれぞれを平行移動し，点P′，Q′とし線分 P′Q′ としたもの	15	課題の条件を満たした作図
(b)	点P，Qのいずれかを平行移動させ，その点を通り線分 PQ に平行な直線を引き，長さをとったもの	3	
(c)	P′，Q′ はとれてるが，線分になってない	1	平行移動にはなっているが 2 つの変数の条件をみたしていない。
(d)	矢印の向きで，矢印の長さでない平行移動	4	
(e)	PQ にのみ平行な平行移動（矢印は無視）	3	
(f)	矢印に平行移動な直線，PQ に平行な直線が作図	2	なんらかの平行性を認識しているが，課題の条件を満たしていない作図。
(g)	Pあるいは Q を通り矢印に平行な直線だけは作図されている（作図の途中で時間切れか？）	2	
(h)	PQ 上の任意の 1 点をベクトル分平行移動し，その点を通る PQ に平行でない線分が作図	1	
(i)	方法が不明	1	
(j)	手を付けていない	7	（39 人中）

＊平行移動には，子どもなりのイメージをもっていて，授業過程のなかでそれが平行移動の条件を満たすものに方向付けられていった。しかしその特異性（パラメーターが方向と長さのふたつあること）から，「同じ方向で，長さは違っていてもいいのではないか」などの疑問をもちつづけそれを裏付けるような作図を問題(2)でおこなっている。

問題(2)では，討論の過程で平行移動におけるベクトルの意義が次第に明らかになっていった。作図の(b)の方法は，点の平行移動とそれを手がかりにした辺の平行移動の関連を非常によく理解したものといえる。〈端の点をそれぞれ変換することにより線分が変換される〉という認識の他に，変換とは，図形全体（この場合，線分）を一気に動かすことというようにとらえていることが，作図にあらわれている（(b)）。

P. 8

〈ファイルノートから〉

平行移動したものが三角形になることを予想してから，各自作図。

(a)	課題の条件を満たしているもの （うち，試行錯誤しているもの）	26 (7)	ほぼ，課題の条件を満たしている作図
(a)	1頂点のとり間違い	2	
(b)	ベクトルと方向が同じで長さが異なる平行移動	2	平行移動にはなっているが2つの変数の条件を同時にみたしていない。
(c)	ベクトルと方向が異なり長さが同じ平行移動	2	
(d)	(c)にしようとしているが，C′ が辺 BC の延長上にある（平行移動になっていない）	1	平行移動しようとしているもの，またはなんらかの平行性を利用した作図
(e)	辺 A′C′ をベクトルと平行になるような，点Aを中心とする回転移動	1	
(f)	各頂点を通る互いに平行な直線を3本引き（ベクトルと平行でない)，それぞれ異なる長さぶんとり，三角形を作図 （平行移動でない）	1	
(g)	2頂点を通りベクトルに平行な直線が作図(途中か？時間切れか？)	1	
(h)	なんらかの三角形（方法は不明）	2	
(i)	できていない	1	（39人中）

＊作図をみると，平行移動の変数がふたつあることが，難しさの原因とみれる。加えて，なんらかの平行性を意識した作図もみられ，平行移動の性質の獲得が，徐々になされてきていることをみることができる。なんらかの平行移動（ベクトルの条件のどちらか一方のみを満たしているものを含む）を試みているものが76.9％と健闘している。

P. 9

〈授業の記録〉

平行移動で重なる図形がどれかをあげたうえで，確認の方法が議論された。

T　　確かめる方法を考えます。どうしたらいいか？

十河　平行移動して重なるなら，対応する辺が平行になるからそれを確かめればいい。(C_1)

T　　辺 AB と対応するのは？

中野　JK

T　　平行かどうか，どうやって確かめる？

C　三角定規２個使う

T　やってごらん。平行になりましたか？　(なった)△IGH 二人いたね。AB に対応する辺はどこか？(最初に予想をしたとき，△JKL が 37 名，△IGH が 2 名いた)

C　ない。

T　無理して探したら？

浅野　GH

T　平行かどうか確かめてごらん。

C　なんない。

T　つぎ，BC と対応する辺は？

鶴間　KL

T　調べよう

C　平行四辺形になっているからいいんじゃない？

C　BK と CL の線引くと，平行四辺形になるから。平行っていうことがわかるんでないの？(C_2)

T　AC と対応するのは？

佐藤　JL

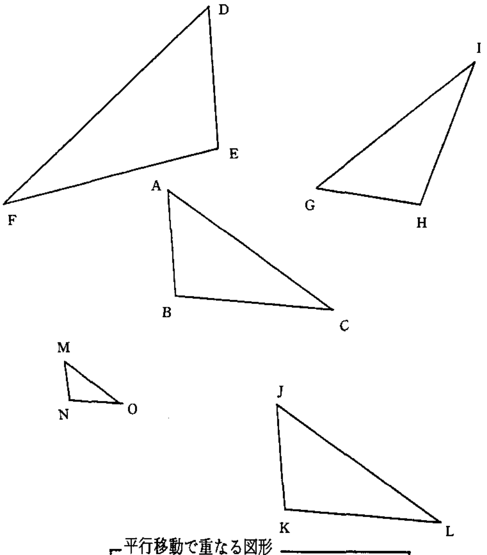
T　確かめてみて

(子ども―作業)

T　あと，確かめる方法はない？

志田　対応する点どうしを直線で結び，長さが全部同じかどうかをみればいい (C_3)

問題) 下の図形は，すべて△ABC と相似な図形です。
△ABC を平行移動して重なるものは，どれですか。

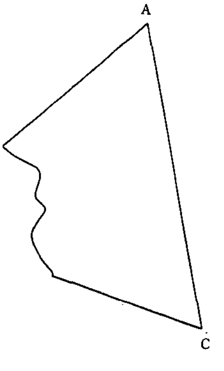


平行移動で重なる図形
・対応辺が (　　) である
・対応点を結んだ線分の (　　) が等しく，
互いに (　　) である
・互いに (　　) な図形である

平行移動は，ホモセティー変換の一つです。

― 9 ―

問題)
△ABC の一部が，破けてしまいました。
△ABC と合同な△A′B′C′を作図してください。



― 10 ―

C_1「対応する辺が平行になるから（三角定規2枚で）平行かどうかを確かめる」という方法，C_2「対応する点を結ぶと，平行四辺形になるから平行である」という方法がだされた。C_3「対応する点どうしを直線で結び，長さが全部同じかどうかをみればいい」という方法がだされた。このように，多様な方法がだされた。C_2 を補促しているのが C_3 である。それぞれ，論理的な説明であるといえる。

P. 10

一部が欠けた三角形（「破れ三角形」一子ども）を変換する課題である。名づけて「破れ三角形の問題」である。那須俊夫の「変換幾何入門」（共立出版 1990―数学の教師または大学生向けにかかれている）からヒントを得ている。9ページでまとめた平行移動の性質を実際に利用して，点を使った変換のみならず，辺を使って変換する方法を考える。これを通して，点と辺との相互の関係をも知ることができる。

〈ファイルノート〉

〈A〉〈対応する辺が平行である〉という平行移動の性質を利用し，1辺を平行移動［辺 AC に平行な直線を引き，その直線上のコンパスで AC の長さをとり A′C′ とする］するのは共通の方法である。

そこからさらに，

(a) 対応する辺が平行であることを利用した作図　(20名)

A′ を通り AB に平行な直線を引く

C′ を通り CB に平行な直線を引き，その交点を B′ とする

(b)線分（対応する辺）の決定要素が2点であること，対応点がひと組みあれば平行移動は決定できることの理解を前提とした作図　(2名)

動かした AC をもとに，平行移動のベクトルを AA′(あるいは CC′)としてやぶれた2辺のそれぞれの破れ目の点を平行移動し，三角形全体を変換している。

(辺 A′B′，辺 C′B′ をひき，交点を B′ とする)

(c)三角形の合同条件を用いた（5年生で既習）作図　(2名)

破れ目の点から，辺 A′C′ に垂線を引いて，A を頂点とする直角三角形(正三角形)，C を頂点とする直角三角形(正三角形)をそれぞれ作成し，それを手がかりに△A′B′C′ を作図する

