小学校高学年の数学教育の内容と相互関連について

須　田　勝　彦
(北海道大学教育学部)

「自分の持っている一切の知識(知識といっても無論貧少なものであるが，自分は，然し，自ら日本一の代用教員を以て任じて居る。)一切の不平，一切の経験，一切の思想，――つまり一切の精神が，この二時間のうちに，機を伺い時を待って，吾が舌端より火箭となって迸しる。的なきに箭を放つのではない。男といわず女といわず，既に十三，十四，十五，十六という年齢の五十幾人のうら若い胸，それが乃ち火を待つばかりに紅血の油を盛った青春の火皿ではないか。火箭が飛ぶ，火が油に移る，嗚呼そのハツハツと燃え初むる人生の烽火の煙の香い！…昔希臘という国があった。基督が磔刑にされた。人は生まれた時何物をも持って居ないが精神だけは持って居る。…ああ一切の問題が皆火の種だ。」(石川啄木『雲は天才である』)

ここには，最も素朴な教育方法の原理が表明されている。第1は子ども，とりわけ青年期への入り口に立つ子どもの持つ旺盛な知的欲求という事実であり，第2は教えるためには教えたいことが教師の内に存在しなければならないという事実である。この2つの素朴な事実がまさに事実であって「理想」ではないことを主張することが小論の課題である。

啄木の作品には，さらにこのような授業への子どもたちそれぞれの多様な反応が描かれていて，「授業は生徒の多様な個性の発現の場である」という，これもまた素朴な教授学的原理の表現と読める。この点については小論では論究せず，より具体的な授業記録をもとに検討することにしたい。

はじめに

人間の知的発達は指数関数的である。人間の創りだす知識は生産物として蓄積されるだけではなく，それ自身が新しい知識を生産する契機あるいは，道具として働くからだ。ヘーゲル論理学における概念の自己展開のような，奇妙な思弁を排除しても，ある概念の獲得は必然的に次の新しい概念の獲得への準備であることは疑い得ない。また，部分的に知り得た知識も「どのような全体の部分なのか」という問題意識が興味あるものであれば，これも新しい知識を生産する知識として機能する。生産物として蓄積される知識と，知識を生産する道具としての知識は，教育において別なものであってはならない。とくに普通教育の場ではそれが強く要求される。数学教育という領域で考えるとき，それはいっそう明白になる。数学的概念はすべて，広い意味で人間の生活（知る喜びもまた人間の生活の構成要素である）に有用な知識であるとともに，新しい数学的概念を産み出す道具として働く。もしそうでない知識があったとしたら教えるべき項目のリストから外してしまえばよい。

知識について上のような考えに基づけば，高学年の子どもは，中学年の子どもとくらべて1学年分の知識が多いというだけではない。すでに学んだことのすべてをより高い立場からとらえ直し，その発展として新たな知的領域の開拓に進むという認識一般の発展の過程がより顕著にみられる段階である。そして開拓される知的領域は人間の原始的な時期を超えて，歴史に刻まれた科学者，数学者，哲学者たちのさまざまな貢献と切り結ぶ段階になってくる。古代エジ

プト，バビロニアを超えて，古代ギリシアに築かれた豊かな知的財産の一部が教室に登場する。中学生，高校生の段階でははさらに「近代」といわれる時期の学問，文化上の諸貢献と切り結んで行く。(ヘルバルトの「開花史的段階」というアイデアはこのようなゆるい解釈において有効性を持っている。いうまでもなく，最初の自然数の指導に19世紀末ころに創りだされた集合論のアイデアが活かされているように，それらを歴史に現われたそのままの形態ではなく，現代の数学の視点から整理された形態において提示することが必要である。)

しかし，認識の発展についてこのような見通しをもっても，現実は厳しいものがある。中学年から「算数嫌い」がたくさんつくられる。現行学習指導要領の小学校中学年は，他に欠陥があるかどうかは差し置いても，とにかく教えるべきことが多すぎるのである。また，子どもの中に「教科に特有化された思考」や「領域に特有化された思考」ができて（そのこと自体は知的発達のあらわれであるが)，学習内容が他と関連づけられにくい，という問題もある。しかし幸いなことに，高学年には「算数嫌い」から「算数大好き」へ転換する機会となりうるような，楽しい学習課題がたくさんある。また，教科や教科内の領域を超えた総合的な思考の組織も可能になる。それができれば算数嫌いからの決別のよい手立てともなるであろう。

