ユークリッド平面における相似変換の表現行列と構造について

高　橋　哲　男
(北海道大学大学院教育学研究科博士後期課程)

目　　次

1　はじめに

1.1　本稿の目的

ユークリッド平面において、正格相似変換は併進と回転拡大から生成され、変格相似変換は併進鏡映と拡大鏡映から生成される[1] これらのうち、回転拡大は、拡大率が1または−1の場合の回転と、回転角が$2n\pi(n \in Z)$[2] の場合の中心拡大を含む。また、併進鏡映は、併進のパラメータが零ベクトルの場合の鏡映を含む。以上の7種類[3] を基本的な相似変換であると考えて、相似変換群に部分群を見いだし、その構造を明らかにすることが本稿の目的である[4] その際、初等幾何的方法によらず、表現行列を用いる方法をとった。行列の計算には、*Mathematica* を活用した。

2章では、7つの相似変換の表現行列を求める。3章では、相似変換群の部分群について見てゆく。4章では、相似変換の構造を探ることから得られた、初等幾何教育を考える上で有効と思われる視点について述べておく。

1.2　基礎的事項

本稿で前提とする数学的知識は、おおよそ以下の事項である[5]

1.2.1　平面における写像と変換について

平面から平面への写像fを考える。すなわち、平面上の各点Pに対して平面上の点P'を対応させる規則がfである。fを具体的に記述するのに便利なように、平面に直交軸O_{XY}を設定しておく。$P(x, y), P'(x', y')$とすると、xとyが与えられれば、それに応じてx'とy'が定まるというのが、写像fが与えられているということである。換言すれば、fを与えるということは、xとyという2変数の関数

$$x'=F(x, y), \qquad y'=G(x, y)$$

を与えるということに他ならない。

---

1) H. S. M. コクセター『幾何学入門』明治図書、1965年、76頁を参照。なお、変換の結果、三角形の向きを変えないことを「正格」といい、向きを変えることを「変格」という。

2) 本稿では、記号Zは、整数の集合を表すものとする。

3) 7種類の他に、回転と中心拡大の特殊ケースである半回転（180°回転または拡大率−1の中心拡大）を加えることも考えられる。半回転と併進の集合は、合成変換に関して群をなすからである。しかし、4.3で簡単に触れるにとどめた。

4) 前掲 H. S. M. コクセター『幾何学入門』では、練習問題で、2つの回転拡大の合成変換や、回転拡大と拡大鏡映の合成変換はどうなるかなどを考えさせており、本稿は、同書に負うところが大きい。しかし、同書では、部分群ごとの整理がなされていないため、相似変換群の様々な性質が系統的に述べられているとは言い難い。また、2つの中心拡大の合成変換が再びある中心拡大となるときのその中心の位置を明らかにしていないなど、初等幾何の教育内容としてみるとき、不十分な点もある。そのため、本稿では、変換の表現行列を用いるという一貫した方法で、部分群ごとの整理を試みた。そして、その過程で、先ほどの「中心の位置」(3.4.1) や併進と回転がともに2つの鏡映の合成変換で表される(3.3.1)ことなど、同書には明示的には述べられていなかったいくつかの性質を「発見」した。

5) 岩堀長慶『2次行列の世界』岩波書店、1983年を参照した。

ここで、$x'=F(x,y)$, $y'=G(x,y)$ とがいずれも x, y の1次式になっている、すなわち、a, b, c, a', b', c', が x, y によらない実定数で、

$$\begin{cases} x'=F(x,y)=ax+by+c \\ y'=G(x,y)=a'x+b'y+c' \end{cases}$$

の形になっているとき、写像 f をアファイン写像という。そして、特に、

$$ab'-ba' \neq 0$$

のとき、写像 f をアファイン変換という。相似変換は、アファイン変換の一部である。

1.2.2 変換の表現行列について

変換 f を与える2つの等式

$$\begin{cases} x'=F(x,y)=ax+by+c \\ y'=G(x,y)=a'x+b'y+c' \end{cases}$$

をまとめて、行列間のただ1つの等式に直すことができる。いま、

$$X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、行列の積の定義により、変換 f は、

$$X'=AX$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書かれる。これを、変換 f の行列表示という。また、変換 f を与えるためには、行列 A があれば十分である。すなわち、変換 f は、行列 A によって表現される。したがって、行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を変換 f の表現行列という。

1.2.3 合成変換について

いま、変換 f

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

と、変換 g

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して、合成変換 $g \circ f$ を考える。$g \circ f$ は、平面上の点 $P(x, y)$ を、変換 f により点 $P'(x', y')$ に移した後、さらに、変換 g により点 $P''(x'', y'')$ に移す変換である。このとき、合成変換 $g \circ f$ は、

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される。したがって、合成変換 $g \circ f$ の表現行列は、

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+a'q & bp+b'q & cp+c'q+r \\ ap'+a'q' & bp'+b'q' & cp'+c'q'+r' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

なお、合成変換の順序に関して若干の注意をしておく。本稿では、上の通り、合成変換 $g \circ f$ は $g(f(x))$ を表すものとする。また、乗積表は、次のように読むものとする。

		後	
		f	g
先	f	$f \circ f$	$g \circ f$
	g	$f \circ g$	$g \circ g$

1.2.4 群について

集合 G が存在して、G の任意の元 a, b に対する演算 $\circ$ が定義されていて、以下の条件を満たすとき、集合 G は演算 $\circ$ に関して群をなすという[6]。

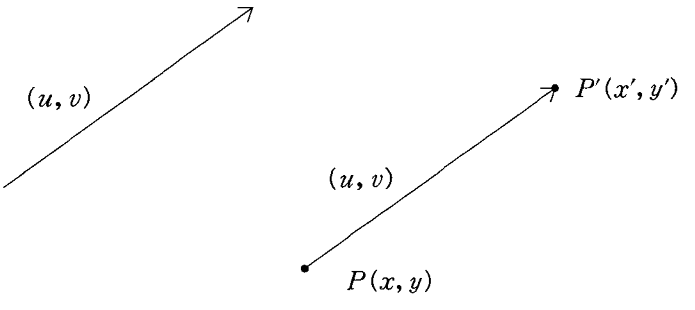
6) 本稿では、$\circ$ は、変換の合成を表す。また、群をなすことの証明において、結合法則の成立、単位元の存在、逆元の存在を自明のこととしている。したがって、合成変換に関して閉じていることのみを示している。

1. $\forall a \in G, \forall b \in G [a \circ b \in G]$
2. 結合法則　$\forall a \in G, \forall b \in G, \forall c \in G [a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c]$
3. 単位元の存在　$\exists e \in G, \forall a \in G [a \circ e = e \circ a = a]$
4. 逆元の存在　$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G [a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e]$

2　相似変換の表現行列

2次元座標平面上の任意の点を $P(x, y)$ とし、考察している相似変換による点 $P(x, y)$ の像を点 $P'(x', y')$ とする。

2.1　併　　進



併進とは、あるベクトル $\vec{v} = (u, v)$ による平行移動のことである。この併進を、

$$T(u, v)$$

と書く。このとき、点 P の像である点 P' は、

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$$

を満たすように定められる。したがって、

$$(x', y') - (x, y) = (u, v)$$

すなわち、

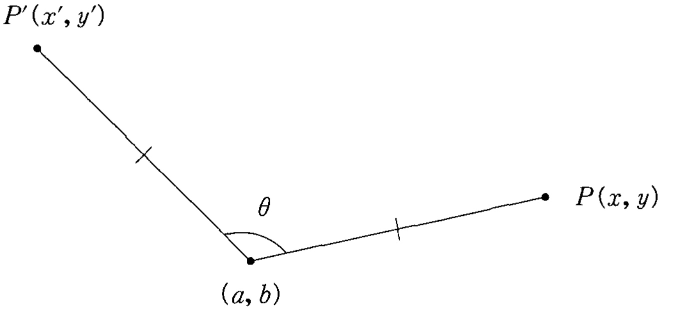
$$\begin{cases} x' = x + u \\ y' = y + v \end{cases}$$

が得られる。したがって、題意の併進の表現行列は、

$$T(u, v) \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる。

2.2 回　転



回転とは、ある点(a, b)を中心とする角θ回転移動のことである。点(a, b)を回転の中心、θを回転角という。この回転を、

$$O_{(a,b)}(\theta:1)$$

と書く。この回転は、「ベクトル$(-a, -b)$による併進」、「原点を中心とする角θ回転」、「ベクトル(a, b)による併進」という3つの変換をこの順序で行ったものと考えられる。したがって(「原点を中心とする角θ回転」に関する知識を既知とすれば)、

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\theta - (y-b)\sin\theta + a \\ y' = (x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta + b \end{cases}$$

すなわち、

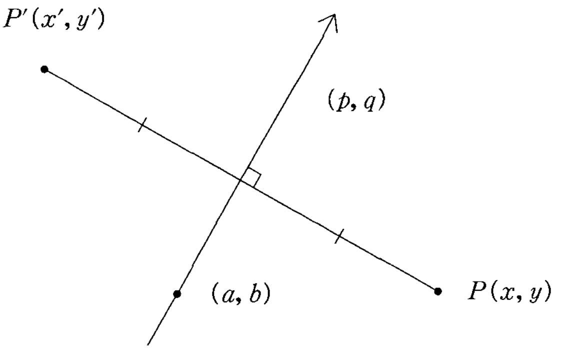
$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a(1-\cos\theta) + b\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta - a\sin\theta + b(1-\cos\theta) \end{cases}$$

が得られる。したがって、題意の回転の表現行列は、

$$O_{(a,b)}(\theta:1) \quad : \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a(1-\cos\theta)+b\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -a\sin\theta+b(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる。

2.3 鏡　映



鏡映とは、ある直線に関する線対称移動のことである。この直線のことを鏡映軸という。点(a, b)を通り、方向ベクトル(p, q)をもつ直線 ℓ に関する鏡映を、

$$R\{{}^{p;q}_{a;b}\}$$

と書く[7] このとき、直線 ℓ は、パラメータ t を用いて、

$$\begin{cases} x = a + pt \\ y = b + qt \end{cases}$$

と表される。パラメータ t を消去すれば、

$$qx - py = qa - pb$$

となる。ところで、線分 PP' の中点

$$\left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2}\right)$$

が直線 ℓ 上にあることから、

$$q\left(\frac{x + x'}{2}\right) - p\left(\frac{y + y'}{2}\right) = qa - pb$$

すなわち、

$$q(x + x') - p(y + y') = 2(qa - pb) \tag{3}$$

が得られる。また、直線 ℓ の方向ベクトル(p, q)と直線 PP' の方向ベクトル$(x - x', y - y')$は垂直なので、内積

$$(p, q) \cdot (x - x', y - y') = 0$$

すなわち、

7) むろん、ベクトル$(p, q) \neq \vec{0}$、すなわち、$p^2 + q^2 \neq 0$ とする。

$$p(x-x')+q(y-y')=0 \tag{4}$$

が得られる。ここで、(3)及び(4)から、

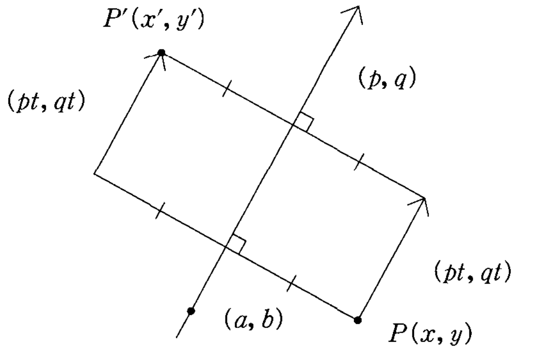
$$\begin{cases} x'=\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}x+\dfrac{2pq}{p^2+q^2}y+\dfrac{2q(aq-bp)}{p^2+q^2} \\ y'=\dfrac{2pq}{p^2+q^2}x-\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}y-\dfrac{2p(aq-bp)}{p^2+q^2} \end{cases}$$