(しかし，角A，角Cを頂点として正三角形が作れるということは，これらの角が60°であることをまえもって知らなければならない。偶然正三角形ができたから作図したのか，まえもって調べたのかは，不明である)

(授業では，(a)と(c)が発表された。(a)に指示が集まった)

〈B〉 正三角形であることを利用した作図　(7名)

破れた三角形に三角定規をあて，「(かくれた2辺の) 長さをはかるとだいたい正三角形になる」という発言があった。そのため正三角形であることを利用したであろう作図が8人ぶんみられた。これは3つに分類することができる。

(a) AC に平行な直線を作図し，辺 A′C′ をとったのち，残りの2辺を AC の長さぶんコンパスでとり，B′ を取る；(2名)

(b)辺 BC の延長直線上に AC の長さぶんとり，辺 B′C′ とし，コンパスで AC ぶんの長さをとり，A′ をとる；(5名)

「直線がそれ自身に平行であること」（平行の反射律）を前提としている。

(c)正三角形であることを用いて，ACを軸とした鏡映；（1名）

＊それぞれいろいろな図形の性質を駆使した方法が考えだされ，幾何学に対する子どもの多用な考え方が存分に発揮された。しかし，正三角形にしたのは失敗だった。

P. 11〜12

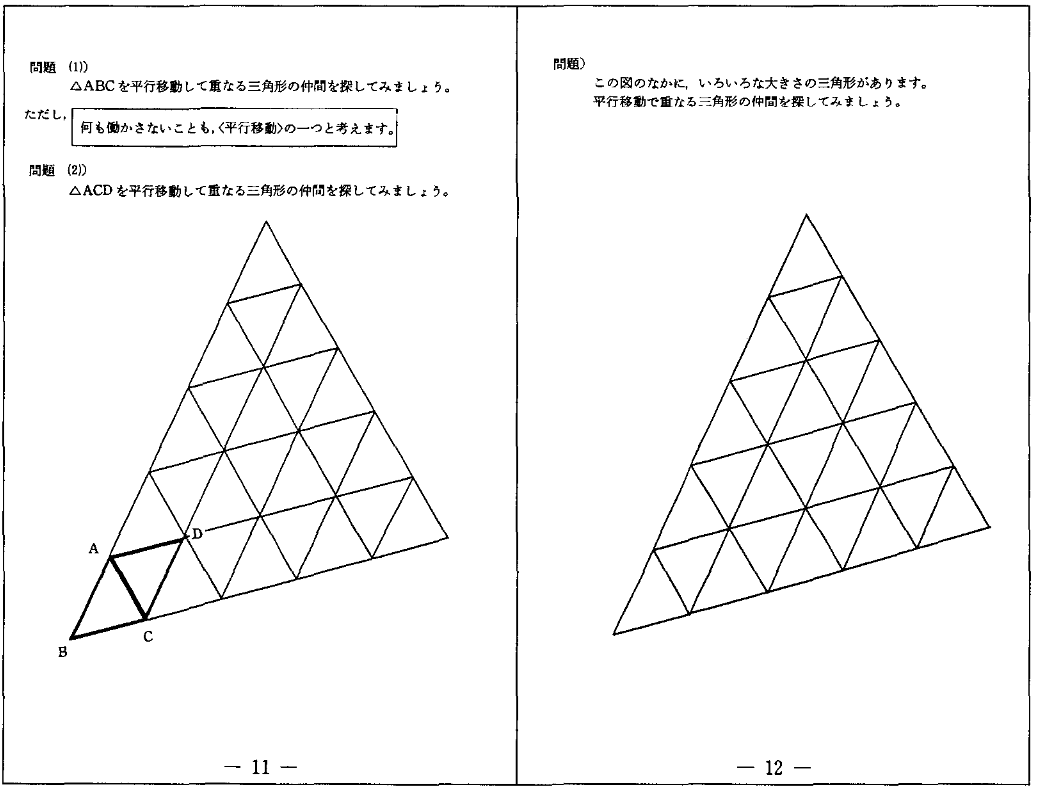
しきつめ図のなかで平行移動で重なる三角形を探す課題である。

恒等変換を定義する。恒等変換は，一見当たり前そうに見えても，考え方は自明なことではない。これは平行や相似，合同の同値関係（p. 6）のうちの反射律を理論的根拠とする。しきつめ図で変換を探すこの課題も，反射律を理論的根拠とする必要がある場合がある（同じ直線上にある平行移動で重なる図形を探すときに）。

〈授業の様子〉

はじめ問題の意味がわからず戸惑っていたが，すぐに該当三角形を発見し先を争って発表した。△ABCと平行移動で重なる三角形の個数をわり出す規則性を発見しようと試みた子どももいた。

12ページでは,11ページの△ABCと大きさの異なる三角形を探すことにはすぐに気付いた。平行移動で重なる三角形の組は，相似比3のものまで発見された。最も外枠の三角形はそれ自身が平行移動で重なるもの（恒等変換）だが，発見されなかった。



第3章　半回転　(pp. 13〜21)

〈3章の内容〉　構成は，ほぼ平行移動と同様である。

P. 13

〈授業の記録〉　問題(2)

T　今度は直線です。Oを中心に180度回転する。大体どっち側にくると思いますか？　さっきは点，今度は直線。

C　QとP，どっちを中心（主体に）に考えるの？

T　どっち？

C　どっちも中心に考える　／　C　両方（主体）に考える

T　この線分がこれを中心に，180度回転する。

浅野　PからOまでの長さって，反対側も180度回転しても同じになるの？

T　いいところに気付いたね。OからPまでの長さと

C　P′からOまで

T　の長さが同じなの？　どう？

C　同じ　／　C　でも，長さはかって駄目なんでしょ。

T　どうすればいいの？

C　コンパス

T　はい，やってみよう。(子ども一作業)，前田さん，平行移動でなくて，半回転。はい，浅野くんのあとあのヒントでここまでできたね。そのあとは？

竹田　QからOに線をのばす

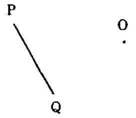
（栗原　PとOをつなぐ，線を引く）

神成　QのところからOのところまでの線をコンパスでとって反対のところに印をつける

図形上の点を，
1つの点を中心にして180度回転する変換を
〈半回転〉といいます。

問題 (1))
点Pを，点Oを中心に〈半回転〉した点P′を作図してください。

問題 (2))
線分PQを，
点Oを中心に〈半回転〉した線分P′Q′を作図してください。



— 13 —

T　はい，ここが何になるの？
大井　Q′
T　そのあと，Q′P′をどうすればいいの？
C　つなぐ
T　佐々木さんがいってたけど，180度回転するとPQがちょうど？
C　半回転したから，逆さになる。
C　線に逆さってあるの？
T　こういうの逆さっていうの？　なんていうの？
C　顔があればいい。　／　C　ある　／　C　ない
T　うーん，くるしいな。先生はわからない。

〈ファイルノートから〉　問題(2)

課題の条件を満たした作図は，30名，中心の点から対応する点までの長さの取り間違いが6名，白紙だったのが1名である。

＊問題(2)のはじめの子どもの質問（最初の下線部）は，おそらく平行移動のとき，どちらか一方の点を平行移動してそれが手がかりに線分全体を一気に平行移動できたことから，半回転も同様のことができないかどうかを考えたのであろう。「半回転したから逆さになる」という発言は，向きが逆になること（直線の向きが正反対になること）の認識を示している。

P. 14, 15

三角形を半回転する課題である。15ページは，図形の1頂点を中心として半回転するので，中心が不動点になることが作図を通してわかる。

〈ファイルノート〉

14ページは36名が，15ページでは35名が，課題の条件を満たした作図を行なっている(37名中)。15ページの作図結果をみて，「砂時計」や「りぼん」の形に似ているという発言があった。

＊よくできている。点Bが不動点になることつまり中心が不動点になることは，直接はふれていないが作図から理解されたといえる。授業書ではふれていないが，中心が図形の一部の場合を半回転すると，もとの図形と変換後の図形全体をひとつの図形としてみると，点対称性をもった図形ができることが理解された。両者には変換とみるか(半回転)，対称性とみるか(点対称)の違いがある。