高学年では，少なくとも次のような数学的概念が指導される。

1．すべての数計算の基礎であり，そして数学の諸領域をしもべのように使い従える「数学の女王」たる華麗なる整数論への入門注(1)

中学年まで，整数とその演算が完結する。(現在のカリキュラムでは非負の範囲であるが，それが必然的か否かは明らかでない。負の整数への拡張と有理数への拡張とが，どちらを先行すべきかは未検討の問題として残されていると思われる。)高学年では，それをもとに整数の代数的性質，とくに除法原理(任意の整数 $a, b \neq 0$ に対して $a=qb+r$ ただし $0 \leqq r < |b|$ となる q, r が一通りに定まる）にかかわる諸性質が指導される。これは倍数，約数，や素数など，整数論特有の世界への入り口であるとともに，小数の除法の実行過程に用いられる。

倍数，約数の指導は「異分母分数の加減」に必要だという理由は貧しすぎる位置づけである。「倍数，約数の概念は何の役に立つか」という疑問はむしろ倍数や約数がある程度わかった人の疑問だろう。タイルを並べて倍数の系列をつくる作業はそれ自体が高学年の子どもの知的欲求に応える内容を持っている。なにより，除法原理がタイルの操作そのものと容易に対応できることは子どもが「数学は易しい」という確信を得る助けとなるだろう。(この確信が誤解であることに気づくのは子どもの中のごく一部分が数学者となってからで十分であろう。)そして倍数の無限の系列の構成可能性という新しい世界を経験する。無限の系列というものもまた小学校高学年の子どもの知的欲求に応える内容を持っている。0があらゆる整数の倍数であることも，すべての子どもが到達できる「学問としての数学」の内容である。ある整数を法（わる数：演算をオペレーションと見て，オペレーターを法，オペレーションを受ける対象を実と呼ぶのは最近はあまり使われないが便利なことばである）とする剰余に関して整数の和の剰余が剰余の和となること，特にある整数の倍数どうしの和と差がまたその数の倍数であることなど，3や9の倍数の判定法など，中学校でともすれば形式的に取り扱われがちな諸性質もタイル操作によってさほどの困難もなく指導可能である。

同じ長方形のタイルを並べて正方形をつくる課題から最大公約数と最小公倍数数の関係も簡単にわかる。また，いくつかのタイルで長方形をつくる問題は約数を求めるだけでなく，素数

の存在を知る上でも有効である(たとえば12個のタイルで3種の長方形をつくること，7個のタイルでは1種の長方形しかできないこと，素数とは後者のような場合であることなど)。さらに有限の範囲におけるすべての素数を求める「エラトステネスのふるい」は，典型的なアルゴリズム過程として意味があるばかりでなく「素数は無限にあるのだろうか」という疑問にもつながってくる。

有理数が循環小数であらわせることの証明も除法の性質から導かれる。証明は具体的な演算の実行過程そのものに内在している。割算を実行すれば誰でも，同じ余りがでたら循環することを理解する。そして，余りは割る数よりも小さいのだから，割算を続けていけば $|b|$ 回以内の操作で必ず同じ余りがでてくる。そして大学生用の数学における証明もそれと変わるものではない。

2．有理数の演算の完結

高学年で有理数（非負）の演算が完結する。有理数の乗除がまた有理数になることはこの段階の子どもには理論的関心はないだろう。しかし有理数の乗除は実際の計算については整数の乗除に帰され，整数の乗除結果を有理数として示す過程は小数や分数の定義（ここでそれぞれの定義は，小数は整数 $\times 10^{-n}$，分数 a/b は b 倍で a になる数，とする）に帰されるという事実は適度な困難さをもった発見課題である。実質的な計算過程が既習事項である整数の世界であるのに，その発見と習熟は分数，小数それぞれ面白さをもっている。その「面白さ」はアルゴリズムの獲得＝「どんな問題がだされても解くことができる自信」を持つことによって完結する。あとは必要に応じて電卓を使えばよいだろう。電卓を使うことによって計算の煩わしさがなくなり自然現象，社会現象の中にリアリティに満ちた問題例を求めることができる。