が得られる。したがって、題意の鏡映の表現行列は、

$$R\{{}^{p,q}_{a,b}\} \quad : \quad \begin{pmatrix} \dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & \dfrac{2pq}{p^2+q^2} & \dfrac{2q(aq-bp)}{p^2+q^2} \\ \dfrac{2pq}{p^2+q^2} & -\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & -\dfrac{2p(aq-bp)}{p^2+q^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

となる。

2.4 併進鏡映



併進鏡映とは、ある鏡映軸 ℓ に関する鏡映と、ℓ に平行なあるベクトルによる併進の合成変換である。鏡映軸を、点(a, b)を通り、方向ベクトル(p, q)をもつ直線 ℓ とする。このとき、併進鏡映の定義から、併進のパラメータのベクトルは、(pt, qt)とおける。この併進鏡映を、

$$R\{{}^{p,q}_{a,b}\}(pt, qt)$$

と書く。併進鏡映においては、それ自身の定める併進と鏡映の合成変換の順序は可換であるから、

$$R\{{}^{p,q}_{a,b}\}(pt, qt)=R\{{}^{p,q}_{a,b}\}\circ T(pt, qt)=T(pt, qt)\circ R\{{}^{p,q}_{a,b}\}$$

である。したがって、題意の併進鏡映の表現行列は、行列(1)と行列(5)の積を求めた上で、

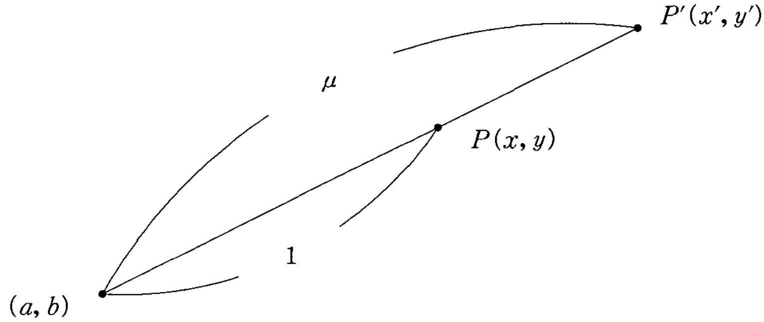
$$u = pt, \qquad v = qt$$

を代入したもの、すなわち、

$$R^{(p;q)}_{(a;b)}(pt, qt) \quad : \quad \begin{pmatrix} \dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & \dfrac{2pq}{p^2+q^2} & \dfrac{2q(aq-bp)}{p^2+q^2}+pt \\ \dfrac{2pq}{p^2+q^2} & -\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & -\dfrac{2p(aq-bp)}{p^2+q^2}+qt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

となる。

2.5 中心拡大



中心拡大とは、ある点(a, b)を中心とするμ倍拡大[8]のことである。点(a, b)を拡大の中心、μを拡大率という。この中心拡大を、

$$O_{(a,b)}(0 : \mu)$$

と書く。この中心拡大は、「ベクトル$(-a, -b)$による併進」、「原点を中心とするμ倍中心拡大」、「ベクトル(a, b)による併進」という3つの変換をこの順序で行ったものと考えられる。したがって、

$$\begin{cases} x' = \mu(x-a)+a \\ y' = \mu(y-b)+b \end{cases}$$

すなわち、

$$\begin{cases} x' = \mu x + a(1-\mu) \\ y' = \mu y + b(1-\mu) \end{cases}$$

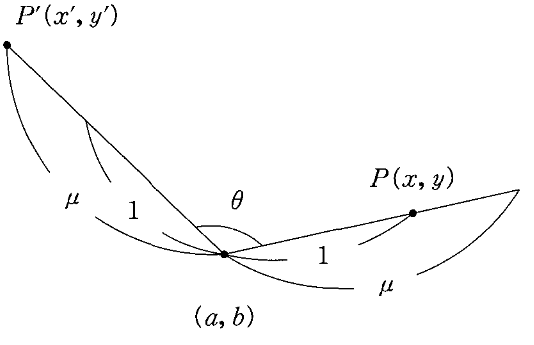
8) μの絶対値が1より小さい、いわゆる「縮小」の場合を含む。また、$\mu \neq 0$である。

が得られる。したがって、題意の中心拡大の表現行列は、

$$O_{(a,b)}(0:\mu) \quad : \quad \begin{pmatrix} \mu & 0 & a(1-\mu) \\ 0 & \mu & b(1-\mu) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

となる。

2.6 回転拡大



回転拡大とは、ある点(a, b)を中心とする角θ回転と、同じ点(a, b)を中心とするμ倍中心拡大の合成変換である。この回転拡大を

$$O_{(a,b)}(\theta:\mu)$$

と書く。回転拡大においては、それ自身の定める回転と中心拡大の合成変換の順序は可換であるから、

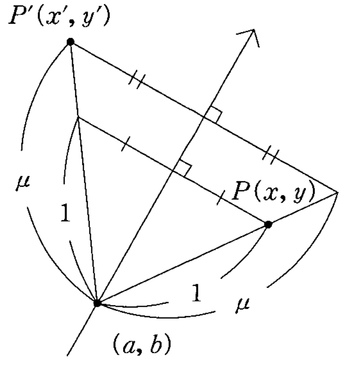
$$O_{(a,b)}(\theta:\mu) = O_{(a,b)}(0:\mu) \circ O_{(a,b)}(\theta:1) = O_{(a,b)}(\theta:1) \circ O_{(a,b)}(0:\mu)$$

である。したがって、題意の回転拡大の表現行列は、行列(2)と行列(7)の積、すなわち、

$$O_{(a,b)}(\theta:\mu) \quad : \quad \begin{pmatrix} \mu\cos\theta & -\mu\sin\theta & a(1-\mu\cos\theta)+b\mu\sin\theta \\ \mu\sin\theta & \mu\cos\theta & -a\mu\sin\theta+b(1-\mu\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

となる。

2.7　拡大鏡映



拡大鏡映とは、ある点(a, b)を中心とするμ倍中心拡大と、その点(a, b)を通るある鏡映軸ℓに関する鏡映の合成変換である。ℓを、点(a, b)を通り、方向ベクトル(p, q)をもつ直線とする。この拡大鏡映を、

$$R\{^{p;q}_{a,b}\}(\mu)$$

と書く。拡大鏡映においては、それ自身の定める中心拡大と鏡映の合成変換の順序は可換であるから、

$$R\{^{p;q}_{a,b}\}(\mu) = R\{^{p;q}_{a,b}\} \circ O_{(a,b)}(0:\mu) = O_{(a,b)}(0:\mu) \circ R\{^{p;q}_{a,b}\}$$

である。したがって、題意の拡大鏡映の表現行列は、行列(5)と行列(7)の積、すなわち、

$$R\{^{p;q}_{a,b}\}(\mu) \quad : \quad \begin{pmatrix} \dfrac{(p^2-q^2)\mu}{p^2+q^2} & \dfrac{2pq\mu}{p^2+q^2} & \dfrac{a\{p^2+q^2-(p^2-q^2)\mu\}-2bpq\mu}{p^2+q^2} \\ \dfrac{2pq\mu}{p^2+q^2} & -\dfrac{(p^2-q^2)\mu}{p^2+q^2} & \dfrac{b\{p^2+q^2+(p^2-q^2)\mu\}-2apq\mu}{p^2+q^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

となる。

3　相似変換群の部分群

3.1　併 進 群

併進群

	併　進
併　進	3.1.1

3.1.1　(併進)∘(併進)　は　(併進)　である

2つの併進

$$T(u_1, v_1), \qquad T(u_2, v_2)$$

の合成変換

$$T(u_2, v_2) \circ T(u_1, v_1)$$

の表現行列は、

$$T(u_2, v_2) \circ T(u_1, v_1) \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & v_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1+u_2 \\ 0 & 1 & v_1+v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

となる。したがって、

$$T(u_2, v_2) \circ T(u_1, v_1) = T(u_1+u_2, v_1+v_2)$$

である。以上で、(併進)∘(併進) が (併進) になることが示された。

併進群

	併　進
併　進	併　進

3.2　正格合同変換群

正格合同変換群を構成する変換は、回転と併進である。

正格合同変換群

	回　転	併　進
回　転	3.2.1 3.2.3	3.2.3
併　進	3.2.2 3.2.3	[併進群]

3.2.1　(回転)∘(回転) は (併進)∘(回転) に帰着される

2つの回転

$$O_{(a_1, b_1)}(\theta_1 : 1), \qquad O_{(a_2, b_2)}(\theta_2 : 1)$$

の合成変換

$$O_{(a_2, b_2)}(\theta_2 : 1) \circ O_{(a_1, b_1)}(\theta_1 : 1)$$

の表現行列は、

$$O_{(a_2,b_2)}(\theta_2:1)\circ O_{(a_1,b_1)}(\theta_1:1) \quad :$$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & a_2(1-\cos\theta_2)+b_2\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & -a_2\sin\theta_2+b_2(1-\cos\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\times\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & a_1(1-\cos\theta_1)+b_1\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & -a_1\sin\theta_1+b_1(1-\cos\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -(a_1-a_2)+(a_1-a_2)\cos\theta_2-(b_1-b_2)\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & -(b_1-b_2)+(b_1-b_2)\cos\theta_2+(a_1-a_2)\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\times\begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & a_1\{1-\cos(\theta_1+\theta_2)\}+b_1\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & -a_1\sin(\theta_1+\theta_2)+b_1\{1-\cos(\theta_1+\theta_2)\} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{11}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
&O_{(a_2,b_2)}(\theta_2:1)\circ O_{(a_1,b_1)}(\theta_1:1) \\
&\quad = T(-(a_1-a_2)+(a_1-a_2)\cos\theta_2-(b_1-b_2)\sin\theta_2, \\
&\qquad\quad -(b_1-b_2)+(b_1-b_2)\cos\theta_2+(a_1-a_2)\sin\theta_2) \\
&\qquad \circ O_{(a_1,b_1)}(\theta_1+\theta_2:1)
\end{aligned}$$

である。以上で、(回転)∘(回転) が (併進)∘(回転) に帰着されることが示された。

3.2.2 (回転)∘(併進) は (併進)∘(回転) に帰着される

回転

$$O_{(a,b)}(\theta:1)$$

と併進

$$T(u,v)$$

の合成変換

$$O_{(a,b)}(\theta:1)\circ T(u,v)$$

の表現行列は、

$$O_{(a,b)}(\theta:1)\circ T(u,v)\ :$$
$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & a(1-\cos\theta)+b\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta & -a\sin\theta+b(1-\cos\theta)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & u\\ 0 & 1 & v\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & a(1-\cos\theta)+b\sin\theta+u\cos\theta-v\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta & -a\sin\theta+b(1-\cos\theta)+u\sin\theta+v\cos\theta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & u\cos\theta-v\sin\theta\\ 0 & 1 & u\sin\theta+v\cos\theta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & a(1-\cos\theta)+b\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta & -a\sin\theta+b(1-\cos\theta)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (12)$$

