円の面積と円周率

山　口　　　格
（室蘭工業大学）

§1．平面図形の面積

長方形の面積はその相隣合う2辺の長さの積であることを出発点とすると，三角形，平行四辺形，台形などの面積が長方形の面積と比較することによって求められるのは，小学校の数学教育では周知のことであるが，図形がもっと複雑になってくると，まず，面積とは何であるかを精確に定義する必要が起こってくる。図形の面積とは，図形の〝広がり〞を計るある量であるから，各図形に実数を対応させるある関数であるとしよう。そこで各図形Aに対するこの関数の値をS(A)で表わすことにすると，直観的には明らかな〝面積〞の性質から，関数Sは次のような性質をもつことが要請される。

（i）　各図形Aに対して，$S(A) \geq 0$であり，Aが直線$x=a$，$x=b$，$y=c$，$y=d$で囲まれる長方形（これを$A=[a,b]\times[c,d]$と表わす）であるとき，$S(A)=(b-a)\times(d-c)$

（ii）　図形Aを平行移動して，図形Bに一致させることができるならば，$S(A)=S(B)$。

（iii）　図形AとBとが，共通の内点をもたないとき，$S(A\cup B)=S(A)+S(B)$。

（iv）　図形Aが図形Bを含むならば，$S(A)\geq S(B)$。

そこで問題は我々が考察する対象の平面図形に対して定義される関数で，上の四つの性質をもつようなものが存在するか，また存在するとすれば，その関数は一意的に定まるかということになる。

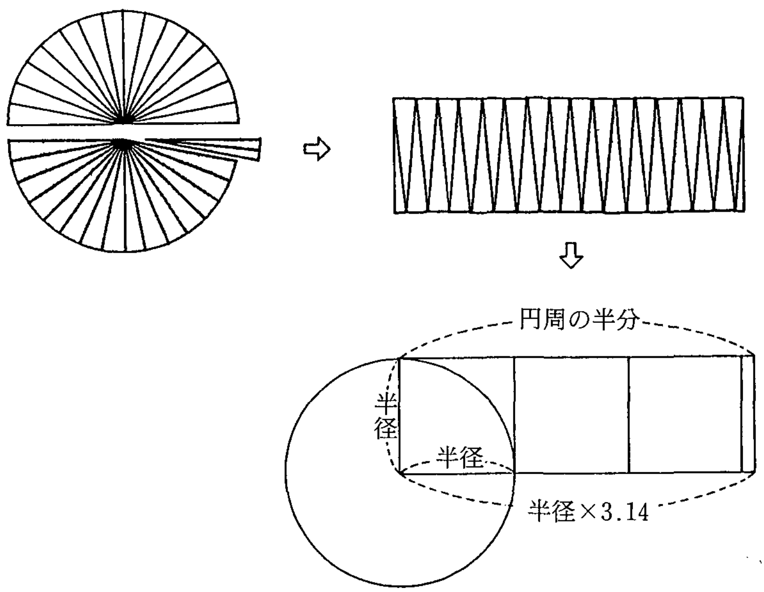
すでに2000年以上も昔，Archimedesは，円や放物線の切片などの図形を，外側と内側から，面積の明らかな簡単な図形の有限個の和集合で近似し，その両方の近似する面積和の極限が一致することを示すことによって，元の図形の面積が計算できることを示した。このArchimedesの考えた方法を受け継いだのが現代の解析学における定積分の概念である。

小学校の数学教育では，極限ないし定積分の概念を用いないで，円のような曲線で囲まれた図形の面積を扱かうことになる。十分多くの平面図形Aに対してS(A)を考えるとなると定積分になってしまうが，Aを限られた図形にするとS(A)は考えやすくなる。ここではAを円として，S(A)すなわち円の面積を求める方法を考察しよう。積分や極限の考えを用いないで円の面積を扱ってみようというのである。

§2．πの定義と円の面積

「わかるさんすう」など従来の実践では，πの定義を円周率としている。例えば「わかるさんすう　6」には次図のようになっている。

円周率を円周／直径で定義するには，「円周は直径に比例する」という事実を認識する必要がある。小学校の実践では多くの場合実際にいつくかの円周を測定してみて，比例定数を定める



方法が行われている。数学的認識の形成としては実験科学的な帰納のみではものたりない。また実践報告などでは，実際に測定した数値にもとづいて，円周率を計算しても 3.14 に近い値が出てこないという報告もある。[1] 測定は実際にはけっこうむづかしいことが多い。まづ本当の円をさがす必要がある。茶筒等小さいものではうまく行かないことが多い。校庭で自転車の車輪をころがすなど大きいもののほうが良い。測定の際ひも状の物指しを使うのに，円柱状のものでは斜めにならないよう注意する。直径をはかるには，物指しの目盛を円周上の一点に固定し，他端をほぼ直径の他端と思われるあたりにもってきて，ゆっくり動かし，もっとも長くなる所を取る。直径は最も遠い二点間の距離という意味である。