そしてその完結は新しい計算の世界への入り口になっている。これまでも「小数以下第n位」という概念はあった。たとえば「12.45は小数以下第2位の数で表されている」(つまり「$12.45 = 1245 \times 10^{-2}$」) など。それは10進記数法で表現された個々の数のもつ「質」だった。小数の乗除の世界ではそれは新しい量であり，さらにその量に対して加法が定義される。注(2) 量的諸関係は新しい質を生みだし，新しい質はさらに新しい量的関係を生みだすという，弁証法的論理がここにも見いだされる。これが近代の初め，ステヴィンが発明した対数の考えにほかならない。

有理数の乗除の指導は，どのような場面で乗除演算が行なわれるかという問題がその入り口になるだろう。そこでは整数の乗除の自然な拡張であることが示される必要があり，そのために2年の乗法の意味づけや除法の定義との整合性が問題となる。ただし，それが総合的に子どもに意識されるのは内包量の指導においてだろう。教える側は学年的な認識発達のプログラムを仮説的に有していることが必要である。小論では，2年の乗法の意味づけを分離量の範囲で「1あたり量」と「いくつ分」で全体量が定まる2項演算，3年の除法は分離量の範囲での「1あたり量」「いくつ分」を求める演算（つまり乗法の逆演算)，小数，分数の乗除は連続量の比例関係を背後に置いた意味づけ，という段階設定が妥当であろうと考える。これは多くの場で実践されており，特に変更の余地があるとは思われない。

乗除演算の意味づけ，つまりどのような場面において乗除演算が生ずるのかという問題と演算の実行過程の問題，つまりどのように解が得られるのかという問題は別である。後者はタイルによって一元的に説明されることが多かったが，研究すべき課題は多く残されている。2年の乗法指導においてさえ，タイルが用いられること自体は自然であるにしても，どの段階にお

いても同一レベルの用いられ方であるよりは，単純にタイルの数を数える段階から，乗法の分配性に基づき，既習の事実を用いて未知の乗法の解を得る段階までの発展は十分に構成可能である。[注(3)] また，分数の乗法においては分数を「量の倍変換」としてとらえ，自然数倍とその逆変換の集合における変換の合成という立場での指導も小学校高学年のいずれかの段階で可能であろう。[注(4)] さらに小数の乗除はむしろ分数の乗除に帰する方が容易であり，先に述べた整数の乗除と 10 の負べき計算への還元という観点からも自然であろう。

3．幾何学の多くの定理を導き，そして線分の長さ，時間などとともに実数概念が確立される過程において連続性を持った実体の例として働き続ける幾何学的量＝面積

面積という幾何学的量が長方形から一般の多角形へ拡張される。小数や分数の構成が未知のもの（整数であらわせないもの）を既知のもの（整数）に還元する数学的方法の典型例であったように，多角形の求積もまた未知のものを既知のものに還元するという数学的方法の典型例を提供してくれる。ここで，未知のものは多角形の面積，既知のものは長方形の面積であることはいうまでもない。ここでは，合同な図形は面積が等しいことを基礎に，①有限個の互いに合同な図形に分解可能な二つの多角形は面積が等しい（分解等積＝裁ち合わの原理），②等高等底の平行四辺形（または三角形）は面積が等しい，③面積という量の，長さという量に関する複比例性，という三つのキー概念が関連しながら用いられる。[注(5)]（どのような図形が面積を持ち，どのような図形が面積を持たないか，という問題も数学的には重要だが，この段階での扱い方は不明であり，その理由で触れなくてよいと考える。しばしば 4 年の面積指導で「面積を持たない」かのように指導されている折れ線や曲線などの図形は，面積を持たない図形ではなく，面積が 0 の図形にすぎない。このような誤った指導はないほうがよい。）これもまた数学的考え方の典型例を提供してくれる。

