



HOKKAIDO UNIVERSITY

| | |
|------------------|---|
| Title | トレミーの定理について |
| Author(s) | 村守, 隆男 |
| Citation | 教授学の探究, 13, 101-122 |
| Issue Date | 1996-03-25 |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/13596 |
| Type | departmental bulletin paper |
| File Information | 13_p101-122.pdf |



トレミーの定理について

村 守 隆 男

(北大理学部数学科)

1 はじめに

第二(あるいは、後期)アレクサンドリア学派の一人であるトレミー(Claudius Ptolemaios, クラウディウス・プトレマイオス, A. D. 85-165)は、エジプト生まれのギリシャ人であり、数学者、天文学者、物理学者、地理学者、和声研究者として知られています。特に、著書「アルmagest」(数学大系)の中で、天動説を提唱し、これが中世ヨーロッパの宇宙観を支配しました。彼はまた、三角法の諸公式を発見しました。(cf. Heath [5]) トレミーの定理として知られている次の平面幾何学の定理は、特に有名です；

定理 (トレミー)

凸四角形 $ABCD$ が円に内接していれば、 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ 。

なお、この定理は、逆も成立します。

四角形 $ABCD$ について、 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ をトレミーの公式と呼ぶことにします。

トレミーは、三角法の加法定理を導くための補題として、この公式を利用しました。トレミーの定理の証明の方法はいろいろあり、初等幾何学や三角法を指導する上からも参考になるのではないかと思ひ筆をとりました。

ここでの術語の使い方として、平行四辺形の場合を除いて、通常の上四角形を**四角形**で統一することにします。従って、等辺四角形は菱形、等角四角形は長方形、等辺、等角四角形は、正方形とします。

2, 3 節では、初等幾何学とトレミーの定理の証明の方法について解説します。4 節では、トレミーの定理の各証明の概略を示し、同時にトレミーの定理を、ある種の恒等式、複比、三角法の加法定理という三つの観点から説明します。5 節では、トレミーの定理の特別な場合と、定理の拡張について考えてみます。次の結果が得られる。

定理 1

凸 $n (> 3)$ 角形 $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_n$ が円に内接するためには、頂点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ の中からとった 4 頂点で作られる凸四角形が、いずれもトレミーの公式を満足することが必要かつ十分である。

定理 2

四面体 $ABCD$ について次の不等式が成り立つ

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD.$$

6節では、トレミーの定理と定理2の数値計算のプログラムを掲載します。

謝辞 このテーマは、北大教育学部教育方法論講座の須田勝彦教授の示唆に負う所が大きく、先生からは秋山武太郎著「平面幾何学」を利用させていただきました。感謝する次第です。また、同講座の大学院生高橋哲男氏とは、e-mailを利用して定義や証明を検討することができました。合わせて感謝する次第です。

2 初等幾何学の証明の方法

ここで初等幾何学とは、ユークリッド平面、あるいは、3次元ユークリッド空間における図形の研究ということにします。数学の発達によって、証明の方法もより簡単で、美しい(elegantな)証明が探求されています。以下の分類は、筆者による暫定的なものです。

1. 総合幾何による方法

直線、三角形、円等の図形そのものの性質を主に利用して証明するタレス以来の方法。

2. 変換幾何学の方法

この方法は、ギリシャ数学の比例論に遡ることができるくらいに古くからある方法です。1872年にF. Kleinが変換群に従属する幾何学による幾何学の統一を提唱して以来、その重要性が再認識されています。比例、合同、相似、反転、一次分数変換、射影などを利用した証明が、これに含まれます。

3. 三角法

三角法は、歴史的にはヒッパルコス(Hipparchus, B. C.160-100)に始まります。この方面の研究は、天文学的要求により、まず球面三角法から始まりました。トレミーの定理も、ヒッパルコスがはじめに発見したといわれています。(Heath [5]) 正弦定理、余弦定理、積和公式などさまざまな定理、公式が証明のために利用されます。

4. 座標による方法

17世紀、フランスのデカルトによって、座標の概念が発見されました。これによって、図形の性質を代数的に計算で解くことが始まりました。複素座標を利用する方法もこの延長上にあるといえます。座標の概念は、19世紀後半に始まった図形の概念の拡張概念とも考えられる多様体の研究にも重要な役割を演じています。

5. 微積分学による方法

17世紀の後半に、ニュートンとライブニッツによって微積分学が発見されました。微積分学によって、直線図形の研究だけでなく、滑らかな図形の性質をもより詳しく調べることが出来るようになりました。さらに、動きのある図形の性質や、曲線の長さ、図形の面積、体積などの計算が以前に比べて、格段と容易になりました。