いずれにせよ，こういう測定は数回くりかえし，物指しの目も違う所を使って測定し，全部を平均する。目盛りは１ミリ目の$\frac{1}{10}$まで目測で読み，両端の差を取って四捨五入する。

3.14 まで正しく出すには 300 分の１の精度が必要である。したがって数十センチに対しては１ミリ，数メートルに対しては１センチまで正確にはからなければならない。有効数字３桁を正しく測定することはかなり大変な作業である。測定の数学は区間解析を援用するのが良いと考えられる。[2]

そこで私は，π を実在する幾何学的量として定義してみる。それは $\sqrt{2}$ が一辺１の正方形の対角線の長さとして実在するように，π の定義を考えてみる。

半径の長さをきめれば，円の大きさはきまります。すなわち円についてその面積を表わす関数 $S(x)$ を考えると x を半径の長さに取れば $S(x)$ は半径 x の円の面積を表わす関数と考える。[3]

円の面積をはかる単位として，半径が１の円を考えます。半径の長さが１の円の面積をパイといいます。パイはギリシャ文字で π と書きます。

問題　半径２の円の面積は，半径１の円の面積の何倍になるでしょう。

この問題について考えるために，正方形の面積について考えましょう。正方形の面積をはかる単位として１辺１の正方形を考えます。１辺１の正方形の面積を１とします。正方形の１辺が２倍になると面積は２×２，４倍になります。正方形の１辺が３倍になると，面積は３×３，９倍です。再に正方形の１辺が r 倍になると面積は $r \times r$，r^2 倍になります。

ある図形を倍率 r で拡大（$r \geqq 1$）または縮小（$r<1$）とすると，面積は $r \times r$ 倍になります。このことは，曲線で囲まれた図形についても成り立ちます。

半径１の円を倍率 r で拡大または縮小すると半径 r の円になります。半径 r の円の面積は，半径１の円の面積の $r \times r$ 倍です。したがって

$$\boxed{\text{半径 } r \text{ の円の面積} = \pi \times r \times r}$$

となります。[(4)]

上に述べたように半径１の円の面積を π と定義すれば，半径 r の円の面積は πr^2 で与えられることは容易にわかる。

§3．円周の長さ

円の面積については，極限や近似の考え方を用いないで考えてみたが，円周についてはそうはいかない。ここでは近似の考えを用いて，上に定義した π を用いて円周の長さを出してみよう。以下に述べる筋道は1989年の合研に報告したものの抜粋である。[(5)]

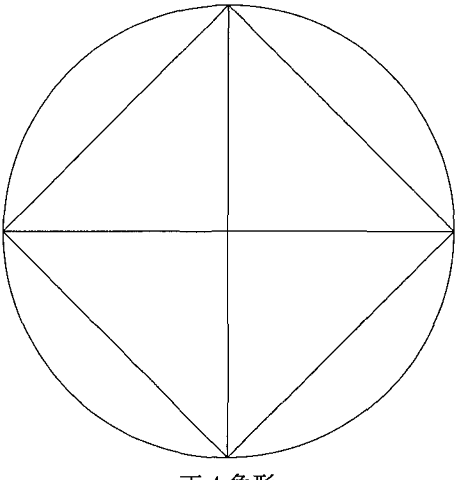
円周の長さ

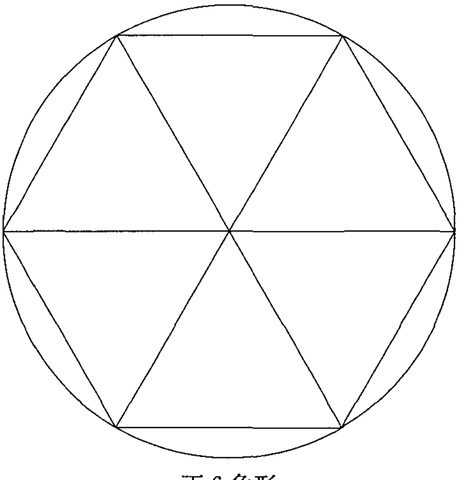
辺の長さがみな同じで，角の大きさもみな同じ多角形を正多角形といいます。まづ円周の上に頂点をもつ正４角形，正６角形，正８角形，正12角形を書いてみましょう。