この段階で「等積な 2 つの多角形は分解等積である」という定理を子どもたちに納得させることができる。そこから「すべての多角形は，有限回の操作で任意の長さを一辺とする長方形に裁ち合わせることができる」つまり「すべての多角形に対して，それと分解等積な任意の長さを一辺とする長方形が存在する」という命題がただちに導かれ，面積が一次元の量であること，及び「長方形の面積がわかれば多角形の面積がわかる」ことが自然に導かれる。

J. Perry の 1901 年のグラスゴーでの講演で，数学の有用性のひとつに「鋭い哲学的知性の持ち主に，完全性についての，まったく魅力的で満足な」回答を与える具体的な例を提供することがあげられていた。多角形の面積についてのこのような研究は高学年の子どもたちにふさわしい知的興奮を与えてくれるだろう。中学校でピタゴラスの定理を分解等積の概念を用いて証明することがある。これもまた一つの楽しい授業であるが，この定理によると「最初にどのようにハサミで切り刻んでも，あとをうまくやれば 2 つの正方形と大きな正方形は分解等積になる」こと，つまり裁ち合わせによるピタゴラスの定理の証明は無限個存在することがわかる。

さらにこの定理は次の 2 つの新しい問題を提出する。①多角形ならざる図形，曲線で囲まれた図形の面積は考えることができるのか？②平面図形ではなく，3 次元の立体図形ではこの定理（＝体積が等しい 2 つの立体図形は有限個の合同な立体図形に分解できる）は成り立つか？①は積分論の入り口である。②に対して否定的な回答が得られたのは「ヒルベルトの問題」への解，つまり 20 世紀数学に属する。

上の定理と関連して「すべての多角形の面積が長方形の面積の問題に還元できたとして，そ

れではすべての長方形は面積を求めることができるのだろうか」という問題がある。4年生の面積では，たての長さも，横の長さも，整数値であった。だから面積を求める乗法は累加であっても，複比例の乗法であっても同じことである。たてや横の長さが整数でないときの説明は4年生の段階では準備ができていない。(教科書では，単位を2度換算して小数値の時の面積を求めているのもあるが，たとえばcmの単位をmmの単位になおして整数値で求められたとしたら，面積はすでに「求められた」のでありそれを再び小数値にもどす必然性も，必要性もないはずである。)

たとえば『算数たのしい学習プリント』の分数，小数の乗法の指導で用いられるタイル図は，「たてや横の長さが有理数であっても長方形の面積はその乗法で求められる」ことの証明になってる。さらに根本には「面積や長さはいつでも数であらわすことができるのか」という問題がある。これは「実数とは何か」という問題と同値であり，今後さまざまな形で数学教育の場面にあらわれる無限の問題への入り口になっている。注(6)

「等高等底の平行四辺形（または三角形）は面積が等しい」という定理は，中学校との関連では平行線と比例に関する重要な定理群の出発点にもなる。平行線と比例に関する定理群は有理数の範囲では三角形のしきつめで説明できる。小学校ではこれで十分であり，これをもとに「中心拡大」の原理（対応する辺が平行で比が一定）が説明できる。また，平行線と比例の問題は，6年「比例」の指導の中でぜひ取り扱いたい項目である。中学校ではやはり比を実数で考えて行く方がよいので，面積を使った方がよいだろう。「実数概念が確立される過程において連続性を持った実体の例として働き続ける幾何学的量＝面積」という考え方の一例である。さらに，この定理は「等高な平行四辺形（または三角形）の面積は底辺に比例する」という使い道の多い定理に拡張することができ，これもまた比例の指導のさいの練習問題に使いたい事項である。

4．等長変換の担い手として働き，そして特異な対称性を有する「円」：そして幾何学のたのしさ＝美しさのありあまるほどの実例を提供する「円」注(7)