6. 線形代数による方法

19世紀後半に始まる線形代数の手法によって、行列、行列式、ベクトル、テンソルなどの概念を使って多量の数、図形を統一的に扱えるようになりました。

3 トレミーの定理の証明の方法

トレミーの定理の証明は、次のような総合的方法、変換、三角法、座標を使う方法がありま

す。筆者は、第一余弦定理、ベクトルによる方法も試みましたが成功していません。

1. 総合幾何による方法

少し知識が必要であるが、シムソンの定理を援用して証明する。

2. 変換幾何による方法

(a) 三角形の相似を使う 2 方法

補助線を使って、二組の相似三角形を作り、相似比から結論を導く。簡潔で、非常に美しい証明。

(b) (射影変換の) 複比を使う方法

円周上の 4 点の作る複比が変わらないという事実と、複比についてのオイラーの定理を使う方法。射影幾何学からトレミーの定理が理解できる。非常に美しい証明。

(c) 反転 (inversion) を使う方法

円周上の点を反転の中心にとり、他の 3 点を直線上の点に変換する方法。トレミーは反転を知っていたらしい。非常に美しい証明。

3. 三角法による方法

(a) 正弦定理を使う方法

積和公式を利用する。

(b) 第二余弦定理を使う 2 方法

角度と長さの両方から証明できる。

4. 複素数の偏角を使う方法

恒等式を利用する。

5. 座標と、線形代数の行列式を使う方法

四次の行列式を利用する。

4 トレミーの定理の各証明の概略

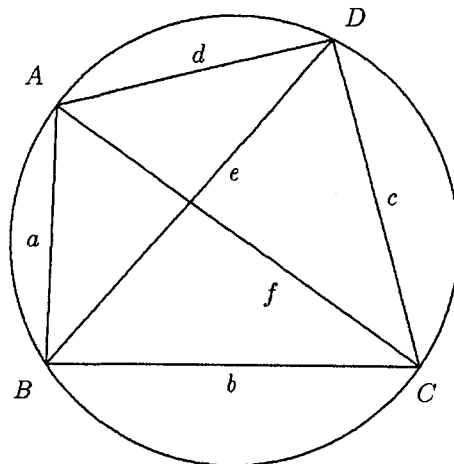


Fig. 1

3 節で掲げた証明方法に従い、トレミーの定理の証明の略解をします。この節の証明には、岩田 [1,2] が参考になる。

以下、この節では、半径 r の円に内接する四角形を $ABCD$ 、各弦の長さを、それぞれ、 $AB=a$ 、 $BC=b$ 、 $CD=c$ 、 $AD=d$ 、また、 $AC=e$ 、 $BD=f$ とおく。(Fig. 1)

1. 総合幾何による証明

定理 (シムソンの定理, 証明については [1], p 246)

一点から三角形の各辺に下した垂線の足は、その点が外接円周にあるとき、また、そのときに限って共線である。

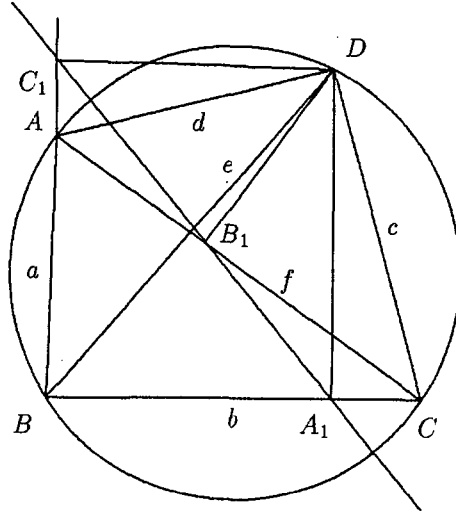


Fig. 2

補題

任意の点 P から三角形 $\triangle ABC$ の辺 BC 、 CA 、 AB または、その延長上に下した垂線の足をそれぞれ、 A_1 、 B_1 、 C_1 、また、 $PA_1=x$ 、 $PB_1=y$ 、 $PC_1=z$ とする。三角形 ABC の外接の半径を r とする。この時、次の公式が成り立つ。

$$B_1C_1 = \frac{BC}{2r} \cdot x$$

$$C_1A_1 = \frac{CA}{2r} \cdot y$$

$$A_1B_1 = \frac{AB}{2r} \cdot z.$$

証明

正弦定理より明らか。q. e. d. of 補題

トレミーの定理の証明 (Fig. 2)

点 D から三角形 ABC の各辺またはその延長上に下ろした垂線の足は、シムソンの定理によって共線であって

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1.$$

A_1B_1 , B_1C_1 , A_1C_1 に上の補題を適用して

$$a \cdot CD + b \cdot AD = e \cdot BD,$$

$$\therefore ac + bd = ef.$$

2. 三角形の相似による証明 1 (必要十分条件)

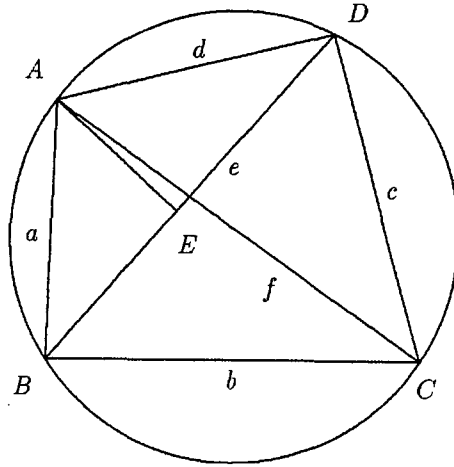


Fig. 3

必要条件

対角線 BD 上に一点 E を $\angle BAE = \angle CAD$ となるようにとれば, $\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ は, 対応する二つの角が等しいから相似である。(Fig. 3) 今, $BE = f_1$, $DE = f_2$ と置けば

$$\frac{a}{f_1} = \frac{e}{c},$$

$$\therefore a \cdot c = e \cdot f_1$$

また, $\angle BAC = \angle EAD$ となるから, $\triangle ABC$ と $\triangle AED$ は, 対応する二角が等しいから相似である。従って

$$\frac{b}{e} = \frac{f_2}{d}$$

$$\therefore b \cdot d = e \cdot f_2.$$

以上, 二式の和をとると

$$a \cdot c + b \cdot d = e \cdot (f_1 + f_2) = e \cdot f.$$

注意

点 E を, BD 上にあると仮定しないで, $\angle BAE = \angle CAD$ と, $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ を満たす点としても同様の仕方で証明することができる。

十分条件

三角形 $\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ が相似となるように点 E をとり, $BE = f_1$ と置けば $a \cdot c = e \cdot f_1$.

すると、 $\triangle AED$ の $\triangle ABC$ (\because 二辺比挟角相等) となるから $DE=f_2$ と置けば $b \cdot d = e \cdot f_2$ ところが、仮定により $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$ であるから、 $f_1 + f_2 = f$ によって、点 E は BD 上になくはならない。ところで $\triangle ABE$ の $\triangle ACD$ であったから、結局

$$\angle ABC = \angle ACD.$$

ゆえに、四角形 $ABCD$ は円に内接する。

3. 三角形の相似による証明 2

BC の延長上に点 E を $\angle EAB = \angle CAD$ となるようにとって、前 2. の証明と同様の仕方により容易に証明できる。

4. 複比による証明

円周上の 4 点のつくる複比は一定であること、さらに、オイラーの定理により

$$(AD, BC) = 1 - (AB, DC).$$

これより

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = 1 - \frac{AD}{DB} : \frac{AC}{CB},$$