P. 16

半回転の共点性（半回転の中心を探すことにより）を導く課題の後，変換の性質を整理する。辺BC上に任意の点Pをとり，その対応点P′をみつけるという課題を追加する。

〈授業の様子〉

中心を探す問題では，3つの対応点をそれぞれ結んで中心を発見したあとで，「AとA′，CとC′を結べばできる」という発言があった。

（半回転が2つ対応点があれば決定されることを認識したことを示している）

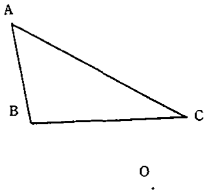
辺BC上の任意の点Pをとり，その対応点P′をみつけるという課題を付け加えた。以下のような方法で作図された。

問題 (1))

△ABCを

点Oを中心に〈半回転〉した

$\triangle A_1B_1C_1$を作図してください。

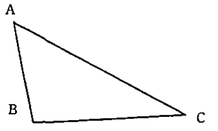


問題 (2))

△ABCを

点Bを中心に〈半回転〉した

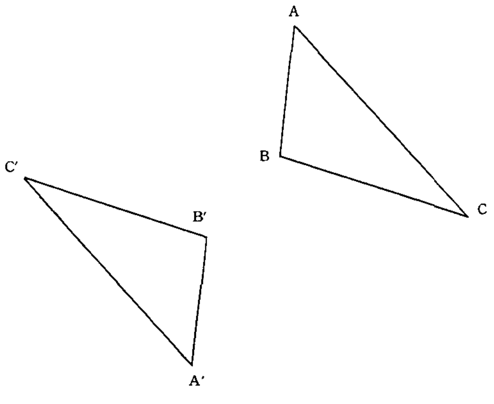
$\triangle A_2B_2C_2$を作図してください。



問題)

△ABCを半回転して△A′B′C′を作図しました。

中心をさがしてみよう。



半回転で重なる図形

- 対応辺が（　　）である
- 対応点を結んだ線分が（　　）で交わり，
  その点が各線分の（　　）になる
- 互いに（　　）な図形である

半回転はホモセティー変換の一つです。

〈ファイルノート〉　追加の問題

(a)　点Pを半回転	(b)　$\overline{OP}=\overline{OP'}$ を利用	(c)　$\overline{PB}=\overline{P'B'}$ を利用	方法不明	無記入
25	5	6	1	2

＊(b)は，辺上の点を半回転すると，対応する辺上に対応する点があることを理解しており，直線OPを延長することなしにP′を作図可能なことを認識したうえでのものである。(c)は，合同な図形であるから，線分の長さが保存されかつ対応する辺上に変換されることを認識したものである。いずれも図形が点の集まりであること，点の集まりが点の集まりに変換されることが認識されたことのあらわれといえる。

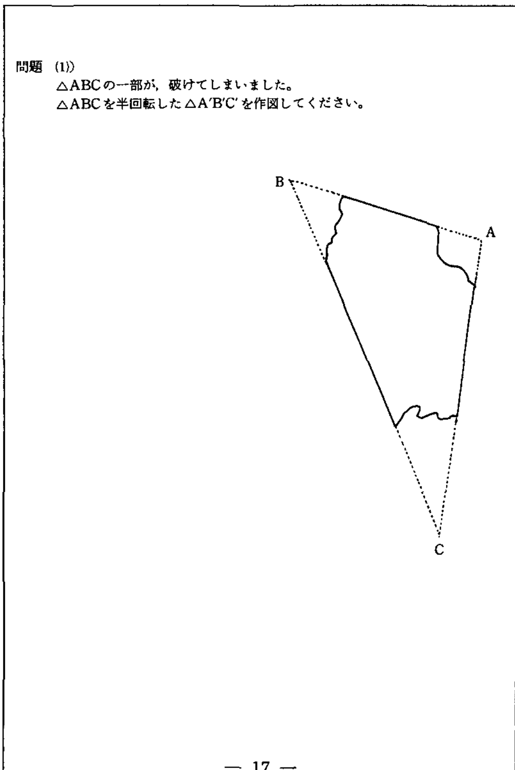
P. 17，18

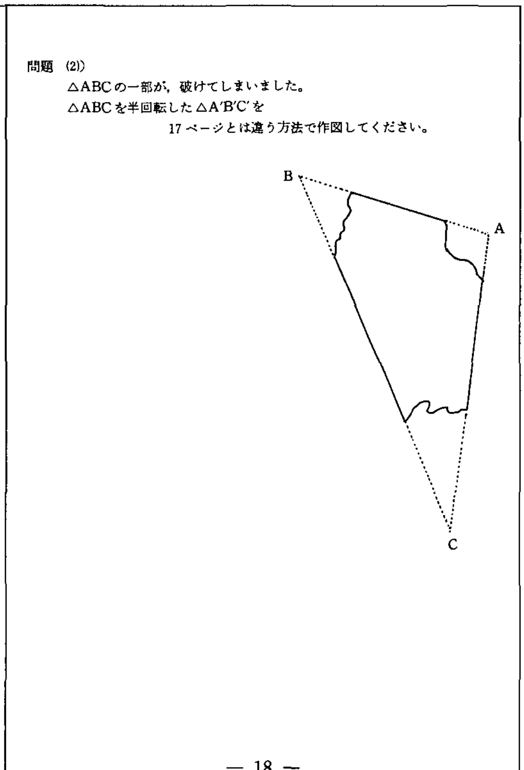
10ページと同様，破れ三角形の問題である。16ページでまとめた半回転の性質を実際に利用して，まず中心の点を自ら設定して半回転する(p. 17)。次に点のみならず，辺を用いた変換の方法を考える（p. 18)。(P17･18は，B4版にして1枚につなげで配布)

〈ファイルノートから〉　17ページ

大半の子どもが，図形外に中心Oを取ったが，中心とする点Oを辺BC上に取り，辺BA，ACの長さをコンパスで取り，頂点A′をとるという方法を2名がおこなった。うち，BC上の中点をとったものが1名おり，この場合B→C′，C→B′となる。結果的に平行四辺形ができ，平行四辺形が半回転で構成されることを導く可能性も示している。

また，18ページの問題で意図したものを17ページで早くも作図しはじめている。





〈ファイルノートから〉　18 ページ―子どもの作図方法

(a)タイプ―1 点を半回転したことを手がかりに，合同であることや対応する辺が平行であることを用いた方法（授業で途中まで説明）　　（24 名）

中心とする点Oをとる

辺 BC に任意に点Pをとり，点OでPを半回転した P′ をとる。P′ をとおり，辺 BC に平行な直線を引く

この直線上に，PB，PC の長さをコンパスでとり，辺 B′C′ をとる

辺 BA，CA の長さをコンパスでとり，A′ をとる

(b)タイプ―合同であることと，対応する辺が平行であることを用いた方法　　（4 名）

直線 BC に平行な直線をとり，長さ BC ぶんをとる。

辺 BA，CA の長さをコンパスでとり，A′ をとる（中心なし）

(c)タイプ―直線（辺）は 2 点で決まることを利用し，破れ目の点 6 点をそれぞれ半回転する方法　　（3 名）

中心とする点Oをとる。破れ目の点 2 点づつ計 6 点を点Oで半回転する。

(d)タイプ―課題の条件を満たしてない作図　　（10 名）

（39＋2 名中―子どもの数より多いのはひとり 2 種類書いた子どもがいるため）

＊さまざまな方法が考えだされた。授業書 10 ページと同様に，一部を隠した図形を変換する問題は，半回転の性質を正確に理解し，応用できなければならない。さまざまな方法を考えだし，いろいろな図形の性質の関わりをみてとれただろう。

P. 19～21

しきつめ図のなかで半回転で重なる三角形を探す問題である。今まで扱わなかった，図形の辺上に中心がある場合，図形の内部に中心がある場合，などを扱うことができる。

〈授業の様子〉

19 ページははじめいくつかの該当三角形があげられたが，授業者の「半回転して重なるかどうかを調べる方法は？」の質問に対し「対応する点を線で結び，中心があるかどうかを見る」方法がだされた。これにより半回転で重なる三角形の残りがつぎつぎに発見された。20 ページも同様に取り組まれ，21 ページでは 19•20 ページで扱った三角形の大きさ以外の三角形を探し，相似比 2 の三角形の半回転で重なりあう三角形が発見された。それより大きい三角形で重なりあう三角形があるのかないのかの議論になり，いくつかの授業者の発問と子どもの討論により「無い」と結論が出た。