円は小学校の範囲で取り扱われる唯一の曲線図形である。「他にいくらでも曲線はあるのだから，円だけを指導するのはおかしい」「コンパスと定規を特別扱いしていた旧い幾何学のなごりではないか」「円周の長さや円の面積を求めるのは，結局いいかげんな近似にたよるほかに方法がない。そして怪しげに導いた公式をテストで権威づけ，暗記させ，怪しげだったことを忘れるであろう高校生になってから，三角関数の微分法の公式の証明にそれを使うというのは子どもに対する，数学教育の，卑劣極まる陰謀ではないか」等々，円に対する疑惑はデカルト以来数限りなくあろう。これらの疑惑はすべてもっともであり，断罪されるべきものである。しかし，断罪されるべきは円そのものではなく，円の悪用ではなかろうか。

円の定義はコンパスという道具の原理そのものである。定規とコンパスを用いて平面におけるすべての等長変換及び相似変換が作図できることは，平面幾何学の研究の最も基礎的な部分に円がかかわっていることを示している。「任意の線分を，任意の位置に移動することができる。」これは平面幾何の出発点ともいえる命題であり，それを具体的に実現するのが円，つまりコンパスの原理なのである。従って5年の円の指導においては，中学年までの図形指導と関連させながら新しい事項を導入していくことが重要だろう。

5年の円の指導では，求積，円周率，内接正多角形が指導内容となっている。求積と円周率については①その意味を明確にすること②近似値を求めることの二つが指導される。重点は①

にあり，②はむしろ「通常の測定（生活的な場面における生活的な手段による測定）ではせいぜい3，よくても3.1くらいの近似値しかえられない」ことを知らせることが大切だろう。1 mm 方眼紙に円を書き，ますめを数えて面積比から3.14という数を出す実践もあるが，無理があると思われる。扇形の弧の長さや面積と中心角の比例はここだけでなく，比例でも扱いたい。ここでさらに進んで，弧度法の原理にふれることもできる。中心角と弧は比例するが，弦は比例しないことを発見するのも楽しい授業となる。

円の対称性は扇形の求積問題の前提となっていて，直接の指導課題にはされないこともあるが，円を指導する以上，いずれかの段階で対称性にふれなければ円の指導にはならないだろう。たとえば円の一部を与えて中心や半径を求める問題は等長変換の一つである回転の中心を求める問題として重要だし，面白みのある問題である。

5．乗除演算の量的意味づけの完成：自然認識のかなめとなる物理量：関数概念への出発：そして幾何学的世界にもつなげたい＝内包量・倍・比例・比

小学校から高等学校までにでてくる乗法の量的意味づけとしては①比例の乗法，②倍の乗法，③面積形の乗法，の三つが基本である。①は2年生の乗法の導入から小数，分数の乗除に至るまでその意味づけに用いられてきている。これからは文字どおり，新しい知識を生産する道具として活躍する。たとえば自然科学の基礎的な諸量の多くが比例を媒介に定義されていくことから，子どもの自然認識を構造的に高めていく結節点に位置することになる。②は「人間による，物質的世界へのオペレーションの数学的定式化」の簡単かつ典型的な事例であり「数学は自分でつくるものである」というすばらしい認識の形成を助けてくれる。③は2変数関数の出発点としても，またさまざまな物理法則がこの形式で記述されることからも重要な意味を持っている。5年から6年にかけて学ぶ内包量，倍，比例，比はそれぞれに関連をもちながらこれら3つの乗法の量的意味づけを統合的に完成する。数学的には①は2つの量空間の連続な加法同形写像（線形写像），②は一つの量空間における連続な加法同形写像（線形変換），③は複比例関数（2つの量空間から一つの量空間への双線形写像）であり，それぞれもっとも基本的な写像に属する。

このような位置づけから，次のような指導の観点が導かれよう。

(1) これまで，有理数の乗除の指導でさまざまな生活的な場面に用いられる内包量が使われきた。ここで新しい学習として内包量を扱うにはそこから離れて，科学的概念としての物理量(速さ，密度など）を導入するのが効果的だろう。このような新しい物理量の獲得を第1義の目標とし，生活的な場面でのその近似的適用（これまで乗除の意味づけに使われてきた内包量のほかに，こみぐあい＝人口密度，収穫度，「仕事」の速さなど）は練習問題として用いられるのが適当である。科学的概念の形成は生活場面への適用を容易にし，適用によって科学的概念をたしかなものにするが，生活的概念は科学的概念の形成を必ずしも実現しないからである。