ゆえに

$$\frac{AB \cdot CD}{BD \cdot AC} = 1 - \frac{AD \cdot CB}{DB \cdot AC},$$

すなわち

$$AB \cdot CD + AD \cdot BD = BD \cdot AC.$$

注意

円周上の 4 点の作る複比の不変性が、トレミーの定理の射影幾何学的意味である。

5. 反転による証明

点 D を反転の中心とする反転(反転の半径を R とする)により、考えている円は直線に移る。この直線を l とする。また、点 A, B, C の反点を、それぞれ、 $A', B', C' \in l$ とすれば、反転の公式により

$$A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{DA \cdot DB}$$

$$B'C' = BC \cdot \frac{R^2}{DB \cdot DC}$$

$$C'A' = CA \cdot \frac{R^2}{DC \cdot DA}$$

(この公式は、反転の定義と三角形の相似を使って容易に示すことができる)

三式の和をとると

$$\begin{aligned} 0 &= A'B' + B'C' + C'A' \\ &= \frac{R^2}{DA \cdot DB \cdot DC} (AB \cdot DC + BC \cdot DA + CA \cdot DB), \end{aligned}$$

これより

$$AB \cdot DC + DC \cdot AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

6. 正弦定理による証明

弦 a, b, c, d に対する円周角を、それぞれ、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする。(Fig. 4) 仮定より

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma, \quad d = 2r \sin \delta$$

$$e = 2r \sin(\gamma + \delta)$$

$$f = 2r \sin(\beta + \gamma).$$

従って、問題は

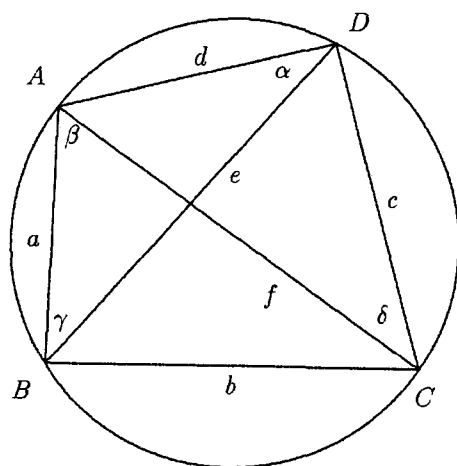


Fig. 4

「 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2 \angle R$ の下で

$$(*) \quad \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \delta = \sin(\gamma + \delta) \sin(\beta + \delta)$$

が成り立つ」

ことを証明するということになる。ところで、三角法の積和公式を使って (*) の左辺、右辺を各々計算すると、共に

$$\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha - \gamma) + \cos(\beta - \delta) \}$$

となることが容易にわかる。

7. 第二余弦定理 (角) による証明

第二余弦定理により

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B$$

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$$

一方、次の公式が成り立つ

補題 (cf. [1], p 252)

円に内接する四角形 $ABCD$ について

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ab + bc)}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

前二式と、補題により

$$(ef)^2 = \left\{ a^2 + d^2 - 2ad \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} \right\} \left\{ a^2 + b^2 - 2ab \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} \right\}$$

$$= \frac{(ad + bc)(ab + cd)(ac + bd)^2}{(ad + bc)(ab + cd)},$$

ゆえに

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d.$$

8. 第二余弦定理 (長さ) による証明

第二余弦定理を使うと直ちに次の公式が成り立つ

補題 (cf. [1], p 252)

$$(*) \quad e = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}$$

$$(**) \quad f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}$$

(*) の証明 ((**) は同様にできる)

三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ に第二余弦定理を適用すると

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B$$

$$= c^2 + d^2 - 2cd \cos D.$$

$\angle B + \angle D = 180^\circ$ であるから $\cos B + \cos D = 0$.

ゆえに

$$e^2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} \right) = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{abcd}$$

すなわち

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}. \quad \text{q. e. d. of } (*)$$

(*), (**) の辺ペンを掛け合わせると、直ちにトレミーの定理が得られる。

9. 複素座標による証明

複素平面上で点 A, B, C, D の複素座標をそれぞれ a, b, c, d とすれば、恒等式

$$(*) \quad (a - b)(c - d) + (a - d)(b - c) = (a - c)(b - d)$$

が成り立つから

$$(**) \quad \frac{(a-b)}{(a-c)} \cdot \frac{(c-d)}{(b-d)} + \frac{(a-d)}{(a-c)} \cdot \frac{(b-c)}{(b-d)} = 1.$$

A, B, C, D は同一円周上にあるから $\angle bac = \angle bdc$, $\angle cad = \angle cbd$. ゆえに

$$\arg \frac{a-b}{a-c} + \arg \frac{c-d}{b-d} = 0$$

$$\arg \frac{a-d}{a-c} + \arg \frac{b-c}{b-d} = 0,$$

すなわち, $\frac{a-b}{a-c}$ と $\frac{c-d}{b-d}$, $\frac{a-d}{a-c}$ と $\frac{b-c}{b-d}$ は共役複素数であるから (**) の左辺の各項は正数である. ゆえに

$$\left| \frac{a-b}{a-c} \cdot \frac{c-d}{b-d} \right| + \left| \frac{a-d}{a-c} \cdot \frac{b-c}{b-d} \right| = 1,$$

$$\therefore |a-b| |c-d| + |a-d| |b-c| = |a-c| |b-d|,$$

すなわち

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

注意

オイラーの定理とトレミーの定理は, 同一の恒等式 (*) を複比から見るか, 距離から見るかという見方の違いと考えてよい. (cf. この節の 4.)

10. 行列式による証明

補題 (証明は [2], p 253)

同一円周上の 4 点を $p_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, 3, 4$ とし, $\overline{p_i p_j} = d_{ij}$ と表わすならば, 次の公式が成り立つ

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

補題の行列式を展開して整頓すると

$$(d_{12}d_{34} + d_{13}d_{24} + d_{14}d_{23})(d_{12}d_{34} + d_{13}d_{24} - d_{14}d_{23})(d_{12}d_{34} - d_{13}d_{24} + d_{14}d_{23}) \\ (d_{12}d_{34} - d_{13}d_{24} - d_{14}d_{23}) = 0$$

となる. 従って, 4 点 $p_i(x_i, y_i)$ が同一円周上にあるときには, その位置関係により

$$d_{12}d_{34} + d_{13}d_{24} = d_{14}d_{23}$$

$$d_{12}d_{34} + d_{14}d_{23} = d_{13}d_{24}$$

$$d_{13}d_{24} + d_{14}d_{23} = d_{12}d_{34}$$

のいずれかが成り立つ.