第 4 章　中心拡大　(p. 22～33)

〈4 章の内容〉

構成は，ほぼ平行移動・半回転と同様である。ただし，変換の性質を整理したうえでの応用問題のうち，破れ三角形の変換の課題は設定していない。

中心拡大では，対応する点が，中心とする点に対しもとの点と同じ側にある場合，反対側にある場合，のふたつの対応点がある。〈プラスの中心拡大〉，〈マイナスの中心拡大〉という名前で区別する。(p. 23)

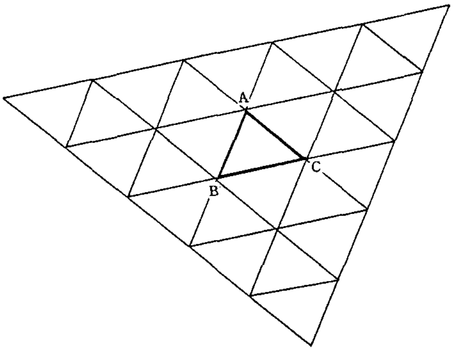
P. 22

〈授業記録〉「この直線上に，3×OP となるような点は，他にありませんか」の課題

問題 (1)

△ABCを半回転して重なる三角形の仲間を探してみましょう。

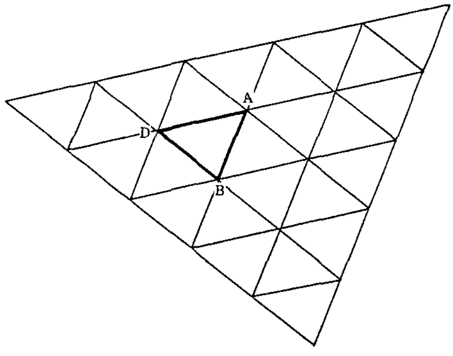
（それぞれの対応する点を結んだ直線は，1点で交わるでしょうか）



問題 (2)

△ABDを半回転して重なる三角形の仲間を探してみましょう。

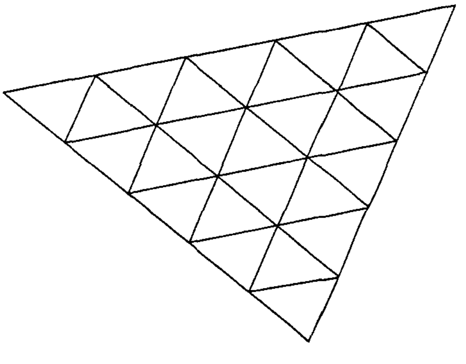
（それぞれの対応する点を結んだ直線は，1点で交わるでしょうか）



問題 (3)

この図のなかに，いろいろな大きさの三角形があります。

半回転で重なる三角形の仲間を探してみましょう。



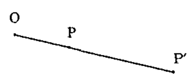
T　もう１回読むよ。「この直線上に3×OPとなるような点，他にないですか？」もうない？
C　ある　／　C　ない
C　この線上にでしょ？　／　C　線加えたりしないの？
T　加えるよね？
C　1 mmずらしたところに付ける。
T　それだめ。
C　線をずらしちゃいけないの？　付け足す。
T　いいヒントだ。どうにかしないともうひとつP′作れないね。この点以外です。線を付け足していい。
（二人，手をあげる）
土岐　（黒板で作図—直線OPをOの反対側に延長する）
T　次に？
田畑　（黒板で作図—コンパスで，上記で延長した直線上にもうひとつP′を取る）
T　はい　どうですか？　これでちょうど3倍になった中心拡大の点です。

〈授業の記録〉　線分の中心拡大の問題

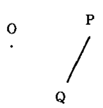
T　2個書いて正解ですよ。
C　どうして1個で駄目なの？
T　どうして？
田畑　2つやり方があるから。
田村　どっちかひとつでいい。2つとも同じなんでしょ。

図のように，1つの点Oをきめ，図形上の点Pを，
OP′=3×OP
となるような点P′にうつすことを，
〈Oを中心とする3倍の中心拡大〉といいます。

・この直線上に，3×OPとなるような点は，他にありませんか。



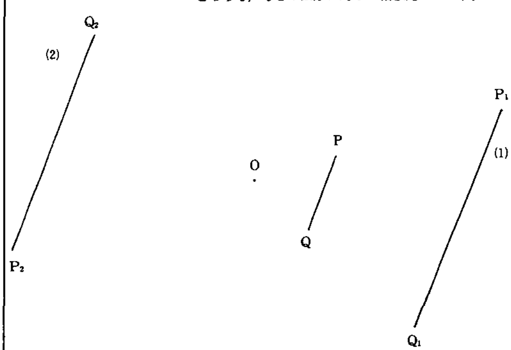
問題）
線分PQを，
点Oを中心に3倍の〈中心拡大〉した線分P′Q′を作図してください。



— 22 —

点（線分）を，1つの点を中心にa倍の〈中心拡大〉すると，
対応する点（対応する線分）が2つ作図できます。

下の図の(1)は，
(1)　対応する点は，中心に対して（　　）側にある
下の図の(2)は，
(2)　対応する点は，中心に対して（　　）側にある
どちらも，もとの図形に対して相似比はaです。



中心拡大の区別の方法
(1)を　［プラスa倍の中心拡大］
(2)を　［マイナスa倍の中心拡大］

ということにします。

— 23 —

松本　距離だけ（OとP，OとQの）3倍して，線（PQ）が3倍になる。どうして？
T　いい質問だ。あとで確かめてみて。
＊田村らの発言（下線部）は，2つの対応する線分があっても，導く方法は同じであることを理解しながらも，2つ導くことの必要性を授業書が示すことができなかったことを示している。
松本の質問は，点P，Qをそれぞれ3倍の中心拡大して線分PQが3倍になるのはなぜかという，中心拡大の定義から性質を導く過程への興味を表している。

〈ファイルノートから〉　線分の変換の課題

課題の条件を満たした作図	24
プラスの中心拡大のみ課題の条件を満たしている	3
マイナスの中心拡大のみ課題の条件を満たしている	3
課題の条件を満たしていない作図	8

少なくともどちらか一方が，課題の条件を満たしているもの；
24＋3＋3＝30名
（38名中）

P. 23
中心に対しての対応する点の位置で，中心拡大の区別の名称を提示する。

〈授業の記録〉

C　なんか，「O」が「0」に感じる。
志田　先生，なんか変だよ。「マイナス3倍」というと1/3倍しているみたい。
C　この時は，こういう勉強しているからいいんだよ。
志田　マイナスだから小さくなるんでないの？
十河　その点を定規でいう「0 cm」のところと考えればいいんじゃないの？
浅野　定規に「0 cm」はないしょ。
（T　黒板に数直線をかく）
T　（数直線をさして）こっちが，プラス，こっちが中学でやるけど，0より小さい数。（中略―マイナスのかけざんの話等）
T　十河が言ったように，プラスとマイナスで数字を考えればいい。Oが真ん中でこっちくるとプラス，Oより左の方にいくとマイナス，そうやって考えると同じ側にあるのがプラス，反対側にあるのがマイナスって考える。
＊マイナスという名称が，「小さくなる」というイメージを一部の子どもにもたれながらも，十河と授業者により数直線などを例に相対的な区別であることが説明された。

P. 24，25
三角形の変換を作図する課題（p. 24）と，その作図をもとに中心拡大の逆変換が，同じ点を中心とする倍率が逆数の中心拡大になることを知る。また，恒等変換の存在，半回転が中心拡大のひとつであること（p. 25）を導く。（24•25ページは，B4につなげて配布）

〈ファイルノートから〉　三角形の変換（24ページ）

	課題の条件を満たしたもの	うち点の名称を入れてない	プラスのみ	マイナスのみ	主に，中心と対応する点を結んだ線分の長さの取り間違い
問題(1)	30	(9)	2	1	5

プラスとマイナスの中心拡大の少なくとも一方；33名　(38名中)