となる。したがって、

$$O_{(a,b)}(\theta:1)\circ T(u,v)=T(u\cos\theta-v\sin\theta,\ u\sin\theta+v\cos\theta)\circ O_{(a,b)}(\theta:1)$$

である。以上で、(回転)∘(併進) が (併進)∘(回転) に帰着されることが示された。

3.2.3 (併進)∘(回転) は (併進) または (回転) である

併進

$$T(u,v)$$

と回転

$$O_{(a,b)}(\theta:1)$$

の合成変換

$$T(u,v)\circ O_{(a,b)}(\theta:1)$$

の表現行列は、

$$T(u,v)\circ O_{(a,b)}(\theta:1)\ :$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & u\\ 0 & 1 & v\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & a(1-\cos\theta)+b\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta & -a\sin\theta+b(1-\cos\theta)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & a(1-\cos\theta)+b\sin\theta+u\\ \sin\theta & \cos\theta & -a\sin\theta+b(1-\cos\theta)+v\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (13)$$

となる。

(a)　$\exists n\in Z[\theta=2n\pi]$ のとき

$$O_{(a,b)}(\theta:1)=O_{(a,b)}(0:1)$$

であり、これは恒等変換である。したがって、

$$T(u, v) \circ O_{(a,b)}(\theta : 1) = T(u, v)$$

である。

(b) $\forall n \in Z[\theta \neq 2n\pi]$ **のとき**

$$T(u, v) \circ O_{(a,b)}(\theta : 1) \quad : \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & p(1-\cos\theta) + q\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -p\sin\theta + q(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

となる。ただし、

$$\begin{cases} p = \dfrac{(u+2a)(1-\cos\theta) - v\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} \\ q = \dfrac{(v+2b)(1-\cos\theta) + u\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} \end{cases}$$

である。[9] したがって、

$$T(u, v) \circ O_{(a,b)} = O_{(p,q)}(\theta : 1)$$

である。以上で、(併進)∘(回転) が、回転角が 2π の整数倍であるか否かによって、(併進) または (回転) になることが示された。また 3.2.1 とあわせて、(回転)∘(回転) が (併進) または (回転) になることが示され、3.2.2 とあわせて、(回転)∘(併進) が (併進) または (回転) になることが示された。

正格合同変換群

	回　転	併　進
回　転	併　進 回　転	併　進 回　転
併　進	併　進 回　転	[併進群]

3.3 合同変換群

合同変換群を構成する変換は、併進鏡映と鏡映と回転と併進である。ここでは、鏡映を併進鏡映の一部として扱う。

9) $\forall n \in Z[\theta \neq 2n\pi]$ のとき、$2(1-\cos\theta) \neq 0$ である。

合同変換群

	併進鏡映	回　転	併　進
併進鏡映	3.3.1	3.3.5	3.3.3
回　転	3.3.4	[正格合同変換群]	
併　進	3.3.2 3.3.3		

3.3.1　(併進鏡映)∘(併進鏡映) は (併進) または (回転) である

(a)　**2つの鏡映軸が平行であるとき**　2つの鏡映軸の方向ベクトルが一致するとしてよい。そこで、2つの併進鏡映

$$R^{(p,q)}_{(a_1,b_1)}(pt_1,\ qt_1),\qquad R^{(p,q)}_{(a_2,b_2)}(pt_2,\ qt_2)$$

の合成変換

$$R^{(p,q)}_{(a_2,b_2)}(pt_2,\ qt_2)\circ R^{(p,q)}_{(a_1,b_1)}(pt_1,\ qt_1)$$

を調べる。なお、ここで、ベクトル$(p,\ q)$とベクトル$(a_2-a_1,\ b_2-b_1)$は垂直であるとして差し支えない。したがって、内積

$$(p,\ q)\cdot(a_2-a_1,\ b_2-b_1)=0$$

すなわち、

$$p(a_2-a_1)+q(b_2-b_1)=0$$

である。この関係式を使うと、合成変換

$$R^{(p,q)}_{(a_2,b_2)}(pt_2,\ qt_2)\circ R^{(p,q)}_{(a_1,b_1)}(pt_1,\ qt_1)$$

の表現行列は、

$$R^{(p,q)}_{(a_2,b_2)}(pt_2,\ qt_2)\circ R^{(p,q)}_{(a_1,b_1)}(pt_1,\ qt_1)\quad :$$

$$\begin{pmatrix} \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & \frac{2pq}{p^2+q^2} & \frac{2q(a_2q-b_2p)}{p^2+q^2}+pt_2 \\ \frac{2pq}{p^2+q^2} & -\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & -\frac{2p(a_2q-b_2p)}{p^2+q^2}+qt_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & \frac{2pq}{p^2+q^2} & \frac{2q(a_1q-b_1p)}{p^2+q^2}+pt_1 \\ \frac{2pq}{p^2+q^2} & -\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & -\frac{2p(a_1q-b_1p)}{p^2+q^2}+qt_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2(a_2-a_1)+p(t_1+t_2) \\ 0 & 1 & 2(b_2-b_1)+q(t_1+t_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

となる。したがって、

$$R^{(p,q)}_{(a_2,b_2)}(pt_2, qt_2)\circ R^{(p,q)}_{(a_1,b_1)}(pt_1, qt_1)$$
$$=T(2(a_2-a_1)+p(t_1+t_2), 2(b_2-b_1)+q(t_1+t_2))$$

である。

なお、ここで、系として、「2つの鏡映軸が平行であるとき、(鏡映)∘(鏡映) は併進である。しかも、その併進のパラメータのベクトルは鏡映軸に垂直で、その距離は鏡映軸間の距離の2倍である。」が容易にしたがう（なぜなら、上の例で、$t_1=t_2=0$ を考えればよい)。

(b)　**2つの鏡映軸が平行ではないとき**　2つの鏡映軸はともに点(a, b)を通るとしてよい。そこで、2つの併進鏡映

$$R^{(p_1,q_1)}_{(a,b)}(p_1t_1, q_1t_1), \qquad R^{(p_2,q_2)}_{(a,b)}(p_2t_2, q_2t_2)$$

の合成変換

$$R^{(p_2,q_2)}_{(a,b)}(p_2t_2, q_2t_2)\circ R^{(p_1,q_1)}_{(a,b)}(p_1t_1, q_1t_1)$$

を調べる。なお、ここで、

$$\begin{pmatrix}p_2\\q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\q_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1\cos\theta-q_1\sin\theta\\ p_1\sin\theta+q_1\cos\theta\end{pmatrix}, \qquad 0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

として差し支えない。[10)]

ここで、補題として、「2つの鏡映軸が平行ではないとき、(鏡映)∘(鏡映)は回転である。しかも、その回転の中心は2つの鏡映軸の交点であり、回転角は、2つの鏡映軸のなす鋭角または直角の2倍である。」を示しておく。それには、上の例で、

$$t_1=t_2=0$$

の場合を考えればよく、このとき、

$$R^{(p_1,q_1)}_{(a,b)}(0,0)=R^{(p_1,q_1)}_{(a,b)}, \qquad R^{(p_2,q_2)}_{(a,b)}(0,0)=R^{(p_2,q_2)}_{(a,b)}$$

である。以下の関係式

$$\begin{cases}p_2{}^2=p_1{}^2\cos^2\theta+q_1{}^2\sin^2\theta-p_1q_1\sin 2\theta\\ q_2{}^2=p_1{}^2\sin^2\theta+q_1{}^2\cos^2\theta+p_1q_1\sin 2\theta\\ p_2{}^2+q_2{}^2=p_1{}^2+q_1{}^2\\ p_2q_2=p_1q_1\cos 2\theta+\frac{1}{2}(p_1{}^2-q_1{}^2)\sin 2\theta\end{cases}$$

を使って変形すると、合成変換

$$R^{(p_2,q_2)}_{(a,b)}\circ R^{(p_1,q_1)}_{(a,b)}$$

10)　2つの鏡映軸のなす鋭角または直角を θ としている。

の表現行列は、

$$R_{(a,b)}^{(p_2,q_2)} \circ R_{(a,b)}^{(p_1,q_1)} \quad :$$

$$\begin{pmatrix} \frac{p_2^2-q_2^2}{p_2^2+q_2^2} & \frac{2p_2q_2}{p_2^2+q_2^2} & \frac{2q_2(aq_2-bp_2)}{p_2^2+q_2^2} \\ \frac{2p_2q_2}{p_2^2+q_2^2} & -\frac{p_2^2-q_2^2}{p_2^2+q_2^2} & -\frac{2p_2(aq_2-bp_2)}{p_2^2+q_2^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p_1^2-q_1^2}{p_1^2+q_1^2} & \frac{2p_1q_1}{p_1^2+q_1^2} & \frac{2q_1(aq_1-bp_1)}{p_1^2+q_1^2} \\ \frac{2p_1q_1}{p_1^2+q_1^2} & -\frac{p_1^2-q_1^2}{p_1^2+q_1^2} & -\frac{2p_1(aq_1-bp_1)}{p_1^2+q_1^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & a(1-\cos 2\theta)+b\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & -a\sin 2\theta+b(1-\cos 2\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

となる。したがって、

$$R_{(a,b)}^{(p_2,q_2)} \circ R_{(a,b)}^{(p_1,q_1)} = O_{(a,b)}(2\theta : 1)$$

である。以上で、補題が示された。

したがって、問題にしていた2つの併進鏡映の合成変換は、

$$\begin{aligned} & R_{(a,b)}^{(p_2,q_2)}(p_2t_2, q_2t_2) \circ R_{(a,b)}^{(p_1,q_1)}(p_1t_1, q_1t_1) \\ &= T(p_2t_2, q_2t_2) \circ R_{(a,b)}^{(p_2,q_2)} \circ T(p_1t_1, q_1t_1) \circ R_{(a,b)}^{(p_1,q_1)} \\ &= T(p_2t_2, q_2t_2) \circ R_{(a,b)}^{(p_2,q_2)} \circ R_{(a,b)}^{(p_1,q_1)} \circ T(p_1t_1, q_1t_1) \\ &= T(p_2t_2, q_2t_2) \circ O_{(a,b)}(2\theta : 1) \circ T(p_1t_1, q_1t_1) \quad (\because \text{補題}) \\ &= T(p_2t_2, q_2t_2) \circ T(p_1t_1\cos 2\theta - q_1t_1\sin 2\theta, p_1t_1\sin 2\theta + q_1t_1\cos 2\theta) \circ O_{(a,b)}(2\theta : 1) \ (\because 3.2.2) \\ &= T(p_1t_1\cos 2\theta - q_1t_1\sin 2\theta + p_2t_2, p_1t_1\sin 2\theta + q_1t_1\cos 2\theta + q_2t_2) \circ O_{(a,b)}(2\theta : 1) \quad (\because 3.1.1) \end{aligned}$$