5 トレミーの定理の系と拡張

この節では、トレミーの定理の特別な場合と、定理のいくつかの拡張について説明する。

1. トレミーの定理の系

(a) ピタゴラスの定理

トレミーの定理は、特別な場合として、ピタゴラス (Pythagoras, B. C. 580-500) の定理を含む。即ち、四角形 $ABCD$ が、特に、長方形の時、 $AB^2 + BC^2 = AC^2$ 。

(b) オイラーの定理

オイラーの定理「一直線上に四点 A, B, C, D がこの順に並んでいるならば、 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ 」は、直線を半径無限大の円と見ると、トレミーの定理の特別な場合と考えることができる。

(c) 正弦の加法定理

正弦の加法定理は、トレミーの定理の平面三角法による意味づけを与えるものであり、トレミー自身が導いた。§4の証明6の(*)において特に $\gamma + \delta = \angle R$ (直角) と置けばよい。(あるいは、 BC が特に円の直径の場合に正弦定理を利用して導かれる) 彼は、この公式を利用して正弦 $\sin \frac{1^\circ}{4}$, $\sin \frac{1^\circ}{2}$, $\sin \frac{3^\circ}{4}$, $\sin 1^\circ$, ..., $\sin 90^\circ$ に相当する五桁まで正確な三角関数表(弦の表と呼ばれる)を作成した。

2. トレミーの定理の拡張

トレミーの定理の拡張はいろいろ考えられる。ここでは、一般の四角形へ拡張したブレッツシュナイダーの定理、トレミーの不等式、筆者による凸多角形への拡張定理、四面体へのトレミーの不等式の拡張定理について説明する。円に内接する凸六角形についてのフルマン (Fuhrmann) の拡張定理と、円周上の4頂点 A, B, C, D を4つの有向内接円に置き換えるケージー (Casey) の拡張定理については説明を省く。(cf. [1,3])

(a) ブレッツシュナイダーの定理

定理 (C. A. Bretschneider, 1842)

四角形 $ABCD$ について次の公式が成り立つ

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd \cos(A+C).$$

証明 ([1], p 219)

i. 相似を用いた証明

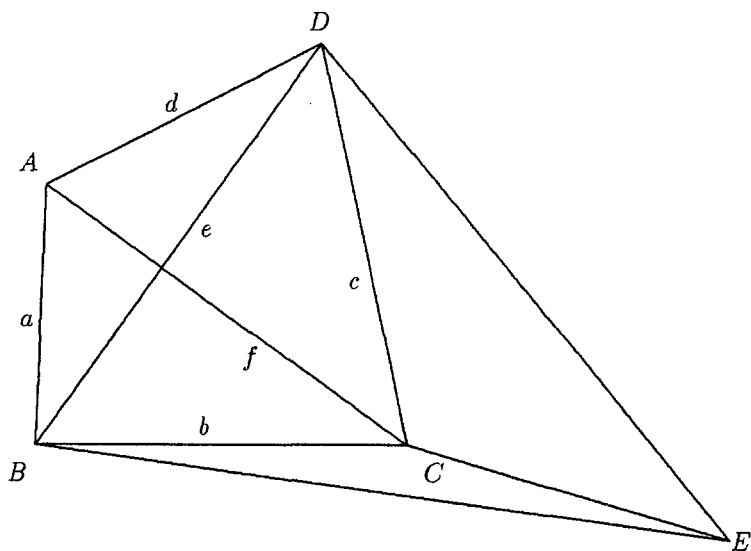


Fig. 5

$\angle CDE = \angle ADB$, $\angle DCE = \angle A$ となるように点 E をとれば, $\triangle CDE \sim \triangle ADB$. (Fig. 5) よって

$$\frac{CE}{a} = \frac{c}{d},$$

即ち

$$(*) \quad CE = \frac{ac}{d}.$$

次に $\angle BDE = \angle ADC$ かつ $DE : f = c : d$ であるから, $\triangle BDE \sim \triangle ACD$. よって

$$\frac{BE}{e} = \frac{f}{d},$$

即ち

$$(**) \quad BE = \frac{ef}{d}.$$

ところで $\triangle BCE$ において

$$\angle BCE = \angle A + \angle C \quad (\text{または } 360^\circ - \angle A - \angle C)$$

であるから

$$BE^2 = b^2 + CE^2 - 2b \cdot CE \cos(A + C).$$

この式に (*), (**) を代入して両辺に d^2 をかけると

$$e^2 f^2 = b^2 d^2 + a^2 c^2 - 2b \cdot acd \cos(A + C).$$

ii. 反転による証明 (cf. §4 の証明 5.)

D を中心としてこの図形を反転 (R は反転の半径) すれば

$$A'B' = a \frac{R^2}{df}$$

$$B'C' = b \frac{R^2}{cf}$$

$$C'A' = e \frac{R^2}{cd}$$

ここで $\triangle A'B'C'$ に第二余弦定理を適用すると

$$C'A'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 - 2A'B' \cdot B'C' \cos B',$$

ゆえに

$$\frac{e^2 R^4}{c^2 d^2} = \frac{a^2 R^4}{c^2 f^2} - 2 \frac{ab R^4}{cdf^2} \cos B'.$$

ところが、反転によって

$$\angle B' = \angle A + \angle C \quad (\text{または } 360^\circ - \angle A - \angle C)$$

となるから、上式に $\frac{c^2 d^2 f^2}{R^4}$ をかけると

$$e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - b^2 d^2 - 2abcd \cos(A+C).$$

系 (トレミーの不等式)

四角形 $ABCD$ について, 不等式

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$$

が成り立つ, 等号は $\angle A + \angle C = 2\angle R$ のときに限る。

(b) トレミーの不等式 2 (cf. [6] chapter XIII)