〈授業の様子〉　三角形の変換・逆変換について

［プラス］と［マイナス］によって，図形の向きが変わることに気付いたり［プラス3倍の中心拡大］した三角形と［マイナス3倍の中心拡大］した三角形が合同であり，かつ半回転で重なりあうことに気付いた発言などがあった。

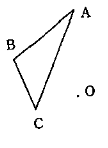
＊変換の相互の関係や性質が導きだされた。

〈感想文の抜粋〉　(逆変換について)

十河陽太「……その疑問とは，『マイナス3倍の中心拡大をした$\triangle A_2B_2C_2$をマイナス1/3倍にする$\triangle ABC$と重なる』という発言がぼくはどうしても理解できなかったのだ。$\triangle A_2B_2C_2$をマイナス1/3倍しても，右の図の$\triangle A_1B_1C_1$($\triangle A_2B_2C_2$を点Oを中心にプラス1/3倍したもの)に重なるだけで，$\triangle ABC$には重ならないのでないか。重ねるにはマイナス4などと表現しなければならないのではないか」

＊十河の感想文は，授業後の彼による質問と同じである。これは，授業書の構成により，中心とする点と対応する点との相対的な位置関係，および中心拡大の倍率と相似比の関係の混乱を

問題 (1))
$\triangle ABC$を
点Oを中心に［プラス3倍の中心拡大］した$\triangle A_1B_1C_1$
［マイナス3倍の中心拡大］した$\triangle A_2B_2C_2$
を，それぞれ作図してください。

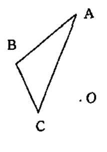


— 24 —

問題 (2))
$\triangle A_1B_1C_1$を点Oを中心に［　　倍の中心拡大］すると，
$\triangle ABC$になります。
$\triangle A_2B_2C_2$を点Oを中心に［　　倍の中心拡大］すると，
$\triangle ABC$になります。

問題 (3))
$\triangle ABC$を点Oを中心に［プラス1倍の中心拡大］しなさい。

問題 (4))
$\triangle ABC$を点Oを中心に［マイナス1倍の中心拡大］した
$\triangle A'B'C'$を作図しなさい。



・これは，（　　　）と同じです。

— 25 —

招いた結果である。これは23ページで，志田が［マイナス＝小さくなる］というイメージをいだき続けて，授業書での意味付けがうまくいかなかったのと同様である。このイメージとの決定的な違い（小さくなるのは，倍率が1より小さい場合であること）を示す（倍率が1より小さい中心拡大の課題）ことが必要だった。

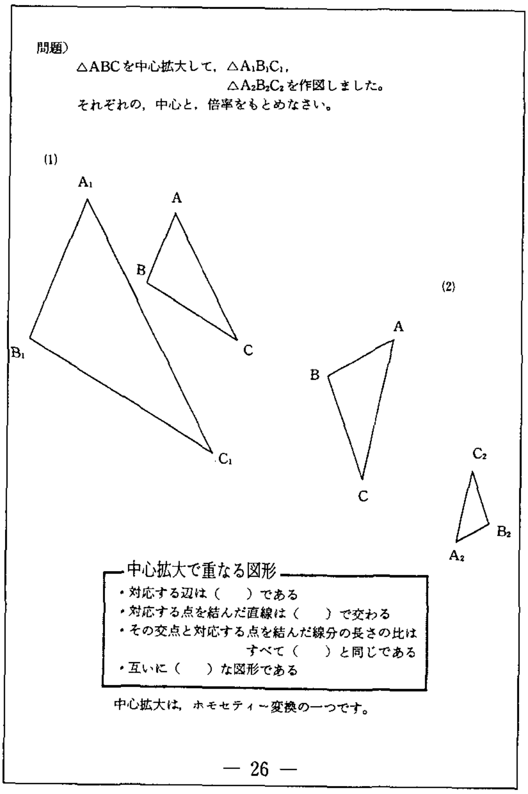
P. 26

中心拡大の共点性(中心を探すことにより)，倍率を調べる課題の後，変換の性質を整理する。

〈授業の様子〉

(2)がプラスの中心拡大か，マイナスかの発問に対して，「反対になっているから」マイナスであること，性質の整理（下の枠で囲った部分）でとくに，（中心拡大でできる図形はすべてのところ）「合同って言っちゃだめなんだよね」という発言もだされた。

*直線の向きが正反対になれば，「マイナスの中心拡大」である，と認識された。また平行移動，半回転のときと異なり，「相似な図形」に変換されることが認識された。



問題）

△ABCを中心拡大して，$\triangle A_1B_1C_1$，

$\triangle A_2B_2C_2$を作図しました。

それぞれの，中心と，倍率をもとめなさい。

中心拡大で重なる図形

- 対応する辺は（　　）である
- 対応する点を結んだ直線は（　　）で交わる
- その交点と対応する点を結んだ線分の長さの比は すべて（　　）と同じである
- 互いに（　　）な図形である

中心拡大は，ホモセティー変換の一つです。

— 26 —

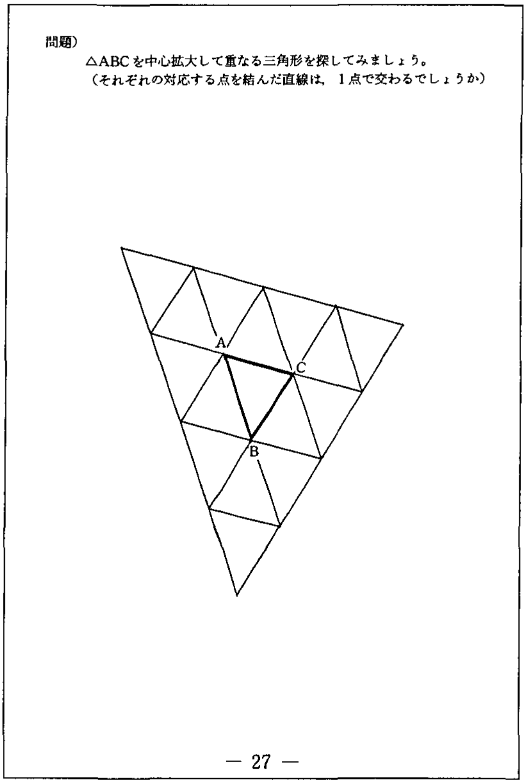
P. 27～33

しきつめ図のなかで中心拡大で重なる三角形を探す課題である。まず，27ページで△ABCと相似ないろいろな大きさやいろいろな直線の向きの三角形があることを導き，見付けた順番で，該当する大きさ（プラス・マイナスn倍の中心拡大した図形）のものをそのあとのページから探し，さらにそれぞれの種類でいくつあるかなどを探す。これは，しきつめ図に存在する三角形を，中心拡大の種類で分類することになる。

〈授業の様子〉

すべて一度に配布し，まず27ページで，△ABCと中心拡大で重なる三角形をあげた。子ど

もはじめ，プラス２倍の中心拡大で重なる三角形をあげたので，プリント 30 ページに記入するように授業者が指示し，以下，「順番にやりたかった」という子どもの指摘に従い，28 ページの「プラス１倍の中心拡大」から順番に行なった。


問題）

△ABC を中心拡大して重なる三角形を探してみましょう。

（それぞれの対応する点を結んだ直線は，１点で交わるでしょうか）

― 27 ―

第５章の変換の合成　(p. 34〜37)

〈５章の内容〉

変換の合成の定義を示し（p. 34），平行移動と平行移動の合成（p. 34），プラスの中心拡大と平行移動の合成（p. 35）で，もとの図形と最後の図形の対応関係を調べる課題である。ホモセティーの合成がひとつのホモセティーになることの例である。

P. 34〜35

〈授業書の解説〉

今まで扱った変換の名称を復習，それらを組み合わせたものが変換の合成であることを説明する。また，34，35 ページの課題は，まず図だけを模造紙に書いたものを黒板にはり，それぞれがどのような変換により作図されたかを口頭で質問，その後，$\triangle ABC$ と $\triangle A_2B_2C_2$ の対応する点や対応する辺などの関係を調べ，それぞれの変換の合成がひとつの変換になることを導く。