(2) また，正比例関数の出発としては等速運動が適切な例であり，内包量から比例への一貫した指導過程が可能になる。

(3) 内包量の三用法は，量的意味に即して理解することが大切であるが，第三用法（距離÷速さ＝時間など）については第二用法（距離＝速さ×時間）からの代数的推論も有力な手がかりとなる。そして3つの量を関係づける図式として v−t グラフも強力な武器となりうる。そしてそれは面積の乗法と比例の乗法を橋渡しするものともなる。時間や距離という連続量を，長さ

や面積という連続量との対応で考えることになるが，背後に「連続とは？」という大きな問いが隠れている。このような対応を考えること自体，実数概念の形成という長い道筋において必要な一過程であろう。

(4) 倍もこれまで乗法指導の中でたびたび登場してきている。新しい学習として受けとめられるためには，①量空間の変換（オペレーター）であり②線形であること③変換の合成によって倍の乗法が生ずることなど，倍の数学的概念に固有な性質に焦点をあてることが必要だろう。そして④恒等変換（１倍）にもふれておくと⑤逆変換は逆数倍であることなど，分数の乗除との関連づけも可能になる。（ただし，分数の乗除指導の最初からこのような方法を採ることは可能かも知れないが，検討の余地はある。分数は操作の表現である以前に量の表現であるとも考えるからである。）さらに恒等変換，逆変換の概念は合同変換や「拡大・縮小」の群としての構造などとも関連させて扱うことができる。

(5) これらの量的関係を総合するものが「比例」と「比」の概念である。比例は線形な量的関係を関数で表現するものであり，行列，そして微分係数という今後の数学教育の柱ともいえる重要概念の萌芽に位置している。比は比例関係の断面のようなものだから比の概念は不要ともいえるが，あえて関数とまで考えなくてもよい場面において量的関係を処理するけっこう便利な道具である。[注(8)]異種の量の比における比の値が内包量であり，同種の量の比における比の値が倍であり，ａ：ｂ＝ｃ：ｄという比例関係において「内項を入れ替えても比例式は成り立つ」という定理に両者の関連が内在している。図形の比（相似の関係）においても同様なことが考えられる。式，AB：BC＝A′B′：B′C′ とその内項を入れ替えた式との同等性は，早くから意識させたい。量の２項関係である比が連比に拡張されるのもこの定理によっている。この関連を抜きに「連比の方が一般的」という議論は成り立たない。

(6) 合同と対称性そして中心拡大：Euclid 平面の幾何学を特徴づける変換群を生成する基本的な要素が登場する[注(9),注(10)]

学習指導要領では５年で合同，６年で対称，及び「簡単な縮小図や拡大図」が指導されることとされている。そしてそれらは何の関連も持っていないかのように取り扱われる。しかし，本質的にはこれらはひとまとまりの世界，すなわちユークリット平面の幾何学という一つの世界を構成する基本要素なのだ。当然，これらは内的関連のもとで取り扱われねばならない。

合同な図形とは，合同変換で重ねあわすことのできる図形のことである。合同変換は併進，回転，鏡映という３種類の変換から生成される。対称性とは，この３種類の変換によって不変であるような図形の性質であり，従って併進対称，回転対称，そして鏡映対称の３種類がある。学習指導要領のように，対称性を特徴づける変換を半回転と鏡映に限定することは（それが重要な変換であることはもちろんだが）何の根拠もないばかりか，合同の概念との関連が失われてしまう。そして半回転対称にも鏡映対称にもつらぬく，対称性とは何かという問題が隠されてしまう。また，中心拡大（縮小図や拡大図）だけを切り離して指導することは相似と合同の関連を断ち切ることになる。中心拡大と合同の関連性，不可分性はたとえば２つの中心拡大の合成が，一つの中心拡大となる場合ばかりでなく，一つの併進あるいは一つの半回転になることもあることからも明らかである。