平面の二点 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ の距離を

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

とすると, 4 点 O (原点), x, y, z について

$$d(O, x) \cdot d(y, z) + d(O, z) \cdot d(x, y) \geq d(O, y) \cdot d(x, z),$$

等号は, 4 点が共円のときに限る。

証明

点 O, x, y, z は複素平面上の複素座標をも表すものとする。(Fig. 6) §4 の証明 9. と同様にして, 恒等式

$$(O-x)(y-z) + (O-z)(x-y) = (O-y)(x-z)$$

が成り立つ。この式の両辺の絶対値をとれば

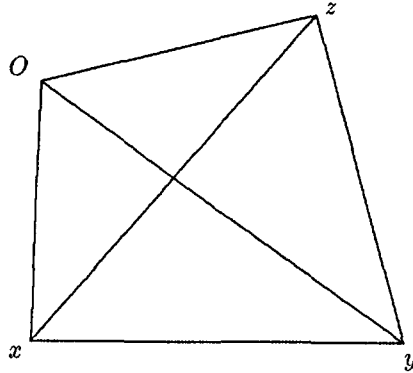


Fig. 6

$$|O-x| \cdot |y-z| + |O-z| \cdot |x-y| \geq |O-y| \cdot |x-z|,$$

すなわち

$$d(O, x) \cdot d(y, z) + d(O, z) \cdot d(x, y) \geq d(O, y) \cdot d(x, z).$$

後半の共円性は、トレミーの定理による。

注意

トレミーの不等式 2 は、ブレッツシュナイダーの定理の系（この節の 2. の (a) の系）と同値であるが、このような形で使われることが多い。

(c) 球面上の上の四角形への拡張

空間の中にある球面上の上の四角形（各辺は大円周の半分よりも小さい大円の弧）について

定理 (cf. [2], p 296)

球面四角形 $ABCD$ が円に内接するための条件は

$$\sin \frac{1}{2} \widehat{AB} \cdot \sin \frac{1}{2} \widehat{CD} + \sin \frac{1}{2} \widehat{AD} \cdot \sin \frac{1}{2} \widehat{BC} = \sin \frac{1}{2} \widehat{AC} \cdot \sin \frac{1}{2} \widehat{BD}$$

ただし、たとえば、 $\sin \widehat{AB}$ は弧 \widehat{AB} の中心角の正弦を表すものとする。

証明

「球面上の上の四角形 $ABCD$ が円に内接するための条件は、これらの 4 点が同一平面上にあることである」から、平面幾何学のトレミーの定理が成り立つ。よって

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

ところが

$$AB = 2r \sin \frac{1}{2} \widehat{AB}, \dots, BD = 2r \sin \frac{1}{2} \widehat{BD}$$

であるから、これらを代入すれば証明すべき式が得られる。

(d) 円に内接する凸多角形への拡張

多角形 (n 角形に同じ) の定義については、ここでは次のように定める。

定義

互いに相異なる $n(n \geq 3)$ 個の有限個の点 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ を順に、長さを持つ線分 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ で結んで得られる図形であって、次の 2 条件を満足するものを **n 角形**、一般に**多角形**と呼ぶ；

(1) 相続くどの三点も同一直線上にない。

(2) 線分 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ は、各線分の端点以外では交点をもたない。

A_1, A_2, \dots, A_n を、この多角形の**頂点**と呼ぶ。線分 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ を、この多角形の**辺**と呼ぶ。 $n = 3, 4, 5, \dots$ に応じて、それぞれ**3 角形**、**4 角形**、**5 角形**、 \dots と呼ぶ。

注意

上の定義で無限個の点を許すならば、ヒルベルト曲線などのフラクタルも多角形の範疇に入ってしまう、これは、領域となるので、一次元図形の定義に合致しない。

定義

n 多角形であって、その中の任意の 2 点を結ぶ線分がすべて、その多角形に含まれるとき、この多角形を**凸 $n(> 3)$ 角形**と呼ぶ。

定理 1

凸 $n(> 3)$ 角形 $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$ が円に内接するためには、頂点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ の中からとった 4 頂点で作られる凸四角形が、いずれもトレミーの公式を満足することが必要かつ十分である。

証明

必要条件

トレミーの定理より明らか。

十分条件

証明の方針は、補題 1, 2, 3 を使って凸 n 多角形に含まれるいずれの凸四角形も同一の円に内接していることを示し、これを利用して凸 n 多角形がこの円に内接していることを、補題 4 で示す。

補題 1

同一直線上にない、たがいに相ことなる 3 点を通る円はただ一つ存在する。

証明

直観的に、円の方程式が、中心の x 座標、 y 座標と、半径という 3 つの未知数によって定まることから明らかである。3 点の作る 3 角形の外心を中心とし、外心と一つの頂点を結ぶ線分を半径とする円が求めるものである。q. e. d. of 補題 1

補題 2

凸 $n(> 3)$ 角形 $A_1A_2A_3\dots A_{n-1}A_n$ の中の 4 つの頂点 A_i, A_j, A_k, A_l がこの順に並んでいるならば、これから作られる四角形 $A_iA_jA_kA_l$ は凸 n 四角形である。

証明

背理法による。条件を満たす四角形で、凸でないものがあるとすれば、元の凸 n 角形で考えると、 n 多角形の頂点と頂点を結んだ線分の中で、この n 多角形に含まれないものが必ず存在する。これは、仮定に反する。q. e. d. of 補題 2

以下、凸 n 角形を P で表し、 P の凸四角形全体の集合を q で表すことにする。

補題 3

凸 n 多角形 P の中からとった四頂点によって作られる凸四角形が、いずれもトレミーの公式を満たしているならば、それらの凸四角形はすべて同一の円に内接する。

証明

数学的帰納法による。 $n=4$ のときには、トレミーの定理そのものである。

$n=k > 4$ のとき凸 k 角形 $A_1 A_2 \dots A_k$ について命題は成立しているとする。

$n=k+1$ のとき、凸 $(k+1)$ 角形 $A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1}$ の中から頂点 A_{k+1} を含む任意の凸四角形をつくり、それを今、 $A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} A_{k+1}$ とする。この四角形の内接円は、補題 1 より、三頂点 A_{i_1} , A_{i_2} , A_{i_3} を通る円としてただひとつ決まる。しかも、 $n=k$ の場合の仮定から、この内接円は、 i_1, i_2, i_3 のとり方によらない。q. e. d. of 補題 3

補題 4

凸 n 角形 P の中のいずれの凸四角形も同一の円 O に内接するならば、 P は円 O に内接する。

証明

背理法による。 P が円 O に内接しないならば、 P の頂点の中で円 O の周上にないものが少なくとも一つ存在する。そのうちの一つを A_1 とする。この頂点を含む四角形 $A_{i-1} A_1 A_{i+1} A_{i+2}$ をつくるならば、 $A_{i-1} A_1 A_{i+1} A_{i+2} \in q$ ではあるが、円 O には内接しない。これは、仮定に反する。q. e. d. of 補題 4