〈授業記録〉　34 ページ

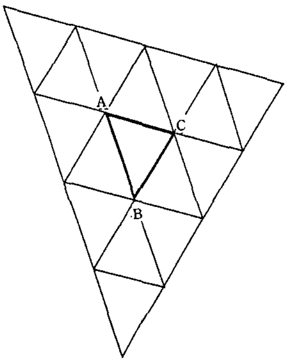
（T　板書

$\triangle ABC \xrightarrow{\text{平行移動}} \triangle A_1B_1C_1 \xrightarrow{\text{平行移動}} \triangle A_2B_2C_2$　）

T　そしたら，この三角形とこの三角形（$\triangle ABC$ と $\triangle A_2B_2C_2$），ABに対する辺はどれですか？

問題 (2))

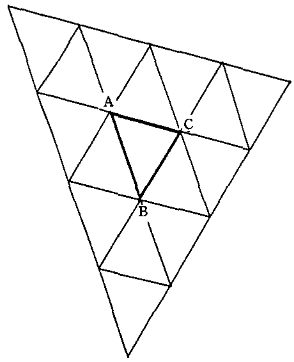
△ABCを［プラス１倍の中心拡大］
したものを探しましょう。



— 28 —

問題 (3))

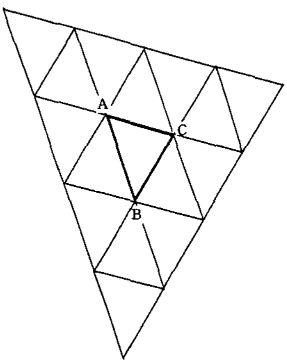
△ABCを［マイナス１倍の中心拡大］
したものを探しましょう。



— 29 —

問題 (4))

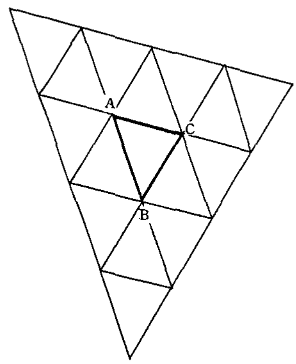
△ABCを［プラス２倍の中心拡大］
したものを探しましょう。



— 30 —

問題 (5))

△ABCを［マイナス２倍の中心拡大］
したものを探しましょう。



— 31 —

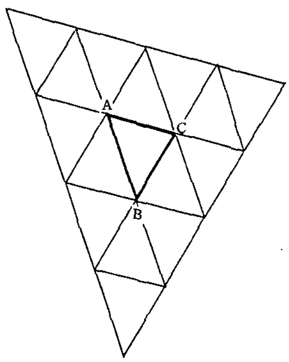
問題 (6))

△ABCを

[プラス3倍の中心拡大],

[マイナス3倍の中心拡大]

したものを，それぞれ探しましょう。



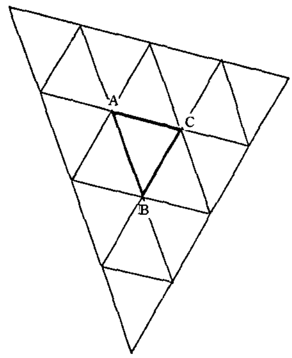
問題 (7))

△ABCを

[プラス4倍の中心拡大],

[マイナス4倍の中心拡大]

したものを，それぞれ探しましょう。



図形を2回以上続けて変換することを，
〈変換の合成〉といいます。

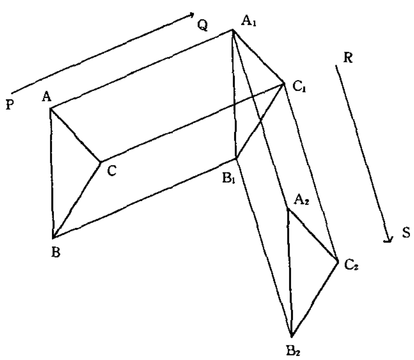
問題 (1))

△ABCが次のような〈平行移動〉と〈平行移動〉の合成で
$\triangle A_2B_2C_2$になりました。

$\triangle ABC \longrightarrow \triangle A_1B_1C_1 \longrightarrow \triangle A_2B_2C_2$

(矢印PQぶんの平行移動)　(矢印RSぶんの平行移動)

このとき，△ABCと$\triangle A_2B_2C_2$の対応関係を調べましょう。



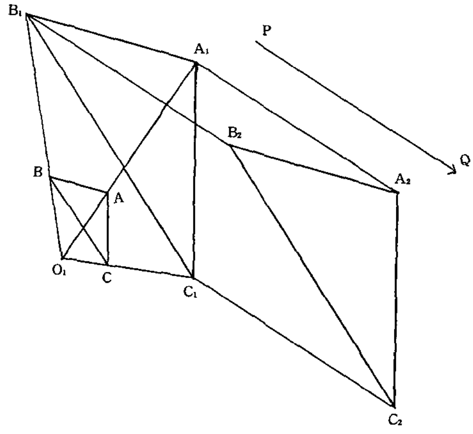
問題 (2))

△ABCが，次のような〈プラスの中心拡大〉と，〈平行移動〉の合成で，
$\triangle A_2B_2C_2$になりました。

$\triangle ABC \longrightarrow \triangle A_1B_1C_1 \longrightarrow \triangle A_2B_2C_2$

(点O_1を中心とするプラス3倍の中心拡大)　(矢印PQぶんの平行移動)

このとき，$\triangle A_2B_2C_2$と△ABCの対応関係を，調べましょう。



佐藤(男)　知らない
T　他に?
畠山　A_1B_1。
T　どの三角形と比べるっていったっけ?
佐竹　A_2B_2
T　はい，この辺とこの辺，どうなっていますか?
鳥山　平行になっている。
T　平行移動して平行移動すると，
対応する辺が平行になっています。
(板書―①対応する辺が平行)
2つめは，対応する点を結んでみます。
(T一黒板の図で，AとA_2，BとB_2，CとC_2を結ぶ)
対応する点を結ぶとどうなってますか?
竹田　平行になっている。
(T　板書　②対応する頂点を結ぶと平行)
T　はい，3つめ，つまり，これ(△ABC)をどうしたことになるの?
C　平行移動
T　大きさはどうなの?
C　合同。
T　つまり，△ABCをどうしたことになるの?
C　平行移動
T　そう。変換の合成。
* 2つの平行移動の合成でもとの図形と最後の図形は,対応する辺が平行になっていることと,合同な図形になっていることから，1つの平行移動になっていることが導かれた。

〈授業の記録〉　35ページ

まず，子どもが各自取り組んでから，発表する。
内藤　ABCを中心拡大すると，△$A_2B_2C_2$になる。
T　なるほど，何倍だと思う?
C　3倍　／　書いてある
T　はい，他に?
十河　△ABCと△$A_2B_2C_2$の対応する辺が平行になっている。
C　平行って，同じ長さになってないと駄目なんでないの?
T　そうだっけ?　言わない?
C　言う　／　言わない
T　言うと思う人?
言わないと思う人?　(5，6人)
T　こたえ一言うんです。
理由説明できる人いますか?
竹田　上の線と下の線が垂直に交わっている。
中野　(聞き取れない)

T　だから，長さが違っても対応辺が平行になっている。
もうひとつ気付いてほしい。定木を使う。

中野　相似になっている。

T　うん，他に②のこと（34ページでまとめた②のこと）対応する点を定木で結んでごらん。線をのばしてごらん。
（子ども一作業）（田中一もう気付いている）

T　どっちに線をのばしたの？

C　右　／　左に決まっている

T　どうなりました？

C　平行四辺形ができる。　／　三角錐だ。
（T一　黒板の模造紙の図で△ABCと△$A_2B_2C_2$の対応点を結ぶ）
模造紙の大きさが足りなく，3直線の交点をその上にマジックでかけない）

T　この先どうなると思いますか？

C　その先，チョークで書けばいい。

C　残念な結果におわった。／　自信ない

伊藤　最後には交わる。

T　はい，交わった？

田中　たったそれだけかい？

T　たったそれだけだけどそれだから③のことが言える。
はい，なんとかここで交わりました。点Oとします。（板書一②）

T　自分の書いたことと違ったら，足しておいて。

＊中心拡大と平行移動の合成は即座に中心拡大であることが導かれた。ホモセティーの合成の1つが1つの変換になることが34ページでわかったので，ここでもそれを考えよう，という流れになった。ただし，「対応関係を考えましょう」では，必ずしも変換の合成がひとつの変換になることは気付かないかもしれない。