であるが、3.2.3により、これは、1つの(回転)になる。以上で、(併進鏡映)∘(併進鏡映)が、2つの鏡映軸が平行であるか否かによって、(併進) または (回転) になることが示された。

3.3.2 (併進鏡映)∘(併進) は (併進)∘(併進鏡映) に帰着される

併進鏡映

$$R_{(a,b)}^{(p,q)}(pt, qt)$$

と併進

$$T(u, v)$$

の合成変換

$$R_{(a,b)}^{(p,q)}(pt, qt) \circ T(u, v)$$

を調べる。なお、ここで、ベクトル(r, s)を考え、

$$(u, v) = (p, q) + (r, s), \qquad (p, q)\cdot(r, s) = 0$$

として差し支えない。すなわち、

$$\begin{cases} u=p+r, & v=q+s \\ pr+qs=0 \end{cases}$$

である。この関係式を使うと、合成変換

$$R\{^{p;q}_{a,b}\}(pt, qt)\circ T(u, v)$$

の表現行列は、

$$R\{^{p;q}_{a,b}\}(pt, qt)\circ T(u, v) \quad :$$

$$\begin{pmatrix} \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & \frac{2pq}{p^2+q^2} & \frac{2q(aq-bp)}{p^2+q^2}+pt \\ \frac{2pq}{p^2+q^2} & -\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & -\frac{2p(aq-bp)}{p^2+q^2}+qt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & \frac{2pq}{p^2+q^2} & \frac{u(p^2-q^2)+2vpq+2q(aq-bp)}{p^2+q^2}+pt \\ \frac{2pq}{p^2+q^2} & -\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & \frac{2upq-v(p^2-q^2)-2p(aq-bp)}{p^2+q^2}+qt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & \frac{2pq}{p^2+q^2} & \frac{2q\{(a-r)q-bp\}}{p^2+q^2}+pt+u \\ \frac{2pq}{p^2+q^2} & -\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & -\frac{2p\{(a-r)q-(b-s)p\}}{p^2+q^2}+qt+v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & \frac{2pq}{p^2+q^2} & \frac{2q\{(a-r)q-bp\}}{p^2+q^2}+pt \\ \frac{2pq}{p^2+q^2} & -\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & -\frac{2p\{(a-r)q-(b-s)p\}}{p^2+q^2}+qt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

となる。したがって、

$$R\{^{p;q}_{a,b}\}(pt, qt)\circ T(u, v)=T(u, v)\,R\{^{p;q}_{a-r,b-s}\}(pt, qt)$$

である。以上で、(併進鏡映)∘(併進) が (併進)∘(併進鏡映) に帰着されることが示された。

3.3.3 (併進)∘(併進鏡映) は (併進鏡映) である

併進

$$T(u, v)$$

と併進鏡映

$$R\{^{p;q}_{a,b}\}(pt, qt)$$

の合成変換

$$T(u,v)\circ R_{(a,b)}^{(p,q)}(pt,qt)$$

を調べる。ここでも、ベクトル(r,s)を考え、

$$(u,v)=(p,q)+(r,s),\qquad (p,q)\cdot(r,s)=0$$

として差し支えない。すなわち、

$$\begin{cases} u=p+r, \qquad v=q+s \\ pr+qs=0 \end{cases}$$

である。この関係式を使うと、

$$T(u,v)\circ R_{(a,b)}^{(p,q)}(pt,qt)$$

の表現行列は、

$$T(u,v)\circ R_{(a,b)}^{(p,q)}(pt,qt)\quad :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & \dfrac{2pq}{p^2+q^2} & \dfrac{2q(aq-bp)}{p^2+q^2}+pt \\ \dfrac{2pq}{p^2+q^2} & -\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & -\dfrac{2p(aq-bp)}{p^2+q^2}+qt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & \dfrac{2pq}{p^2+q^2} & \dfrac{2q(aq-bp)}{p^2+q^2}+pt+u \\ \dfrac{2pq}{p^2+q^2} & -\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & -\dfrac{2p(aq-bp)}{p^2+q^2}+qt+v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & \dfrac{2pq}{p^2+q^2} & \dfrac{2q\left\{\left(a+\frac{1}{2}r\right)q-\left(b+\frac{1}{2}s\right)p\right\}}{p^2+q^2}+p(1+t) \\ \dfrac{2pq}{p^2+q^2} & -\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & -\dfrac{2p\left\{\left(a+\frac{1}{2}r\right)q-\left(b+\frac{1}{2}s\right)p\right\}}{p^2+q^2}+q(1+t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

となる。したがって、

$$T(u,v)\circ R_{(a,b)}^{(p,q)}(pt,qt)=R_{(a+\frac{1}{2}r,b+\frac{1}{2}s)}^{(p,q)}(p(1+t),q(1+t))$$

である。以上で（併進）∘（併進鏡映）が（併進鏡映）になることが示された。また、3.3.2とあわせて、（併進鏡映）∘（併進）が（併進鏡映）になることが示された。

3.3.4　（併進鏡映）∘（回転）は（併進鏡映）である

併進鏡映

$$R_{(c,d)}^{(p,q)}(pt,qt)$$

と回転

$$O_{(a,b)}(\theta:1)$$

の合成変換

$$R_{\{c,d\}}^{\{p;q\}}(pt,\ qt)\circ O_{(a,b)}(\theta:1)$$

を調べる。ここで、内積

$$(p,\ q)\cdot(a-c,\ b-d)=0$$

として差し支えない。[11] すなわち、

$$p(a-c)+q(b-d)=0$$

である。ところで、3.3.1の補題において、回転が2つの鏡映の合成変換として表されることを示した。そこで、

$$O_{(a,b)}(\theta:1)=R_{\{a,b\}}^{\{p;q\}}\circ R_{\{a,b\}}^{\{p';q'\}}$$

とおく。ただし、

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p'\cos\theta'-q'\sin\theta' \\ p'\sin\theta'+q'\cos\theta' \end{pmatrix},$$

$$\theta'=\begin{cases} \dfrac{\theta}{2} & (0\leq\theta<\pi) \\ \pi-\dfrac{\theta}{2} & (\pi\leq\theta<2\pi) \end{cases}$$

である。したがって、問題にしていた併進鏡映と回転の合成変換は、

$$\begin{aligned} & R_{\{c,d\}}^{\{p;q\}}(pt,\ qt)\circ O_{(a,b)}(\theta:1) \\ &=T(pt,\ qt)\circ R_{\{c,d\}}^{\{p;q\}}\circ R_{\{a,b\}}^{\{p;q\}}\circ R_{\{a,b\}}^{\{p';q'\}} \\ &=T(pt,\ qt)\circ T(2(c-a)+2(d-b))\circ R_{\{a,b\}}^{\{p';q'\}} \quad (\because 3.3.1.(\mathrm{a})) \\ &=T(2(c-a)+pt,2(d-b)+qt)\circ R_{\{a,b\}}^{\{p';q'\}} \quad (\because 3.1.1) \\ &=R_{\{c,d\}}^{\{p';q'\}}(pt,\ qt) \quad (\because 3.3.3) \end{aligned}$$

である。以上で、(併進鏡映)∘(回転) が (併進鏡映) になることが示された。

3.3.5 (回転)∘(併進鏡映) は (併進鏡映) である

回転

$$O_{(a,b)}(\theta:1)$$

11) この式を満たすような点$(c,\ d)$を鏡映軸上にとればよい。

と併進鏡映

$$R_{(c,d)}^{(p,q)}(pt, qt)$$

の合成変換

$$O_{(a,b)}(\theta:1) \circ R_{(c,d)}^{(p,q)}(pt, qt)$$

を調べる。ここで、内積

$$(p, q) \cdot (c-a, d-b) = 0$$

として差し支えない。[12] すなわち、

$$p(c-a) + q(d-b) = 0$$

である。ところで、3.3.1 の補題において、回転が 2 つの鏡映の合成変換として表されることを示した。そこで、

$$O_{(a,b)}(\theta:1) = R_{(a,b)}^{(p',q')} \circ R_{(a,b)}^{(p,q)}$$

とおく。ただし、

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\cos\theta' - q\sin\theta' \\ p\sin\theta' + q\cos\theta' \end{pmatrix},$$

$$\theta' = \begin{cases} \dfrac{\theta}{2} & (0 \leq \theta < \pi) \\ \pi - \dfrac{\theta}{2} & (\pi \leq \theta < 2\pi) \end{cases}$$

である。したがって、問題にしていた回転と併進鏡映の合成変換は、

$$\begin{aligned} & O_{(a,b)}(\theta:1) \circ R_{(c,d)}^{(p,q)}(pt, qt) \\ &= R_{(a,b)}^{(p',q')} \circ R_{(a,b)}^{(p,q)} \circ R_{(c,d)}^{(p,q)}(pt, qt) \\ &= R_{(a,b)}^{(p',q')} \circ T(2(a-c)+pt, 2(b-d)+qt) \quad (\because 3.3.1.(\mathrm{a})) \\ &= T(2(a-c)+pt, 2(b-d)+qt) \circ R_{(2c-a,2d-b)}^{(p',q')} \quad (\because 3.3.2) \\ &= R_{(c,d)}^{(p',q')}(pt, qt) \quad (\because 3.3.3) \end{aligned}$$

である。以上で、(回転)∘(併進鏡映) が (併進鏡映) になることが示された。

12) この式を満たすような点(c, d)を鏡映軸上にとればよい。

合同変換群

<table>
<tr><th></th><th>併進鏡映</th><th>回　転</th><th>併　進</th></tr>
<tr><td>併進鏡映</td><td>回　転
併　進</td><td>併進鏡映</td><td>併進鏡映</td></tr>
<tr><td>回　転</td><td>併進鏡映</td><td colspan="2" rowspan="2">[正格合同変換群]</td></tr>
<tr><td>併　進</td><td>併進鏡映</td></tr>
</table>

3.4　ホモセティ変換群

ホモセティ変換群を構成する変換は、併進と中心拡大である。[13)]

ホモセティ変換群

	併　進	中心拡大
併　進	[併進群]	3.4.2 3.4.3
中心拡大	3.4.3	3.4.1

3.4.1　(中心拡大)∘(中心拡大) は (併進) または (中心拡大) である

2つの中心拡大

$$O_{(a_1,b_1)}(0:\mu_1),\qquad O_{(a_2,b_2)}(0:\mu_2)$$

の合成変換

$$O_{(a_2,b_2)}(0:\mu_2)\circ O_{(a_1,b_1)}(0:\mu_1)$$

の表現行列は、

$$\begin{aligned} &O_{(a_2,b_2)}(0:\mu_2)\circ O_{(a_1,b_1)}(0:\mu_1)\quad : \\ &\begin{pmatrix} \mu_2 & 0 & a_2(1-\mu_2) \\ 0 & \mu_2 & b_2(1-\mu_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & a_1(1-\mu_1) \\ 0 & \mu_1 & b_1(1-\mu_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} \mu_1\mu_2 & 0 & a_1\mu_2-a_1\mu_1\mu_2+a_2-a_2\mu_2 \\ 0 & \mu_1\mu_2 & b_1\mu_2-b_1\mu_1\mu_2+b_2-b_2\mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{19}$$