補題 4 から直ちに、十分条件が成立する。q. e. d. of 定理

例

補題 3 を、Fig. 7 の凸 14 角形 ($n=14$ の場合) について、具体的に説明する。

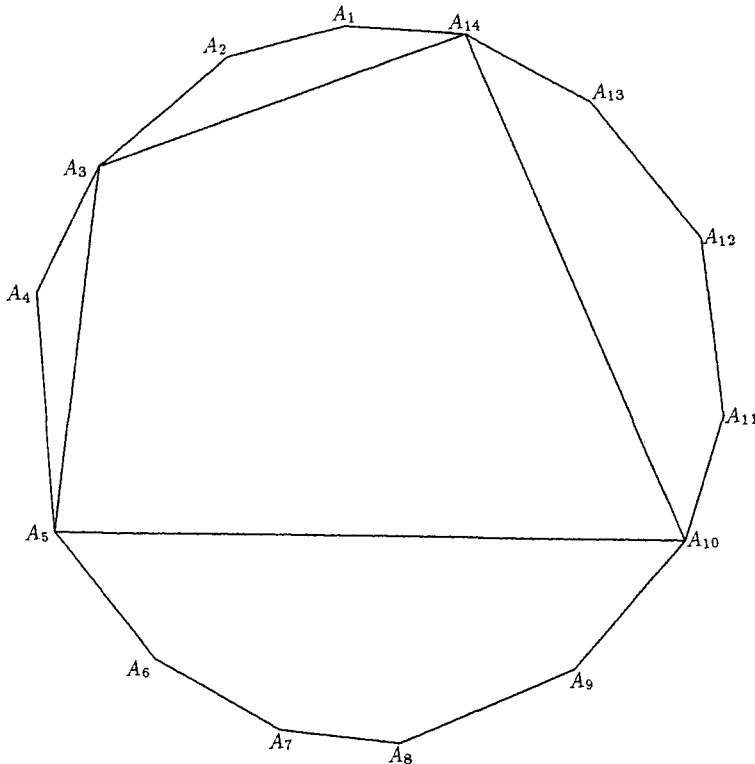


Fig. 7

今、 $A_3A_5A_{10}A_{14} \in q$ の頂点 A_3, A_5, A_{10} および A_{14} をそれぞれ、 A, B, C, D とおく。凸四角形 $ABCD$ の内接円を、円 O として固定する。この四角形に対して位置関係のことなる次の3つの場合を調べてみよう。すなわち、

- 1) 四角形 $ABCD$ と共通部分を持たない場合の例として $A_6A_7A_8A_9$ 。
- 2) 四角形 $ABCD$ と共通部分を持つ場合の例として、 $A_4A_{10}A_{12}A_{13}, A_2A_6A_8A_{11}$ 。四角形 $ABCD$ と共通な頂点をもつ四角形の場合は1), 2) の特別な場合になる。

1) の場合

四角形 $ABCD$ について、 A_7 を B' とおいて、四角形 $AB'CD$ を作るならば $AB'CD \in q$ かつ、 $AB'CD$ の内接円は、補題1より円 O である。次に、 $AB'CD$ について、 A_6 を A' とおいて、四角形 $A'B'CD$ を作るならば、補題1,2により $A'B'CD \in q$ かつ、 $A'B'CD$ の内接円は、円 O である。以下、同様にして順次 A を C' に、 A_9 を D' とおいて四角形を作るならば、結局、 $A'B'C'D' \in q$ かつ、 $A'B'C'D'$ の内接円は、円 O である。

2)-1の場合 ($A_4A_{10}A_{12}A_{13} \in q$)

四角形 $ABCD$ について、 A_4 を A' とおいて四角形 $A'BCD$ を作るならば、 $A'BCD \in q$ であって、この四角形の内接円は、円 O である。以下、1)と同様の仕方順次 A_{11} を B' 、 A_{12} を C' 、 A_{13} を D' におきかえることによって得られる四角形は、補題1,2より、 $A'B'C'D' \in q$ かつ、この四角形の内接円は、円 O である。

2)-2の場合 ($A_1A_2A_6A_8 \in q$)

四角形 $ABCD$ について、 A_1 を A' とおいて、四角形 $A'BCD$ を作るならば、補題1,2より $A'BCD \in q$ かつ、この四角形の内接円は、円 O である。以下、1)と同様の仕方順次、 A_2 を B' 、 A_6 を C' 、 A_8 を D' におきかえた四角形について、 $A'B'C'D' \in q$ かつ、この四角形の内接円は、円 O である。

以上、Fig. 7 の凸14角形の中の、トレミーの公式を満たす3種類の凸四角形は、同一の円 O に内接することがわかった。このことは、2つの四角形の中のいずれかの共通頂点を反点に選ぶことによって、反転によって示すこともできる。

(e) トレミーの不等式の空間への拡張

この節の2.(a)の系で述べた、トレミーの不等式を、空間の四面体の場合に拡張してみよう。

補題 ([1], p 377 cf. §5の2.の(a)の系)

平面の三角形 $\triangle ABC$ に対し、 P をこの平面の上の任意の一点とすれば

$$a \cdot PA + b \cdot PB \geq c \cdot PC,$$

ただし、三角形 ABC の各辺の長さを、 $AB=c, BC=a, AC=b$ とする。等号は、 P が $\triangle ABC$ の外接円周上にあるときに限る。

証明

図 (Fig. 8) のような位置に点 P があるとなれば $\triangle PBK \sim \triangle ABC$ となるように点 K をとると

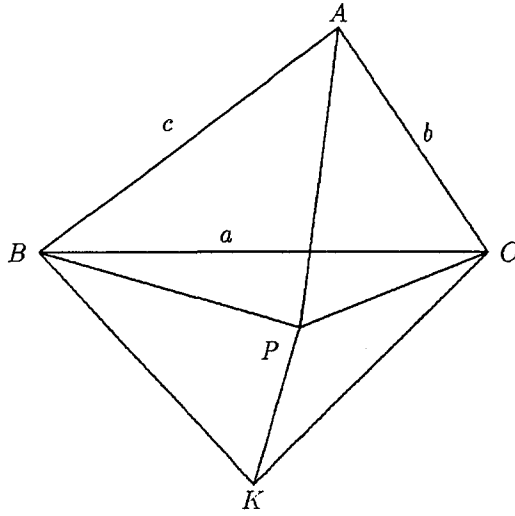


Fig. 8

$$c : b = PB : PK.$$

次に $\triangle BAP \sim \triangle BCK$ より

$$c : PA = a : CK.$$

ゆえに

$$PK : CK : PC = \frac{bPB}{c} : \frac{aPA}{c} : PC.$$

ところが $\triangle PKC$ において

$$PK + PC \geq CK,$$

ゆえに、上式をこの式に代入して

$$\frac{bPB}{c} + PC \geq \frac{aPA}{c},$$

$$\therefore b \cdot PB + c \cdot PC \geq a \cdot PA,$$

これより求める不等式が得られる。等号は、 K, P, C が一直線上にあるとき、よって P が $\triangle ABC$ の外接円周上にあるときに起きる。それは、トレミーの定理である。q. e. d. of 補題
同一平面上にない4点の作る四面体について次の定理が成り立つ