P. 36

マイナス2倍の中心拡大と中心の異なるマイナス3倍の中心拡大の合成の作図である。△$A_1B_1C_1$，△$A_2B_2C_2$をそれぞれ順に作図し，そのあと，△ABCと△$A_2B_2C_2$の対応関係を考える。それらがひとつの中心拡大で変換されること，その中心が，最初の2つの変換の中心と同一直線上にあること（中心の共線性）を導く。

〈授業の記録〉　（課題の作図終了後）

（子どもどうし相談しながら取り組んだ。34名が作図を終了（36名中）している）

T　さあどういうことがわかるか，まとめます。△ABCと△$A_2B_2C_2$がどうなっているか調べます。対応点を結んでみてください。
（子ども一対応点の確認，および，対応点どうしを結んでみる）

C　ややこしくない？　すごく汚い。

T　それ，どうしたらいい？

C　のばす。

T　AとA_2を結んでもなにもないけど，BとB_2を結ぶとどうなりました？

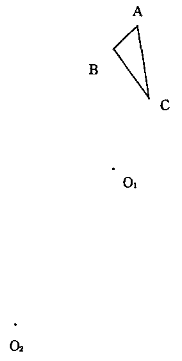
伊藤　交わった。

問題 (3))

$\triangle ABC \longrightarrow \triangle A_1B_1C_1 \longrightarrow \triangle A_2B_2C_2$

（点 O_1 を中心とする マイナス2倍の 中心拡大）（点 O_2 を中心とする マイナス3倍の 中心拡大）

として，$\triangle A_2B_2C_2$ を作図しましょう。



— 36 —

問題(1)，(2)，(3)の他にも，

いろいろな〈ホモセティー変換の合成〉を考えることができます。

たとえば，

(4) 点 O_1 を中心とするプラス2倍の中心拡大と
点 O_2 を中心とするマイナス3倍の中心拡大　の合成

(5) 点 O_1 を中心とする半回転と
点 O_2 を中心とするマイナス2倍の中心拡大　の合成

(6) 点 O_1 を中心とするプラス2倍の中心拡大と，
点 O_2 を中心とするプラス $\frac{1}{2}$ 倍の中心拡大　の合成

(7) 点 O_1 を中心とする半回転と
矢印PQぶんの平行移動　の合成

などなど ……。

やってみたい人は，自分で(4)～(7)の他にも問題を考えて，定規とコンパスを使って遊んでみてください。

〈ホモセティー変換〉の世界の探険は，
いかがでしたか？

それでは，さようなら!!

— 37 —

T　交わった人？（かなり，正確に作図しているので，交わった子どもは多い）できたのを点Oとしてください。

C　点Oってはじめからできてない？

C　それは O_1。

T　いいところに気付いたね。はじめっからはないの。つまり，△ABCをどうしたことになるの？

C　拡大　／　縮小　／　拡大

T　そのあと，すごくびっくりするところがあります。先生もびっくりしました。

C　すべての点を結ぶ。

神成　点Oと O_1 と O_2 を結ぶ。

T　やってみよう？

（子ども一作業）

T　はい，どうなりましたか？

浅野　直線になった。気付かなかった。

C　すっげー驚いた　／　C　あーびっくりした。

T　はい，Oと O_1 と O_2 を結ぶと一直線になります。

〈感想文の抜粋〉

児玉有美子「……最後の方でやった変換の合成は△ABCから $\triangle A_1B_1C_1$ をやって $\triangle A_2B_2C_2$ を作ると，また△ABCと同じ向きの図形になることが不思議でした」

＊「点Oってはじめからできてない？」という発言は，変換の合成の不思議さを表していると思

う。また神成の発言は，共線性の発見である。実際に点を結ぶと同一直線上に中心の3点がある。多少誇張気味にせよ，大変驚いている。また児玉の感想は，直線の向きを正反対にするマイナスの中心拡大を2回繰り返せばもとに戻ることについての驚きである。

P. 37

いろいろなホモセティー変換の合成を調べる課題である。いろいろな合成があること，それらの面白み，幾何学の美しさ，等を感じとることができる。

4つの課題を班ごとに分担し，OHPでその結果を発表する。

〈授業の記録〉　問題(6)　プラス2倍の中心拡大とプラス1/2倍の中心拡大の合成

（予定時間を大幅に超えていたため，問題(6)のみ口頭で討議し終了した）

T　(6)ならどんな形になる？

C　もとに戻る　／　C　普通になる　／　C　同じ

T　この場合，自分で点を考えてやってみましょう。

〈感想文の抜粋〉

前田真里「……はじめはよくわからなかったけど1つの三角形がこんなに変わるのかと思うともっとやってみたいです」

＊時間が切迫していたので，いそぎ口頭での討議だったが，中心の異なる2つのプラスの中心拡大で，一方の倍率が2倍，もう一方が1/2倍のとき，大きさが「もとに戻る」「同じ」であることが理解された。また前田の感想文は，変化の合成による図形の変換に興味を示したものである。

3　実践の結果から

卒業式前の忙しい時期での実践，また授業書が当初予定していた時間枠よりも長い実施時間を要するものとなったため，授業者には多大な負担をかけることになった。しかしそのようななかで，授業書の不十分さ・授業者との打ち合せ不足といった問題はあるが，ほとんどの授業は成功的にすすめられたといえる。

到　達　点

この実践によって，以下のいくつかの結論を導くことができたと思う。

(1)　子どもは，変換の性質を調べることを通して，さまざまな図形の性質を導きだし，そのかかわりを知ることができ，さらに複数の図形の性質の併用（相互関係ともいえる）という高度な応用が可能なこと。

たとえば授業書の個々の変換の性質を導く過程で，図形の性質の相互関係とでもいいうるもの，たとえば，図形が点の集まりであることに最初疑問を持ちながらも，図形の辺上の任意の点が対応する辺上の点に移ること，平行四辺形の性質が平行移動を成り立たせていること，図形の向き，不動点の存在，半回転と点対称の相互関係，平行の定義の拡張の利用，など，この授業書を通して導き得ることが証明されたといえる。また破れ三角形の問題，しきつめ図の問題なども同様である。相似・合同・平行の同値関係は，提示の仕方が単調だったにせよ，そのあとの問題で適切に活用され，数学の基礎的概念を十分に認識することができることを示している。変換の合成では，共点性のみならず共線性をも導きだし，「図の美しさ」のようなものを

自ら発見することができた。

(2) 授業書全体の順序構成の妥当性

〈(1)ホモセティー変換の定義，(2)平行移動，(3)半回転，(4)中心拡大，(5)変換の合成〉という順序構成により，とくに(2)(3)(4)に関しては，最初に述べた仮説が検証されたといえるだろう。平行移動は，イメージとしてはもっとも身近なものであるにせよ（合同で向きが変わらない）変換の方法が難しかったことを作図が示している。半回転は方法が簡単であり合同な図形になるが，向きが変わることに不思議さを感じたことが授業記録からみられた。中心拡大はこのふたつの性質を導いたあと初めて大きさをかえる変換として，方法は理解しながらも，それにより「何故線分が3倍になるのか」という見事な質問がでた。時間的事情のため変換の合成は省略したところもあったが，その幾何学的美しさ，その不思議さを感じとったことを，感想文からよみとることができた。

・授業書の構成に関する問題点

(1) 変換で変わるものと変わらないものがあることを考え，それからホモセティー変換を位置付ければ，変換の世界の広さを導入部分から伝えることができたかもしれない。

(2) しきつめ図の問題の不備（授業書 p. 11，12，19～21，27～33）

多くの線が入り交じるため，子どもの書き込み用のしきつめ図をたくさん用意するべきであった。これは授業者の柔軟な対応により，同じページを増刷するなどでなんとかその場をしのいだが，授業書の不備である。