となる。

13) ホモセティ変換とは、平面上の変換で、直線をそれ自身に平行な直線に移す変換をいう。

(a)　$\mu_1\mu_2=1$ **のとき**

$$\begin{pmatrix} \mu_1\mu_2 & 0 & a_1\mu_2-a_1\mu_1\mu_2+a_2-a_2\mu_2 \\ 0 & \mu_1\mu_2 & b_1\mu_2-b_1\mu_1\mu_2+b_2-b_2\mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -(a_1-a_2)+(a_1-a_2)\mu_2 \\ 0 & 1 & -(b_1-b_2)+(b_1-b_2)\mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

となる。したがって、

$$O_{(a_2,b_2)}(0:\mu_2)\circ O_{(a_1,b_1)}(0:\mu_1)=T(-(a_1-a_2)+(a_1-a_2)\mu_2,\ -(b_1-b_2)+(b_1-b_2)\mu_2)$$

である。

(b)　$\mu_1\mu_2\neq 1$ **のとき**

$$\begin{pmatrix} \mu_1\mu_2 & 0 & a_1\mu_2-a_1\mu_1\mu_2+a_2-a_2\mu_2 \\ 0 & \mu_1\mu_2 & b_1\mu_2-b_1\mu_1\mu_2+b_2-b_2\mu_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu_1\mu_2 & 0 & p(1-\mu_1\mu_2) \\ 0 & \mu_1\mu_2 & q(1-\mu_1\mu_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

となる。ただし、

$$\begin{cases} p=\dfrac{\mu_2(1-\mu_1)a_1+(1-\mu_2)a_2}{1-\mu_1\mu_2} \\ q=\dfrac{\mu_2(1-\mu_1)b_1+(1-\mu_2)b_2}{1-\mu_1\mu_2} \end{cases}$$

である。したがって、

$$O_{(a_2,b_2)}(0:\mu_2)\circ O_{(a_1,b_1)}(0:\mu_1)=O_{(p,q)}(0:\mu_1\mu_2)$$

である。[14] 以上で、(中心拡大)∘(中心拡大) が、拡大率の積が1であるか否かによって、(併進) または (中心拡大) になることが示された。

3.4.2　(中心拡大)∘(併進) は (併進)∘(中心拡大) に帰着される

中心拡大

$$O_{(a,b)}(0:\mu)$$

と併進

$$T(u,v)$$

の合成変換

$$O_{(a,b)}(0:\mu)\circ T(u,v)$$

14) 点 (p,q) は、点 (a_1,b_1) と点 (a_2,b_2) を両端とする線分を $(1-\mu_2):(\mu_2(1-\mu_1))$ に内分する点になる。

の表現行列は、

$$
\begin{aligned}
&O_{(a,b)}(0:\mu)\circ T(u,v) \quad : \\
&\begin{pmatrix} \mu & 0 & a(1-\mu) \\ 0 & \mu & b(1-\mu) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} \mu & 0 & u\mu+a(1-\mu) \\ 0 & \mu & v\mu+b(1-\mu) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} 1 & 0 & u\mu \\ 0 & 1 & v\mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & 0 & a(1-\mu) \\ 0 & \mu & b(1-\mu) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

となる。したがって、

$$O_{(a,b)}(0:\mu)\circ T(u,v)=T(u\mu,v\mu)\circ O_{(a,b)}(0:\mu)$$

である。以上で、(中心拡大)∘(併進) が (併進)∘(中心拡大) に帰着されることが示された。

3.4.3 (併進)∘(中心拡大) は (併進) または (中心拡大) である

併進

$$T(u,v)$$

と中心拡大

$$O_{(a,b)}(0:\mu)$$

の合成変換

$$T(u,v)\circ O_{(a,b)}(0:\mu)$$

の表現行列は、

$$
\begin{aligned}
&T(u,v)\circ O_{(a,b)}(0:\mu) \quad : \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & 0 & a(1-\mu) \\ 0 & \mu & b(1-\mu) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu & 0 & a(1-\mu)+u \\ 0 & \mu & b(1-\mu)+v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

となる。

(a) $\mu=1$ のとき

$$O_{(a,b)}(0:\mu)=O_{(a,b)}(0:1)$$

であり、これは恒等変換である。したがって、

$$T(u,v)\circ O_{(a,b)}(0:\mu)=T(u,v)$$

である。

(b) $\mu\neq 1$ のとき

$$T(u,v)\circ O_{(a,b)}(0:\mu)\quad :$$

$$\begin{pmatrix}1&0&u\\0&1&v\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu&0&a(1-\mu)\\0&\mu&b(1-\mu)\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu&0&p(1-\mu)\\0&\mu&q(1-\mu)\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{24}$$

となる。ただし、

$$\begin{cases}p=a+\dfrac{u}{1-\mu}\\[2ex] q=b+\dfrac{v}{1-\mu}\end{cases}$$

である。したがって、

$$T(u,v)\circ O_{(a,b)}(0:\mu)=O_{(p,q)}(0:\mu)$$

である。以上で、(併進)∘(中心拡大)が、拡大率が1であるか否かによって、(併進)または(中心拡大) になることが示された。また、3.4.2とあわせて、(中心拡大)∘(併進) が (併進) または (中心拡大) になることが示された。

ホモセティ変換群

	併　進	中心拡大
併　進	[併進群]	併　進 中心拡大
中心拡大	併　進 中心拡大	併　進 中心拡大

3.5　正格相似変換群

正格相似変換群を構成する変換は、併進と回転と中心拡大と回転拡大である。ここでは、回転及び中心拡大を回転拡大の一部として扱う。

正格相似変換群

	併　進	回転拡大
併　進	[併進群]	3.5.2 3.5.3
回転拡大	3.5.3	3.5.1 3.5.3

3.5.1 (回転拡大)∘(回転拡大) は (併進)∘(回転拡大) に帰着される

2つの回転拡大

$$O_{(a_1,b_1)}(\theta_1:\mu_1),\qquad O_{(a_2,b_2)}(\theta_2:\mu_2)$$

の合成変換

$$O_{(a_2,b_2)}(\theta_2:\mu_2)\circ O_{(a_1,b_1)}(\theta_1:\mu_1)$$

の表現行列は、

$$
\begin{aligned}
&O_{(a_2,b_2)}(\theta_2:\mu_2)\circ O_{(a_1,b_1)}(\theta_1:\mu_1)\quad :\\
&\begin{pmatrix}\mu_2\cos\theta_2 & -\mu_2\sin\theta_2 & a_2(1-\mu_2\cos\theta_2)+b_2\mu_2\sin\theta_2\\ \mu_2\sin\theta_2 & \mu_2\cos\theta_2 & -a_2\mu_2\sin\theta_2+b_2(1-\mu_2\cos\theta_2)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&\times\begin{pmatrix}\mu_1\cos\theta_1 & -\mu_1\sin\theta_1 & a_1(1-\mu_1\cos\theta_1)+b_1\mu_1\sin\theta_1\\ \mu_1\sin\theta_1 & \mu_1\cos\theta_1 & -a_1\mu_1\sin\theta_1+b_1(1-\mu_1\cos\theta_1)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1 & 0 & -(a_1-a_2)+(a_1-a_2)\mu_2\cos\theta_2-(b_1-b_2)\mu_2\sin\theta_2\\ 0 & 1 & -(b_1-b_2)+(b_1-b_2)\mu_2\cos\theta_2+(a_1-a_2)\mu_2\sin\theta_2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&\times\begin{pmatrix}\mu_1\mu_2\cos(\theta_1+\theta_2) & -\mu_1\mu_2\sin(\theta_1+\theta_2) & a_1\{1-\mu_1\mu_2\cos(\theta_1+\theta_2)\}+b_1\mu_1\mu_2\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \mu_1\mu_2\sin(\theta_1+\theta_2) & \mu_1\mu_2\cos(\theta_1+\theta_2) & -a_1\mu_1\mu_2\sin(\theta_1+\theta_2)+b_1\{1-\mu_1\mu_2\cos(\theta_1+\theta_2)\}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

となる。したがって、

$$
\begin{aligned}
&O_{(a_2,b_2)}(\theta_2:\mu_2)\circ O_{(a_1,b_1)}(\theta_1:\mu_1)\\
&\quad =T(-(a_1-a_2)+(a_1-a_2)\mu_2\cos\theta_2-(b_1-b_2)\mu_2\sin\theta_2,\\
&\qquad\quad -(b_1-b_2)+(b_1-b_2)\mu_2\cos\theta_2+(a_1-a_2)\mu_2\sin\theta_2)\\
&\qquad\quad \circ O_{(a_1,b_1)}(\theta_1+\theta_2:\mu_1\mu_2)
\end{aligned}
$$

である。以上で、(回転拡大)∘(回転拡大) が (併進)∘(回転拡大) に帰着されることが示された。

3.5.2 (回転拡大)∘(併進) は (併進)∘(回転拡大) に帰着される

回転拡大

$$O_{(a,b)}(\theta:\mu)$$

と併進

$$T(u,v)$$

の合成変換

$$O_{(a,b)}(\theta:\mu)\circ T(u,v)$$

の表現行列は、

$$
\begin{aligned}
&O_{(a,b)}(\theta:\mu)\circ T(u,v) \quad : \\
&\begin{pmatrix} \mu\cos\theta & -\mu\sin\theta & a(1-\mu\cos\theta)+b\mu\sin\theta \\ \mu\sin\theta & \mu\cos\theta & -a\mu\sin\theta+b(1-\mu\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} 1 & 0 & u\mu\cos\theta-v\mu\sin\theta \\ 0 & 1 & u\mu\sin\theta+v\mu\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu\cos\theta & -\mu\sin\theta & a(1-\mu\cos\theta)+b\mu\sin\theta \\ \mu\sin\theta & \mu\cos\theta & -a\mu\sin\theta+b(1-\mu\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

となる。したがって、

$$O_{(a,b)}(\theta:\mu)\circ T(u,v)=T(u\mu\cos\theta-v\mu\sin\theta,\ u\mu\sin\theta+u\mu\cos\theta)\circ O_{(a,b)}(\theta:\mu)$$

である。以上で、(回転拡大)∘(併進)が(併進)∘(回転拡大)に帰着されることが示された。

3.5.3 (併進)∘(回転拡大)は(併進)または(回転拡大)である

併進

$$T(u,v)$$

と回転拡大

$$O_{(a,b)}(\theta:\mu)$$

の合成変換

$$T(u,v)\circ O_{(a,b)}(\theta:\mu)$$

の表現行列は、

$$
\begin{aligned}
&T(u,v)\circ O_{(a,b)}(\theta:\mu) \quad : \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu\cos\theta & -\mu\sin\theta & a(1-\mu\cos\theta)+b\mu\sin\theta \\ \mu\sin\theta & \mu\cos\theta & -a\mu\sin\theta+b(1-\mu\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