合同では合同変換群を生成する３種の変換とその相互関係（たとえば「２つの鏡映の積は２つの軸が平行か平行でないかによってそれぞれ併進か回転になる」「任意の合同変換は高々３回の鏡映の合成で表すことができる」など），そしてその応用として対称変換群（その図形をそれ

自身に移す変換のつくる群であり，これはその図形の対称性を特徴づける）が指導されるのが自然な流れであろう。そして中心拡大を内的関連を持って教えるためには，たとえばホモセティ群（平行な線分を，それと平行な線分に移す変換で，中心拡大，半回転，及び併進から生成される）がほどよいまとまりとなる。ホモセティ群の世界の中で，子どもたちは基本的な概念を相互関連の中で理解することができるばかりでなく，幾何学の楽しさの代表的な例である共線性（いくつかの点が一つの直線上に並ぶこと）や共点性（いくつかの直線が一つの点に集まること）に出会うことができる。このような事実に子どもが新鮮な感動を示すという事実は，子どもが決して卑俗な実用主義者ではないことの証明にほかならない。また，つまらない教材をぶつけて「関心・意欲・態度」を評価しようとすることの虚しさも，このような事例を通して痛感できるのではないかと思われる。

以上，小学校高学年の教科内容のなかから，相互に内的関連を持ったテーマをいくつか選んでその取り扱いを考えてきた。「火皿」にはなつ「火箭」となるような磨ぎすまされた教材を準備することが何よりも大切であろう。そして数学の中で，あるいは数学と他の教科との関連の中で，子どもの総合的認識の形成を目標とするというのも，小学校高学年の指導の重要な課題であるように思われる。

なお，これらのことはすべて，成功的な実践例の裏づけを持っているのであり，空想の産物ではないこと，そしてその実践例は「とてつもなく優秀な教師による，とてつもなく優秀な子どもに対する授業」ではなく，「ごく普通の教師による，ごく普通の子どもに対する授業」だったことを蛇足ながら付け加えておこう。

[注]

(1) ここでの指導内容はたとえば，亀廼井宏之「整数の性質」（道数協編『新訂　算数たのしい学習プリント』5年）を参照。

(2) 長沢達也「小数のかけ算」（同上）では，小数の乗法を整数の乗法にまず還元し，小数の乗法にかえる論理としてこのような10の負べき計算が位置づけられている。

(3) 具体例は，須田勝彦，氏家英夫「分配法則を軸とした乗法指導の試み」（『教授学の探究』No. 2,1984，北大教育学部教育方法学研究室）を参照。

(4) その数学的理論は，田村二郎「量と数の理論」（1978年，日本評論社）参照。小学校での実践は，須田勝彦「倍と分布」（道数協編『新版　算数たのしい学習プリント』5年下，1986年），高校での実践は，氏家英夫「高校生のための量と数」（数学教育協議会編『数学教室』，1995年，国土社）を参照。

(5) このような観点からの面積指導のプログラムは氏家英夫「分解等積と複比例による面積の指導過程」（北海道教育学会第24回大会，1980年）にはじまり，同「比較と測度の構成による面積概念の指導過程」（1981年度北海道大学大学院教育学研究科修士論文）によって一応の完成を見ている。

(6) 矢野健太郎「図形の性質（上）」（新初等数学講座，1955年，小山書店）は，古代ギリシア数学の面積論の裏に潜んでいた連続に関する問題を簡明に示した好著である。

(7) 須田勝彦「多角形と円」（道数協編『新訂　算数たのしい学習プリント』3年）参照。

(8) 須田勝彦「比」（道数協編『新訂　算数たのしい学習プリント』6年）参照。

(9)(10) 北大教育学部数学教育グループ作成の授業プログラム「鏡による図形の移動」及び改訂版とその授業記録が『教授学の探究』No. 8，1984，及びNo. 12,1994年，北大教育学部教育方法学研究室編，に報告されている。