(3) 中心拡大における1より小さい倍率の課題を設定しなかったこと

授業書25ページの問題(2)（逆変換）に対しての子どもの混乱を引き起こした原因はこれにある。

(4) 恒等変換の位置づけが不十分だった。

まえもって提示し，そのうえでそれぞれの変換でどういう場合が恒等変換になるのかを考える機会を設けたほうが有効だったろう。

(5) 変換の合成（授業書 p. 33～34）がひとつの変換になることは，「対応関係を調べましょう」という課題では必ずしも明らかにならない。課題の設定を再考慮する必要がある。

・子どもの感想文

以下に，この授業書全体について，子どもの感想文から引用したものをのせる。

東　正恵「……わかるのもあればわかんないものもあるけど，とても楽しく，わかりやすい勉強でした。まだもう少しこの勉強をやってみたいなあと最後に思いました」

伊藤梨乃「自分のためにもなったし，いつもの勉強より楽しかったです…ちょっぴりかしこくなったような気がします」

稲見友美「わたしは，この勉強をして，こんなに楽しく勉強ができることがわかりました。平行移動，半回転，中心拡大これが全部ホモセティー変換なんで，すごいというか，口ではうまくいえないです…プリントを大切にもっていて，これから勉強にやく立てたいです」

大井美和江「中学で役立つのでとてもよかった」

大島陽奈「勉強は勉強でも，こうゆう勉強は今までにはなかったけど，おもしろかったです」

久保阿由美「最後の方にくるとコツがつかめてすらすらとできるようになりました。卒業する

前にとてもいい思い出になりました。ありがとう先生!!」

栗原千穂「いちばん面白かったのは授業そのものみんなでいっぱい笑ったり，いろんな考え方を見付けたり，みんなできているのに，自分はできなくて，あせったり。算数って計算とか，単位のとか，なんかわけわかんないのが結構多いから，あんまり好きじゃないけど，この授業は楽しかったなぁ。こんな楽しい授業を用意してくれた先生に，感謝，感謝，どうもありがとう」

児玉有美子「最初にこのプリントを見たときはめんどくさくていやだったけど，もっともっと図形のことを知りたいと思いました」

佐藤弥幸「図形の勉強をしたとき，別にやらなくてもいいならやらないほうがいいと思っていました。でもいろいろしているうちに…だんだんやってよかったなと思いました。…平行移動，半回転，中心拡大，をおぼえていれば，今度やるときに役立つと思います」

土岐小百合「難しかったところもあるけど思ったよりは難しくはなかった。自分で考えて発表するのが好きなので，この勉強はとても面白かったです」

内藤端華「わかりやすく教えてくれたので，だいたいわかりました。楽しく勉強できたのでよかったです」

成田陽子「三角定規，コンパスの利用の仕方も深く理解することができました」

広瀬　雪「友達のやり方などをきいて，勉強になったので，とてもためになった。またホモセティー変換を勉強したい」

前田真里「図形を自由にあやつれて，面白いなぁと思った」

門馬かおり「図形の世界は，空より広いということがわかりました」

小畠晴美「大学生が勉強する内容が入っているときいて，とてもびっくりしました。この勉強はどこかできっと役に立つと思います。とても楽しい勉強でした」

浅野祥明「まあまあおもしろかったんでないですかねぇ。…まあまあよくできたと思うたのしかった」

神成篤史「ぼくは，始め，ホモセティー変換のことを聞かされてもぜんぜんわからなかったし，始めのころは，わかろうともしていなかったです。しかし，少しずつ勉強をしていくとだんだんわかっていき，わかろうともしなかった心がどこかに行ったようでした。…その算数の勉強が終わる時，ふうーやった終わったと思いました」

佐々木知徳「……ファイルがもらえてうれしかった。」

笹森大輔「図形の勉強をするとき，ぼくは，図形ならかんたんそうだと思っていたけど，じっさいやってみると，けっこうむずかしかったです。…おわってみると，こんなにやったのかと思いました」

佐竹将哉「須田先生がわかりやすく教えてくれたので，いつか役に立つと思います。ビデオも見たり，先生のおしえかたがうまかったのでよくわかりやすく，りかいできて，ぼくはうれしいです。おしえてくれてありがとうございます。」

佐藤健太郎「図形の勉強をして最初は，あんがい，かんたんだったけど，と中から，むずかしくなってめんどくさくなったけど,後から思ってみるととてもためになったなと思いました。…最後の方の勉強はわかったので，たのしくなりました」

志田智史「やっていくうちに，奥が深いということがわかった…この勉強は中学校の先取りもできたし，楽しくよくわかったのでよかった」

田中淳一「またこんど勉強する機会があればまた勉強したい」
田村泰輝「ぼくは，この勉強をしていろいろなことがわかったと思いました。けっこう楽しかったです」
十河陽太「…多少疑問が出てきたものの，新しい図形の世界をのぞいたということは，中学にはばたいてくぼくたちにとって，とてもよい材料になってとてもよかったと思う」
鳥山邦彰「小しむずかしかったけど楽しかったです」
中野智文「ホモセティー変換がなんだかしらんが教科書とかん係ないのにやられたらいかる。…だいたい半分いじょうがわかったからましだった。これが中学，高校で役に立つかどうかはわからんが，頭の中にたたきこんでおいてやろう。」
原武浩二「教科書よりとてもたのしい勉強でした。…とても楽しかったです」
松田裕樹「はじめの頃，この勉強をやっていたとき，新しい世界に入っていくように感じました。いつもやっている勉強とは，どこかが違って，他の勉強時間より集中していました。終わりのころにはもうはや終わってしまったんだなぁと思いました…卒業して中学にはいっても，六年生の時にやった，特別な勉強は役に立つと思います。役に立った勉強は，おもしろく，役に立った勉強でした」
吉田大祐「この勉戦は中学にいってもやくにたつので勉強してよかったです」

本授業書の名称は，実践終了後ファイルノート回収の際に表紙として付け足すとき彼らにしらせる予定だった。しかし回収したファイルノートの表紙には「新しい図形の世界」という題名（またはそれに類似する題名）が，子どもたち自らの手で（勝手に）書き込まれていた。実験授業を受けた子どもたちが感じ取った「テーマ」である。これもひとつの到達点といえるだろう。

さいごに

授業書「ホモセティー」は，北大教育学部数学グループ（須田勝彦，前田輪音）で，約４カ月にわたる検討により作成された。前田の原案を検討し，さらに検討をもとに数度の検討をかさね，何度も全体の構成を変えながら、作成された。

実験授業において，授業者の須田智恵子氏には，日程的にもかなりの無理をお願いしたにもかかわらず，複数回の打ち合せ（実践に際しての手直しの必要な箇所の指摘を含む）の機会を設けてくださり，実験授業を行なってくださった。須田和恵氏（現東海第四高校３年生）からは実践に際してのいくつかの提案がなされた。

授業書の検討，実験授業の報告の検討には，須田勝彦を始め北大教育学部教育方法学研究室のメンバー，特に高村泰雄氏に，授業書の検討および授業記録からの分析にあたっては，数学教育協議会算数・数学教育ゼミナール（現小学校教諭）のメンバーの亀廼井宏幸氏，栗島史子氏，佐々木和子氏，長沢達也氏，堀岡武氏，吉田陽一氏，増田忠之氏，二階堂充氏，大竹健一氏，その多くをおっている。また北星学園余市高校数学部会の1993年春合宿におても，分析，検討いただいた。山口格氏(室蘭工業大学)には1993年７月の数教協北海道大会，および11月の合同の教研での実践報告において，検討いただいた。

コンピュータグラフィック作成者高橋哲男氏(現北大教育学部４年)，忙しいなかをぬってパソコンの面画をビデオにコンバートしてくださった若菜博氏（教育大岩見沢）には，教育機器

の便利さをさまざまな角度で教えていただいた。成田雅博氏（山梨大学）からもこの点に関し，貴重な資料等をいただいた。

1992年度札幌市立澄川小学校6年3組の子どもたち39名の功績（思考というべきか？）なくしてこの実践報告はできなかった。

記して感謝する次第である。

本論文での事実の誤認，および誤った記述があれば，筆者の責任である。おわび申し上げる。

なお，本論文は1993年3月の北海道教育学会，同年7月の北海道地区数教協大会，および同年11月の北海道合同教研での発表を加筆，修正したものである。