となる。

(a) ($\exists n\in Z[\theta=2n\pi]$ かつ $\mu=1$) または ($\exists n\in Z[\theta=(2n+1)\pi]$ かつ $\mu=-1$) のとき

$$O_{(a,b)}(\theta:\mu)$$

は恒等変換である。したがって、

$$T(u,v)\circ O_{(a,b)}(\theta:\mu)=T(u,v)$$

である。

(b) ($\forall n\in Z[\theta\neq 2n\pi]$ または $\mu\neq 1$) かつ ($\forall n\in Z[\theta\neq(2n+1)\pi]$ または $\mu\neq -1$) のとき

$$T(u,v)\circ O_{(a,b)}(\theta:\mu) \quad : \quad \begin{pmatrix} \mu\cos\theta & -\mu\sin\theta & p(1-\mu\cos\theta)+q\mu\sin\theta \\ \mu\sin\theta & \mu\cos\theta & -p\mu\sin\theta+q(1-\mu\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

となる。ただし、

$$\begin{cases} p=a+\dfrac{u(1-\mu\cos\theta)-v\mu\sin\theta}{1-2\mu\cos\theta+\mu^2} \\ q=b+\dfrac{u\mu\sin\theta+v(1-\mu\cos\theta)}{1-2\mu\cos\theta+\mu^2} \end{cases}$$

である。[15] したがって、

$$T(u,v)\circ O_{(a,b)}(\theta:\mu)=O_{(p,q)}(\theta:\mu)$$

である。以上で、(併進)∘(回転拡大) が (併進) または (回転拡大) になることが示された。また、3.5.1 とあわせて、(回転拡大)∘(回転拡大) が (併進) または (回転拡大) になることが示され、3.5.2 とあわせて、(回転拡大)∘(併進) が (併進) または (回転拡大) になることが示された。

正格相似変換群

	併　進	回転拡大
併　進	[併進群]	併　進 回転拡大
回転拡大	併　進 回転拡大	併　進 回転拡大

3.6　相似変換群

相似変換群を構成する変換は、併進、回転、鏡映、併進鏡映、中心拡大、拡大鏡映、回転拡大である。ここでは、鏡映を併進鏡映の一部として、回転及び中心拡大を回転拡大の一部として扱う。

15) (b)の条件のとき、$1-2\mu\cos\theta+\mu^2\neq 0$ を示さなければならないが、$1-2\mu\cos\theta+\mu^2=0$ をみたす解は、$(\theta,\mu)=(2n\pi,1)$ または $((2n+1)\pi,-1)$ しかない。これは、(a)の場合であって、(b)の場合にはありえない。

相似変換群

	拡大鏡映	併進鏡映	併　進	回転拡大
拡大鏡映	3.6.1	3.6.3	3.6.5 3.6.6	3.6.9
併進鏡映	3.6.2			3.6.7
併　進	3.6.4 3.6.7		[併進群] [正格相似変換群]	
回転拡大	3.6.8	3.6.6		

3.6.1　(拡大鏡映)∘(拡大鏡映) は (併進) または (回転拡大) である

(a)　2つの鏡映軸が平行であるとき

(拡大鏡映)∘(拡大鏡映)＝(中心拡大)∘(鏡映)∘(中心拡大)∘(鏡映)

＝(中心拡大)∘(鏡映)∘(鏡映)∘ (中心拡大)

＝(中心拡大)∘(併進)∘(中心拡大)　　($\because$3.3.1.(a))

＝(併進)∘ (中心拡大)∘(中心拡大)　　($\because$3.4.2)

$$=(\text{併進})\circ\begin{cases}(\text{併進})\\(\text{中心拡大})\end{cases}\quad(\because 3.4.1)$$

$$=\begin{cases}(\text{併進})\quad(\because 3.1.1)\\ \begin{cases}(\text{併進})\\(\text{中心拡大})\end{cases}\quad(\because 3.4.3)\end{cases}$$

＝(併進) または (中心拡大)

＝(併進) または (回転拡大)

(b)　2つの鏡映軸が平行ではないとき

(拡大鏡映)∘(拡大鏡映)＝(中心拡大)∘(鏡映)∘(中心拡大)∘(鏡映)

＝(中心拡大)∘(鏡映)∘(鏡映)∘(中央拡大)

＝(中心拡大)∘(回転)∘(中心拡大)　　($\because$3.3.1.(b))

$$=(\text{中心拡大})\circ\begin{cases}(\text{併進})\\(\text{回転拡大})\end{cases}\quad(\because 3.5.1, 3.5.3)$$

$$=\begin{cases}\begin{cases}(\text{併進})\\(\text{中心拡大})\end{cases}\quad(\because 3.4.3)\\ \begin{cases}(\text{併進})\\(\text{回転拡大})\end{cases}\quad(\because 3.5.1, 3.5.3)\end{cases}$$

＝(併進) または (中心拡大) または (回転拡大)

＝(併進) または (回転拡大)

以上で、(拡大鏡映)∘(拡大鏡映) が (併進) または (回転拡大) になることが示された。

3.6.2　(拡大鏡映)∘(併進鏡映) は (併進) または (回転拡大) である

(a)　2つの鏡映軸が平行であるとき

(拡大鏡映)∘(併進鏡映) = (中心拡大)∘(鏡映)∘(併進)∘(鏡映)
= (中心拡大)∘(鏡映)∘(鏡映)∘(併進)
= (中心拡大)∘(併進)∘(併進)　(∵3.3.1.(a))
= (中心拡大)∘(併進)　(∵3.1.1)
= (併進) または (中心拡大)　(∵3.4.2, 3.4.3)
= (併進) または (回転拡大)

(b)　2つの鏡映軸が平行ではないとき

(拡大鏡映)∘(併進鏡映) = (中心拡大)∘(鏡映)∘(併進)∘(鏡映)
= (中心拡大)∘(鏡映)∘(鏡映)∘(併進)
= (中心拡大)∘(回転)∘(併進)　(∵3.3.1.(b))

$$=(\text{中心拡大})\circ\begin{cases}(\text{併進})\\(\text{回転})\end{cases}\qquad(\because 3.2.2,3.2.3)$$

$$=\begin{cases}\begin{cases}(\text{併進})\\(\text{中心拡大})\end{cases} & (\because 3.4.2,3.4.3)\\ \begin{cases}(\text{併進})\\(\text{中心拡大})\end{cases} & (\because 3.5.1,3.5.3)\end{cases}$$

= (併進) または (中心拡大)
= (併進) または (回転拡大)

以上で、(拡大鏡映)∘(併進鏡映) が (併進) または (回転拡大) になることが示された。

3.6.3　(併進鏡映)∘(拡大鏡映) は (併進) または (回転拡大) である

(a)　2つの鏡映軸が平行であるとき

(併進鏡映)∘(拡大鏡映) = (併進)∘(鏡映)∘(中心拡大)∘(鏡映)
= (併進)∘(鏡映)∘(鏡映)∘(中心拡大)
= (併進)∘(併進)∘(中心拡大)　(∵3.3.1.(a))
= (併進)∘(中心拡大)　(∵3.1.1)
= (併進) または (中心拡大)　(∵3.4.3)
= (併進) または (回転拡大)

(b)　2つの鏡映軸が平行ではないとき

(併進鏡映)∘(拡大鏡映) = (併進)∘(鏡映)∘(中心拡大)∘(鏡映)
= (併進)∘(鏡映)∘(鏡映)∘(中心拡大)
= (併進)∘(回転)∘(中心拡大)　(∵3.3.1.(b))

$$=(\text{併進})\circ\begin{cases}(\text{併進})\\(\text{中心拡大})\end{cases}\qquad(\because 3.5.1,3.5.3)$$

$$
=\begin{cases}(\text{併進}) & (\because 3.1.1)\\ \begin{cases}(\text{併進})\\ (\text{中心拡大})\end{cases} & (\because 3.4.3)\end{cases}
$$

$=$(併進) または (中心拡大)

$=$(併進) または (回転拡大)

以上で、(併進鏡映)$\circ$(拡大鏡映) が (併進) または (回転拡大) になることが示された。

3.6.4 (拡大鏡映)$\circ$(併進) は (回転拡大)$\circ$(併進鏡映) に帰着される

(拡大鏡映)$\circ$(併進)$=$(中心拡大)$\circ$(鏡映)$\circ$(併進)

$=$(中心拡大)$\circ$(併進鏡映)　　($\because$ 3.3.2, 3.3.3)

$=$(回転拡大)$\circ$(併進鏡映)

以上で、(拡大鏡映)$\circ$(併進)が (回転拡大)$\circ$(併進鏡映) に帰着されることが示された。

3.6.5 (併進)$\circ$(拡大鏡映) は (併進鏡映)$\circ$ (回転拡大) に帰着される

(併進)$\circ$(拡大鏡映)$=$(併進)$\circ$(中心拡大)$\circ$(鏡映)

$=$(併進)$\circ$(鏡映)$\circ$(中心拡大)

$=$(併進鏡映)$\circ$(中心拡大)　　($\because$ 3.3.3)

$=$(併進鏡映)$\circ$(回転拡大)

以上で、(併進)$\circ$(拡大鏡映) が (併進鏡映)$\circ$(回転拡大) に帰着されることが示された。

3.6.6 (併進鏡映)$\circ$(回転拡大) は (併進鏡映) または (拡大鏡映) である

(併進鏡映)$\circ$(回転拡大)$=$(併進鏡映)$\circ$(回転)$\circ$(中心拡大)

$=$(併進鏡映)$\circ$(中心拡大)　　($\because$ 3.3.4)

$=$(併進)$\circ$(鏡映)$\circ$(中心拡大)

$=$(鏡映)$\circ$(併進)$\circ$(中心拡大)

$$
=(\text{鏡映})\circ\begin{cases}(\text{併進})\\ (\text{中心拡大})\end{cases}\quad (\because 3.4.3)
$$

$$
=\begin{cases}(\text{併進鏡映}) & (\because 3.3.2, 3.3.3)\\ (\text{鏡映})\circ(\text{中心拡大}) & \end{cases}
$$

である。そこで、鏡映

$$
R_{(c,d)}^{(p,q)}
$$

と中心拡大

$$
O_{(a,b)}(0:\mu)
$$

の合成変換

$$
R_{(c,d)}^{(p,q)}\circ O_{(a,b)}(0:\mu)
$$

を調べる。この合成変換の表現行列は、

$R_{(c,d)}^{(p,q)} \circ O_{(a,b)}(0:\mu)$ ：

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & \frac{2pq}{p^2+q^2} & \frac{2q(cq-dp)}{p^2+q^2} \\ \frac{2pq}{p^2+q^2} & -\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & -\frac{2p(cq-dp)}{p^2+q^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 & a(1-\mu) \\ 0 & \mu & b(1-\mu) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(p^2-q^2)\mu}{p^2+q^2} & \frac{2pq\mu}{p^2+q^2} & \frac{a(1-\mu)(p^2-q^2)+2b(1-\mu)pq+2q(cq-dp)}{p^2+q^2} \\ \frac{2pq\mu}{p^2+q^2} & -\frac{(p^2-q^2)\mu}{p^2+q^2} & \frac{2a(1-\mu)pq-b(1-\mu)(p^2-q^2)-2p(cq-dp)}{p^2+q^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(p^2-q^2)\mu}{p^2+q^2} & \frac{2pq\mu}{p^2+q^2} & \frac{r\{p^2+q^2-(p^2-q^2)\mu\}-2spq\mu}{p^2+q^2} \\ \frac{2pq\mu}{p^2+q^2} & -\frac{(p^2-q^2)\mu}{p^2+q^2} & \frac{s\{p^2+q^2+(p^2-q^2)\mu\}-2rpq\mu}{p^2+q^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (29)
\end{aligned}$$