定理2 ([4])

四面体 $ABCD$ の各辺の間に次の関係式が成り立つ

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD.$$

証明

Apostol [4] は、空間における回転と、トレミーの不等式 (§5 の 2. の(a)の系) を使って証明している。ここでは、正射影と上の補題を用いた別証を与える。

四面体 $ABCD$ の中から適当に面をとり、例えば $\triangle ABC$ とする。 $\triangle ABC$ を含む平面を π とする。四面体 $ABCD$ を π に正射影する。頂点 D の射影を D^* とする。(Fig. 9) 辺 DA, DB, DC と π のなす角度のうちで最小の角度をもつ辺を DA としよう。(DB または DC のときも同様にできる) π 上で、点 D^* を相似の中心として、三角形 ABC を相似拡大して得られる三角形を $A^*B^*C^*$ とする。相似比を σ とし、これを、 $D^*A^*=DA$ を満たすように決める。相似比の決め方から直ちに

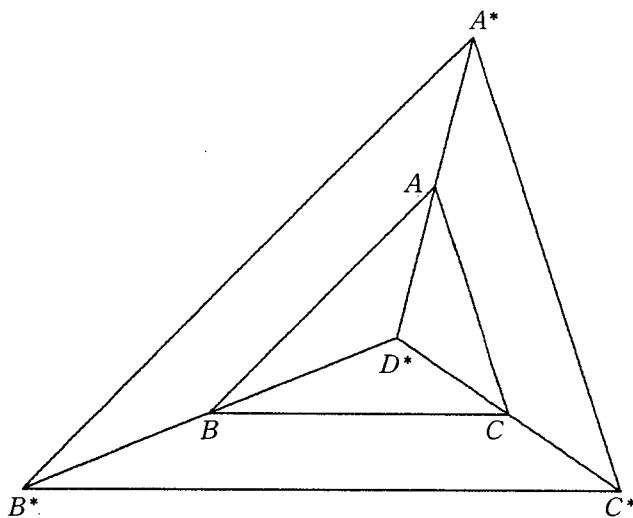


Fig. 9

$$D^*B^* \leq DB$$

$$D^*C^* \leq DC.$$

三角形 $\triangle A^*B^*C^*$ と点 D^* について上の補題を適用すると、 $DB, DC (\leq DA)$ の如何にかかわらず

$$b \cdot D^*B^* + c \cdot D^*C^* > a \cdot D^*A^*,$$

すなわち

$$\sigma b \cdot DB + \sigma c \cdot DC > \sigma a \cdot DA,$$

$$\therefore AC \cdot BD + AB \cdot CD > AD \cdot BC.$$

例

(1) 一辺の長さが 1 の正四面体の場合には、 $D^*A^*=D^*B^*=D^*C^*=1, \sigma=\sqrt{3}$.

(2) 一辺の長さが 1 の立方体 $ABCD-EFGH$ から作られる四面体 $ABCH$ の場合には、

$HA=HC=\sqrt{2}, HB=\sqrt{3}$. π と最小の角度をもつ辺は HB であるから

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

ゆえに

$$H^*A^* = H^*C^* = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < \sqrt{2} = HA = HC, \quad H^*A^* = \sqrt{3} = HA.$$

6 トレミーの定理と定理2を追試するプログラムの例

1. トレミーの定理

トレミーの定理の数値解析による追試はいろいろの方法が考えられるが、ここでは原点を中心とする半径 r の円上に点 $A(r, 0)$ を固定し、それぞれ、3つの中心角を指定することによって、点 B, C, D の位置を決め、その後、トレミーの公式の右辺と左辺の数値を出力して、検証する方法をとることにする。

Ptolemy. pas のアルゴリズムは次のように設定する。

- (a) 半径 r を入力する。
- (b) 頂点 A を常に座標 $(r, 0)$ とする。
- (c) 3つの中心角 $\angle AOB, \angle AOC, \angle AOD$ を入力する。
- (d) AB, BC, CD, AD, AC, BD を第二余弦定理により計算する。
- (e) $AB \cdot CD + AD \cdot BC, AC \cdot BD$ を出力して計算結果が一致するか check する。

2. 定理2 (トレミーの不等式)

定理2を追試するプログラムは、「四面体は球面に内接する」という性質を利用する。頂点 A は北極に固定しておく。半径 r と頂点 B, C, D の経度、緯度を順に入力してトレミーの不等式の左辺、右辺を出力して検証する。

Ptolemy 2. pas のアルゴリズムは次のように設定する。

- (a) 半径 r を入力する。
- (b) 頂点 A を常に座標 $(0, 0, r)$ とする。
- (c) 3頂点 B, C, D の経度、緯度を入力する。
- (d) AB, BC, CD, AD, AC, BD を関数の手続きにより計算する。
- (e) $AB \cdot CD + AD \cdot BC, AC \cdot BD$ を出力して不等号が成り立つか check する。