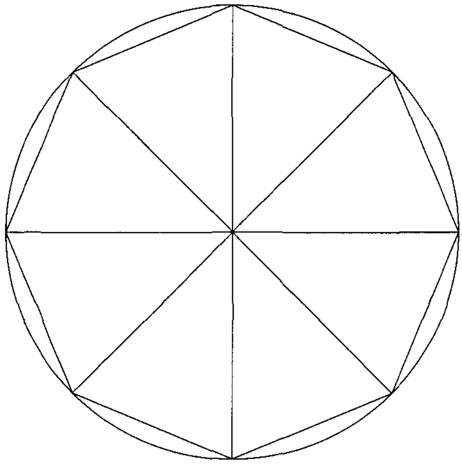
正多角形の辺の数が４，６，８，12とふえるにしたがって，正多角形の面積は円の面積に近づきます。同様に辺の数がふえるにしたがって，正多角形の辺の長さの和は，円周の長さに近づきます。

円周の長さを求めるために，円周の上に頂点のある正多角形の辺の長さの和を考えて，正多角形の辺の数を多くしてみましょう。

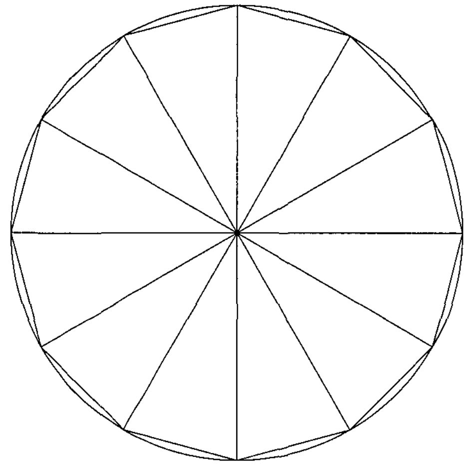
円周の上にすべての頂点がある正多角形を円に内接する正多角形といいます。


正４角形


正６角形



正 8 角形



正 12 角形

半径 r の円に内接する正 16 角形を考えてみましょう。16 の頂点と円の中心を直線で結ぶと，16 個の三角形ができます。その一つが右側の三角形 AOB です。この三角形の高さ OC は半径の長さとほぼ等しいと考えます。またこの正 16 角形の面積は円の面積にほぼ等しいと考えます。半径 r の円の面積は $\pi\times r\times r$ でした。円内には同じ大きさの三角形が 16 個あるのですから，一つの三角形の面積は

$$(\pi\times r\times r)\div 16$$

です。三角形 AOB の面積も同じです。三角形 AOB の面積は(辺 AB の長さ)×(OC の長さ)÷2 です。OC を r としますと

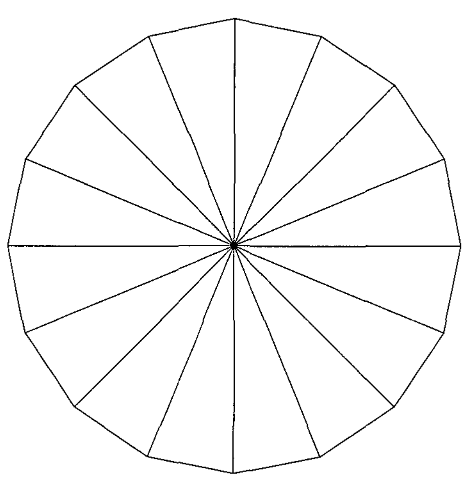
$$(\text{辺 AB の長さ})\times r\div 2$$

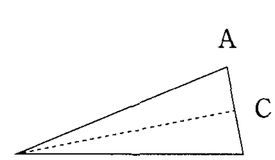
が $(\pi\times r\times r)\div 16$ に等しいのです。これから辺 AB の長さは $\pi\times r\div 8$ であることがわかります。この正 16 角形の辺の長さの和は

$$(\pi\times r\div 8)\times 16$$

です。これは $\pi\times r\times 2$ です。r は半径で，$r\times 2$ は直径の長さです。これで円周の長さを

$$\pi\times\text{直径}$$





と考えてよいことが導かれました。

π の値が3.14に近いことはこのあとで§2に述べたように実測して出してはどうだろう。

注

(1) 長沢達也 「円と正多角形」, 1996年 全道教研報告。「実はこの授業は大失敗であった。測定を全く子ども任せにしたために誤差が大きかったことと，測る対象が小さくて測定しづらく，やはり誤差が生じたために，$2.8<\pi<3.5$ となって前提（$3<\pi<4$）さえ崩れてしまったのである。測定を子どもに任せるにしても，できるだけ伸びの少ない道具を使うとか，数回の測定の平均値を取るとか，測る対象を大きいもの（例えば体育館の床にかいてある円）にするとかの指示をしっかりするべきであった。」と長沢は言っている。

(2) 一松信の意見，「教室に電卓を！」一松信 海鳴社 P21（1980年）

(3)(4) これよりこの節(4)までは1989年の全道合研の報告 山口 格「円の面積と円周率」を書き換えたものである。1989年の報告は面積の複比例性を重視していたのをこのように改めた。

(5) 同上(3)。