となる。ただし、r, s は、2元連立1次方程式

$$\begin{cases} \frac{a(1-\mu)(p^2-q^2)+2b(1-\mu)pq+2q(cq-dp)}{p^2+q^2} = \frac{r\{p^2+q^2-(p^2-q^2)\mu\}-2spq\mu}{p^2+q^2} \\ \frac{2a(1-\mu)pq-b(1-\mu)(p^2-q^2)-2p(cq-dp)}{p^2+q^2} = \frac{s\{p^2+q^2+(p^2-q^2)\mu\}-2rpq\mu}{p^2+q^2} \end{cases}$$

の解である。この2元連立1次方程式が解をもつ条件は、

$$\{p^2+q^2-(p^2-q^2)\mu\}\{p^2+q^2+(p^2-q^2)\mu\}-(-2pq\mu)(-2pq\mu) \neq 0$$

すなわち、

$$(p^2+q^2)^2(1-\mu)(1+\mu) \neq 0$$

である。ここで、ベクトル $(p, q) \neq \vec{0}$ であるから、

$$p^2+q^2 \neq 0$$

である。したがって、

$$\mu \neq \pm 1$$

のとき、2元連立1次方程式は解をもつので、

$$R_{(c,d)}^{(p,q)} \circ O_{(a,b)}(0:\mu) = R_{(r,s)}^{(p,q)}(\mu)$$

であり、これは拡大鏡映である。一方、

$$\mu = 1$$

のとき、中心拡大

$$O_{(a,b)}(0:\mu)=O_{(a,b)}(0:1)$$

は恒等変換になるので、

$$R_{\langle c,d\rangle}^{\langle p,q\rangle}\circ O_{(a,b)}(0:\mu)=R_{\langle c,d\rangle}^{\langle p,q\rangle}$$

であるが、これは鏡映である。むろん、鏡映は併進鏡映の一部であるので、併進鏡映であるともいえる。また、

$$\mu=-1$$

のとき、中心拡大

$$O_{(a,b)}(0:\mu)=O_{(a,b)}(0:-1)$$

は回転

$$O_{(a,b)}(\pi:1)$$

に等しいので、

$$R_{\langle c,d\rangle}^{\langle p,q\rangle}\circ O_{(a,b)}(0:\mu)$$

は、3.3.4 により、併進鏡映である。したがって、(鏡映)∘(中心拡大)が(併進鏡映)または(拡大鏡映)になることが示された。以上で、(併進鏡映)∘(回転拡大)が(併進鏡映)または(拡大鏡映)になることが示された。また、3.6.5 とあわせて、(併進)∘(拡大鏡映)が(併進鏡映)または(拡大鏡映)になることが示された。

3.6.7 (回転拡大)∘(併進鏡映)は(併進鏡映)または(拡大鏡映)である

$$\begin{aligned}
\text{(回転拡大)}\circ\text{(併進鏡映)} &= \text{(回転)}\circ\text{(中心拡大)}\circ\text{(併進鏡映)}\\
&= \text{(中心拡大)}\circ\text{(回転)}\circ\text{(併進鏡映)}\\
&= \text{(中心拡大)}\circ\text{(併進鏡映)} \qquad (\because 3.3.5)\\
&= \text{(中心拡大)}\circ\text{(併進)}\circ\text{(鏡映)}\\
&= \left.\begin{matrix}\text{(併進)}\\ \text{(中心拡大)}\end{matrix}\right\}\circ\text{(鏡映)} \qquad (\because 3.4.2, 3.4.3)\\
&= \begin{cases}\text{(併進鏡映)} \qquad (\because 3.3.3)\\ \text{(中心拡大)}\circ\text{(鏡映)}\end{cases}
\end{aligned}$$

である。そこで、中心拡大

$$O_{(a,b)}(0:\mu)$$

と鏡映

$$R_{\langle c,d\rangle}^{\langle p,q\rangle}$$

の合成変換

$$O_{(a,b)}(0:\mu)\circ R^{\{p;q\}}_{\{c,d\}}$$

を調べる。この合成変換の表現行列は、

$O_{(a,b)}(0:\mu)\circ R^{\{p;q\}}_{\{c,d\}}$ ：

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & a(1-\mu) \\ 0 & \mu & b(1-\mu) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & \dfrac{2pq}{p^2+q^2} & \dfrac{2q(cq-dp)}{p^2+q^2} \\ \dfrac{2pq}{p^2+q^2} & -\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2} & -\dfrac{2p(cq-dp)}{p^2+q^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{(p^2-q^2)\mu}{p^2+q^2} & \dfrac{2pq\mu}{p^2+q^2} & \dfrac{2q(cq-dp)\mu+a(1-\mu)(p^2+q^2)}{p^2+q^2} \\ \dfrac{2pq}{p^2+q^2} & -\dfrac{(p^2-q^2)\mu}{p^2+q^2} & \dfrac{-2p(cq-dp)\mu+b(1-\mu)(p^2+q^2)}{p^2+q^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{(p^2-q^2)\mu}{p^2+q^2} & \dfrac{2pq\mu}{p^2+q^2} & \dfrac{r\{p^2+q^2-(p^2-q^2)\mu\}-2spq\mu}{p^2+q^2} \\ \dfrac{2pq\mu}{p^2+q^2} & -\dfrac{(p^2-q^2)\mu}{p^2+q^2} & \dfrac{s\{p^2+q^2-(p^2-q^2)\mu\}-2rpq\mu}{p^2+q^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (30)$$

となる。ただし、r, s は、2元連立1次方程式

$$\begin{cases} \dfrac{2q(cq-dp)\mu+a(1-\mu)(p^2+q^2)}{p^2+q^2}=\dfrac{r\{p^2+q^2-(p^2-q^2)\mu\}-2spq\mu}{p^2+q^2} \\ \dfrac{-2p(cq-dp)\mu+b(1-\mu)(p^2+q^2)}{p^2+q^2}=\dfrac{s\{p^2+q^2+(p^2-q^2)\mu\}-2rpq\mu}{p^2+q^2} \end{cases}$$

の解である。この2元連立1次方程式が解をもつ条件は、

$$\{p^2+q^2-(p^2-q^2)\mu\}\{p^2+q^2+(p^2-q^2)\mu\}-(-2pq\mu)(-2pq\mu)\neq 0$$

であるが、3.6.6と同様に、

$$\mu\neq\pm 1$$

のとき

$$O_{(a,b)}(0:\mu)\circ R^{\{p;q\}}_{\{c,d\}}=R^{\{p;q\}}_{\{r,s\}}(\mu)$$

であり、これは拡大鏡映である。一方、

$$\mu=1$$

のとき、中心拡大

$$O_{(a,b)}(0:\mu)=O_{(a,b)}(0:1)$$

は恒等変換になるので、

$$O_{(a,b)}(0:\mu)\circ R^{\{p,q\}}_{\{c,d\}}=R^{\{p,q\}}_{\{c,d\}}$$

であるが、これは鏡映である。むろん、鏡映は併進鏡映の一部であるので、併進鏡映であるともいえる。また、

$$\mu=-1$$

のとき、中心拡大

$$O_{(a,b)}(0:\mu)=O_{(a,b)}(0:-1)$$

は回転

$$O_{(a,b)}(\pi:1)$$

に等しいので、

$$O_{(a,b)}(0:\mu)\circ R^{\{p,q\}}_{\{c,d\}}$$

は、3.3.5 により、併進鏡映である。したがって、(中心拡大)∘(鏡映) が (併進鏡映) または (拡大鏡映) になることが示された。以上で、(回転拡大)∘(併進鏡映) が (併進鏡映) または (拡大鏡映) になることが示された。また、3.6.4 とあわせて、(拡大鏡映)∘(併進) が (併進鏡映) または (拡大鏡映) になることが示された。

3.6.8 (拡大鏡映)∘(回転拡大) は (併進鏡映) または (拡大鏡映) である

(a) 拡大率の積が 1 であるとき

(拡大鏡映)∘(回転拡大) ＝(中心拡大)∘(鏡映)∘(回転)∘(中心拡大)
＝(鏡映)∘(中心拡大)∘(中心拡大)∘(回転)
＝(鏡映)∘(併進)∘(回転)　(∵3.4.1.(a))
＝(併進鏡映)∘(回転)　(∵3.3.2, 3.3.3)
＝(併進鏡映)　(∵3.3.4)

(b) 拡大率の積が 1 ではないとき

(拡大鏡映)∘(回転拡大) ＝(中心拡大)∘(鏡映)∘(回転)∘(中心拡大)
＝(鏡映)∘(中心拡大)∘(中心拡大)∘(回転)
＝(鏡映)∘(中心拡大)∘(回転)　(∵3.4.1.(b))
＝(鏡映)∘(回転拡大)　(∵3.5.1, 3.5.3)
＝(拡大鏡映)　(∵3.6.6)

以上で、(拡大鏡映)∘(回転拡大) が、拡大率の積が 1 であるか否かによって、(併進鏡映) または (拡大鏡映) になることが示された。

3.6.9 (回転拡大)∘(拡大鏡映) は (併進鏡映) または (拡大鏡映) である

(a) 拡大率の積が 1 であるとき

(回転拡大)∘(拡大鏡映) ＝(回転)∘(中心拡大)∘(中心拡大)∘(鏡映)
＝(回転)∘(併進)∘(鏡映)　(∵3.4.1.(a))

＝(回転)∘(併進鏡映)　　(∵3.3.3)

＝(併進鏡映)　　(∵3.3.5)

(b)　**拡大率の積が１ではないとき**

(回転拡大)∘(拡大鏡映)＝(回転)∘(中心拡大)∘(中心拡大)∘(鏡映)

＝(回転)∘(中心拡大)∘(鏡映)　　(∵3.4.1.(b))

＝(回転拡大)∘(鏡映)　　(∵3.5.1,3.5.3)

＝(拡大鏡映)　　(∵3.6.7)

以上で、(回転拡大)∘(拡大鏡映) が、拡大率の積が１であるか否かによって、(併進鏡映) または (拡大鏡映) になることが示された。

相似変換群

	拡大鏡映	併進鏡映	併　進	回転拡大
拡大鏡映	併　進 回転拡大	併　進 回転拡大	併進鏡映 拡大鏡映	併進鏡映 拡大鏡映
併進鏡映	併　進 回転拡大			併進鏡映 拡大鏡映
併　進	併進鏡映 拡大鏡映		[併進群] [正格相似変換群]	
回転拡大	併進鏡映 拡大鏡映	併進鏡映 拡大鏡映		