これらの基本プログラムの入出力の方法を工夫して、出力データをシミュレートすることは容易にできる。

パスカルのプログラムの作成には、[7] を参考にした。

```
PROGRAM Ptolemy(input,output);{Ptolemy.pas}
{
  Ptolemy's theorem: If ABCD is cyclic quadrilateral,
  then
      AC · BD = AB · CD + AD · BC.
}
```

```

USES
  Crt;
CONST
  rad=pi/180;
VAR
  theta1,theta2,theta3:real; {central angle}
  a,b,c,d,e,f:real; {length}
  r:real; {radius}

BEGIN
  ClrScr;
  writeln(' --- Ptolemy''s theorem ----');
  writeln;
  write(' radius = ? ');
  readln(r);
  writeln;
  writeln(' central angles: 0 < theta1 < theta2 < theta3 < 360');
  writeln;
  write(' theta1, theta2, theta3 = ? ');
  readln(theta1,theta2,theta3);
  writeln;
  a:=sqrt(r*r+r*r-2*r*r*cos(theta1*rad));
  b:=sqrt(r*r+r*r-2*r*r*cos((theta2-theta1)*rad));
  c:=sqrt(r*r+r*r-2*r*r*cos((theta3-theta2)*rad));
  d:=sqrt(r*r+r*r-2*r*r*cos((360-theta3)*rad));
  e:=sqrt(r*r+r*r-2*r*r*cos(theta2*rad));
  f:=sqrt(r*r+r*r-2*r*r*cos((theta3-theta1)*rad));
  ClrScr;
  writeln(' ---- Ptolemy''s theorem ----');
  writeln;
  writeln(' radius = ',r:6:3);
  writeln(' central angle theta1 = ',theta1:6:3);
  writeln(' central angel theta2 = ',theta2:6:3);
  writeln(' central angle theta3 = ',theta3:6:3);
  writeln;
  writeln(' AB = ',a:6:3);
  writeln(' BC = ',b:6:3);
  writeln(' CD = ',c:6:3);
  writeln(' AD = ',d:6:3);
  writeln;
  writeln(' AB · CD = ',a*c:6:3);
  writeln(' BC · AD = ',b*d:6:3);
  writeln;
  writeln(' AB · CD + BC · AD = ',a*c+b*d:6:3);
  writeln;
  writeln(' AC = ',e:6:3);
  writeln(' BD = ',f:6:3);
  writeln;
  writeln(' AC · BD = ',e*f:6:3);
  writeln;
  write(' The end. Hit return key. ');
  readln
END.

```

```
PROGRAM Ptolemy2(input,output);{Ptolemy2.pas}
```

```

{
  Ptolemy''s inequality: If ABCD is a tetrahedron,
  then

      AC · BD < AB · CD + AD · BC.

}

```

```

USES
  Crt;
CONST
  rad=pi/180;
  laa=0; { coordinate A }
  loa=90;
VAR
  lab,lac,lad,    {latitude,longitude}
  lob,loc,lod:real;
  r:real; {radius}

FUNCTION xc(la,lo:real):real; { x coordinate }
BEGIN
  xc:=r*(cos(la*rad))*(cos(lo*rad))
END;

FUNCTION yc(la,lo:real):real; { y coordinate }
BEGIN
  yc:=r*(cos(la*rad))*(sin(lo*rad))
END;

FUNCTION zc(la:real):real; { z coordinate }
BEGIN
  zc:=r*(sin(la*rad))
END;

FUNCTION length(la1,lo1,la2,lo2:real):real;
VAR
  a,b,c:real;
BEGIN
  a:=sqr(xc(la1,lo1)-xc(la2,lo2));
  b:=sqr(yc(la1,lo1)-yc(la2,lo2));
  c:=sqr(zc(la1)-zc(la2));
  length:=r*sqrt(a+b+c)
END;

BEGIN
  ClrScr;
  writeln(' --- Ptolemy''s inequality, 定理2 ----');
  writeln;
  write(' radius = ? ');
  readln(r);
  writeln;
  writeln(' 経度(longitude)、緯度(latitude)');
  writeln;
  writeln(' -180 < lo < 180, -90 < la < 90');
  writeln;
  writeln(' A : 北極');
  writeln;
  write(' 頂点 B の経度、緯度 = ? ');
  readln(lob,lab);
  writeln;
  write(' 頂点 C の経度、緯度 = ? ');
  readln(loc,lac);
  writeln;
  write(' 頂点 D の経度、緯度 = ? ');
  readln(lod,lad);
  ClrScr;
  writeln(' ---- Ptolemy''s inequality ----');
  writeln;
  writeln(' radius = ',r:6:3);
  writeln;
  writeln(' A = ( ',xc(laa,loa):6:3,', ',yc(laa,loa):6:3,', ',zc(laa):
    6:3,' )');

```

```

writeln;
writeln(' B = ( ',xc(lab,lob):6:3,',',yc(lab,lob):6:3,',',zc(lab):
        6:3,' )');
writeln;
writeln(' C = ( ',xc(lac,loc):6:3,',',yc(lac,loc):6:3,',',zc(lac):
        6:3,' )');
writeln;
writeln(' D = ( ',xc(lad,lod):6:3,',',yc(lad,lod):6:3,',',zc(lad):
        6:3,' )');

writeln;
writeln(' AB = ',length(laa,loa,lab,lob):7:3);

writeln(' BC = ',length(lab,lob,lac,loc):7:3);
writeln(' CD = ',length(lac,loc,lad,lod):7:3);
writeln(' AD = ',length(laa,loa,lad,lod):7:3);
writeln(' AC = ',length(laa,loa,lac,loc):7:3);
writeln(' BD = ',length(lab,lob,lad,lod):7:3);

writeln;
writeln(' AB · CD + AD · BC = ',length(laa,loa,lab,lob)*
        length(lac,loc,lad,lod)+
        length(lab,lob,lac,loc)*
        length(laa,loa,lad,lod):6:3);

writeln;
writeln('          AC · BD = ',length(laa,loa,lac,loc)*
        length(lab,lob,lad,lod):6:3);

writeln;
write(' The end. Hit return key. ');
readln
END.

```

参考文献

- [1] 岩田至康：幾何学大辞典第一卷槓書店 (1971)
- [2] 岩田至康：幾何学大辞典第二卷槓書店 (1971)
- [3] 岩田至康：幾何学大辞典第四卷槓書店 (1978)
- [4] T. M. Apostol, 'Ptolemy's Inequality and the Chordal Metric', *Math. Mag.* 40 (1967), 233-235
- [5] J. L. Heath: *A History of Greek Mathematics*. vol. 12 Dover(1981)
- [6] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and V. Volenec: *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, (1989)
- [7] Turbo Pascal Version 7.0 Programmer's Reference, Borland International, Inc. (1992)