すべてを表にしてみると、次のようになる。

相似変換群

	拡大鏡映	併進鏡映	鏡　映	回　転	併　進	中心拡大	回転拡大
拡大鏡映	併　進 回転拡大	併　進 回転拡大	併　進 回転拡大	併進鏡映 拡大鏡映	併進鏡映 拡大鏡映	併進鏡映 拡大鏡映	併進鏡映 拡大鏡映
併進鏡映	併　進 回転拡大	併　進 回　転	併　進 回　転	併進鏡映	併進鏡映	併進鏡映 拡大鏡映	併進鏡映 拡大鏡映
鏡　映	併　進 回転拡大	併　進 回　転	併　進 回　転	併進鏡映	併進鏡映	併進鏡映 拡大鏡映	併進鏡映 拡大鏡映
回　転	併進鏡映 拡大鏡映	併進鏡映	併進鏡映	併　進 回　転	併　進 回　転	併　進 回転拡大	併　進 回転拡大
併　進	併進鏡映 拡大鏡映	併進鏡映	併進鏡映	併　進 回　転	併　進	併　進 中心拡大	併　進 回転拡大
中心拡大	併進鏡映 拡大鏡映	併進鏡映 拡大鏡映	併進鏡映 拡大鏡映	併　進 回転拡大	併　進 中心拡大	併　進 中心拡大	併　進 回転拡大
回転拡大	併進鏡映 拡大鏡映	併進鏡映 拡大鏡映	併進鏡映 拡大鏡映	併　進 回転拡大	併　進 回転拡大	併　進 回転拡大	併　進 回転拡大

なお、拡大鏡映から回転拡大までをこの順に並べた根拠について述べておく。まず、それ自身の集合が群をなす併進を中心に考える。これに回転を加えると正格合同変換群をなすので、回転を併進の横に置く。もう一方の横に中心拡大を置くのは、中心拡大と併進の集合がホモセティ群をなすからである。次に、鏡映は併進鏡映に含まれるという関係があるので、これらを隣同士に置く。そして、これらを回転の横に置くと、併進鏡映、鏡映、回転、併進の集合が合同変換群をなすことがわかりやすくなる。最後に、回転拡大は中心拡大を含むので、その隣に置く。すると、回転、併進、中心拡大、回転拡大の集合が正格相似変換群をなすことがわかりやすくなる。残された拡大鏡映は右端でも左端でもよいのであるが、併進鏡映の横である左端に置いてみた。そうして、鏡映と回転の間にやや太い線を引いてみると、全体として、下のようになるという利点があるからである。

相似変換群

	変　格	正　格
変　格	正　格	変　格
正　格	変　格	正　格

4　おわりに

相似変換群の部分群について見てきた上で、気のついた点にふれておく。

4.1　合同変換は3回以下の鏡映の合成変換である

合同変換群は、併進鏡映、鏡映、回転、併進から生成される。そして、併進と回転は、2つの鏡映の合成変換として表されることを、3.3.1で示した。また、併進鏡映は、併進と鏡映の合成変換であるから、結局、3つの鏡映の合成変換として表される。したがって、任意の合成変換は、多くても3回の鏡映の合成変換として表される。この事実は、合同変換においては、併進鏡映、鏡映、回転、併進の4種類が対等な要素なのではなく、鏡映のみがプリミティブな要素であることを示している。「鏡による図形の移動」[16)]は、鏡映を基本にして併進と回転を教え、最終的には、「どんな図形も、3回以内の鏡映で動かしたい位置に動かせる」という、合同変換群の重要な性質を獲得させている授業プランである。

4.2　正格相似変換とホモセティ変換群

三角形の向きを変えない相似変換である正格相似変換は、併進と回転拡大から生成される。そして、正格相似変換はその部分群として、併進群と正格合同変換群とホモセティ変換群を含んでいる。このうちで、ホモセティ変換群は、正格相似変換群の部分群であると同時に、合同変換群から正格相似変換群へ移行する入り口となる。なぜなら、ホモセティ変換群は、合同変換群の要素である併進と、正格相似変換群のまさに中心的役割を担う中心拡大とから生成されるからである。そして、中心拡大は、「直線をそれに平行な直線に変換する」という、併進と同じ性質をもっている。したがって、中心拡大をホモセティ変換群の要素と位置づけて教えること

16) 須田勝彦・久蔵宏幸・岡野勉「授業書『鏡による図形の移動』と授業記録」、北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第8号、1990年を参照。

は、既習事項である併進をさらにホモセティ変換というより広い概念でとらえ直し（平行性の保存の再認識)、また、正格相似変換群への橋渡しを行うという、２重の意味をもつのである。ホモセティ変換群を扱った授業プランとしては、前田輪音による「ホモセティー」がある。[17)]

4.3 併進と半回転の集合からなる群

相似変換群は、拡大鏡映、併進鏡映、併進、回転拡大の４つの要素から生成される。それにもかかわらず、回転拡大の特殊ケースである回転と中心拡大を考えたのは、それぞれが、正格合同変換群とホモセティ変換群の要素となるからである。さらに、回転と中心拡大の特殊ケースである半回転を考えると、すべての半回転とすべての併進からなる集合は、合成変換に関して群をなす。点(a, b)を中心とする半回転を

$$H(a, b)$$

と書く。このとき、

$$H(a, b)=O_{(a,b)}(\pi : 1)=O_{(a,b)}(0 : -1)$$

であり、この半回転の表現行列は、

$$H(a, b) \quad : \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

となる。２つの半回転

$$H(a_1, b_1), \qquad H(a_2, b_2)$$

の合成変換

$$H(a_2, b_2) \circ H(a_1, b_1)$$

の表現行列は、

$$H(a_2, b_2) \circ H(a_1, b_1) \quad :$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2a_2 \\ 0 & -1 & 2b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2a_1 \\ 0 & -1 & 2b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2(a_2-a_1) \\ 0 & 1 & 2(b_2-b_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

となる。したがって、

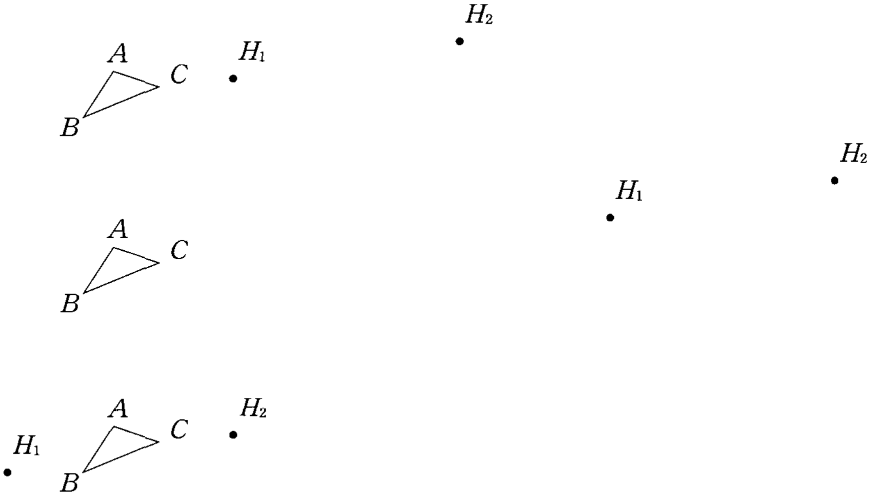
$$H(a_2, b_2) \circ H(a_1, b_1)=T(2(a_2-a_1), 2(b_2-b_1))$$

である。この事実は、２つの半回転の合成変換が、半回転の中心間の距離の２倍の併進になることを示している。そして、この事実を使うと、(半回転)∘(併進) と、(併進)∘(半回転) がと

17) 前田輪音「授業書『ホモセティー』と授業記録―幾何教育における相似変換の指導の一環として―」、北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第12号、1994年を参照。

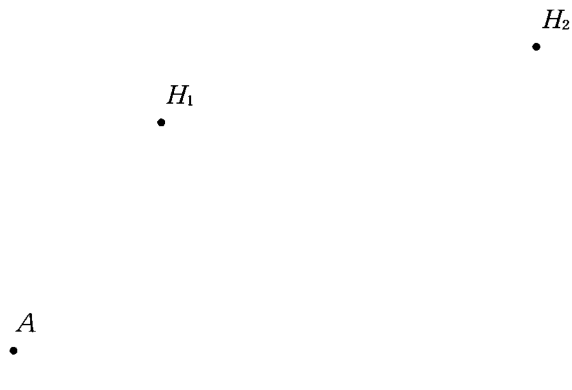
もに（半回転）になることは容易に知られる。ところで、2つの半回転の合成変換が併進になるという事実は、鏡映軸が平行である2つの鏡映の合成変換が、鏡映軸間の距離の2倍の併進になる（3.3.1.(a)）こととよく似ている。そして、授業プラン「鏡による図形の移動」では、（鏡映）∘（鏡映）が（併進）になることを確かめる問題が盛り込まれている。そこで、その問題のアイディアを借用して、次のような問題が考えられる。

問題　下の三角形 ABC を、点 H_1 で半回転した後、さらに、点 H_2 で半回転したとき、どこに動くか予想してみましょう。だいたいこのあたりだと思うところに、三角形 $A_2B_2C_2$ を書いてみましょう。予想ですから、定規は使わないで下さい（紙からはみ出すと思った人には、別の紙とセロハンテープを渡します）。



この問題の後に、定規を使って実際に作図をして、$2\overrightarrow{H_1H_2}$ による併進になることを確認するのである。また、1点だけを2回続けて半回転する問題も考えられる。

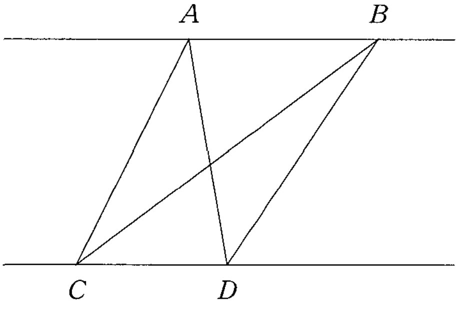
問題　点 A を点 H_1 で半回転させた点 A_1 を作図して下さい。また、点 A_1 を点 H_2 で半回転させた点 A_2 を作図して下さい。



[作図の終わった図を見て]
●線分 A_1H_1 の長さと線分 H_1A の長さは＿＿＿＿＿＿＿＿＿。
●線分 A_1H_2 の長さと線分 H_2A_2 の長さは＿＿＿＿＿＿＿＿＿。
●線分 H_1H_2 と線分 AA_2 は＿＿＿＿＿＿＿＿＿。
●線分 AA_2 の長さは線分 H_1H_2 の長さの＿＿＿＿＿＿＿＿＿。
これは、半回転の合成変換を通して、中点連結定理を確認していることに等しい。

4.4　相似変換群と等積アファイン変換群

今後に残された課題として、等積アファイン変換群の位置づけの問題がある。等積アファイン変換は、アファイン変換の一部であり、三角形の面積を変えない変換である。相似変換が変換による形の不変性によって特徴づけられるのに対して、等積アファイン変換は変換による面積の不変性によって特徴づけられるのである。そして、合同変換がこれらの共通部分に存在しているのである。合同変換ではないアファイン変換には、例えば、直線 AB と直線 CD が平行であるとき、三角形 ACD を三角形 BCD に移すような変換がある。



このとき、底辺 CD は共通であり高さ（直線 AB と直線 CD の距離）も等しくなるため、三角形 ACD と三角形 BCD は、一般に合同ではないが面積が等しい。このような等積性は一見して明らかであり、幾何の問題を解く際にはしばしば用いられる。等積アファイン変換群をひとまとまりとして扱った授業プランの作成は可能かどうか、検討の余地はある。そして、等積アファイン変換群の構造を明らかにするためには、初等幾何的方法よりはむしろ、本稿のような表現行列による方法が有効であろう。